

УДК 539.3

© 1991 г.

У. Р. НИГУЛ / , А. А. РАВАСО

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С ЕИ-ПАМЯТЬЮ

Рассматривается математическое моделирование одномерной продольной волны деформации, которая при нулевых начальных условиях генерирована краевым воздействием в линейной неоднородной наследственно упругой среде. С помощью преобразования Лапласа во времени и метода ВКБ построена прифронтальная асимптотика решения на базе модели неоднородной среды с ЕИ-памятью. Решение удовлетворяет условию метода ВКБ о малости характерной длины волны по сравнению с расстоянием, на котором гладкоменяющиеся по пространственной координате свойства среды существенно меняются. Для описания волн в однородных средах модель с ЕИ-памятью была предложена в [1, 2] и далее использована в [3]. Волновые свойства (затухание, дисперсия и т. п.) среды с ЕИ-памятью исследованы в [1, 3]. В данной работе коэффициенты модели среды с ЕИ-памятью подобраны таким образом [3], что в качестве предельного случая она охватывает также модель среды с Е-памятью, которая при рассмотрении частного случая однородной среды была предложена уже в 1962 г. [4] и далее нашла широкое применение при описании волн в однородных средах [1, 5-7] и в слоисто-однородных средах [8, 9], а недавно в [10] использована также в случае неоднородной среды.

Для построения прифронтальной асимптотики волны, распространяющейся в неоднородной среде с ЕИ-памятью, в данной работе использована методика, которая первоначально была разработана в [11] для приближенного описания головной части волны, распространяющейся в неоднородной упругой среде, а затем была использована с аналогичной целью в [10] в случае неоднородной наследственно упругой среды с Е-памятью. При этом в данной работе попутно несколько улучшено асимптотическое представление, выведенное в [10] для среды с Е-памятью.

1. Постановка задачи. Пусть t — время, X — одна из координат в лагранжовой системе декартовых координат, $U(X, t)$ — перемещение вдоль координаты X , $\sigma(X, t)$ — продольное напряжение, $\rho_0(X) > 0$ — плотность среды в начальном равновесном состоянии при $t=0$. Пусть штрих обозначает производную по X , а точка — производную по t .

Будем использовать уравнение движения, начальные и краевые условия

$$\rho_0(X) U''(X, t) - \sigma'(X, t) = 0 \quad (1.1)$$

$$U(X, 0) = 0, \quad U'(X, 0) = 0 \quad (1.2)$$

$$U(0, t) = U_0 \Psi(t), \quad U_0 = \text{const}, \quad \Psi(t) = H(t) \psi(t) \quad (1.3)$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда, $\psi(t)$ — безразмерная непрерывно дифференцируемая функция, которая удовлетворяет условию

$$\psi(0) = 0 \quad (1.4)$$

Рассмотрим описание волны $U(X, t)$, которая генерирована краевым воздействием (1.3) при $X=0$ и распространяется в положительном направлении X .

Введем в рассмотрение реологические уравнения

$$E(X) U'(X, t) = \sigma(X, t) + K(t) * \sigma(X, t) \quad (1.5)$$

$$\sigma(X, t) = E(X) [U'(X, t) - R(t) * U'(X, t)] \quad (1.6)$$

где $E(X)$ — модуль упругости, $K(t)$ — регулярное ядро ползучести, $R(t)$ — регулярное ядро релаксации и принято следующее обозначение интеграла-свертки

$$F(t) * G(X, t) = \int_0^t F(t-\tau) G(X, \tau) d\tau \quad (1.7)$$

Эквивалентность уравнений (1.5) и (1.6) обеспечивается условием [1, 3, 12]:

$$K(t) - R(t) - K(t) * R(t) = 0 \quad (1.8)$$

Примем следующее предположение: $E(X)$ и $\rho_0(X)$ во всей рассматриваемой области $X \geq 0$ — положительные непрерывные функции, имеющие непрерывные первые и вторые производные.

Введем следующие обозначения [10, 11]:

$$f_1(X) = E'(X)/E(X), \quad f_2(X) = \rho_0(X)/E(X) > 0 \quad (1.9)$$

$$c_0 = [E(0)/\rho_0(0)]^{1/2} > 0 \quad (1.10)$$

Исключая $\sigma(X, t)$ из (1.1) с помощью (1.5) или же (1.6), получим соответственно эквивалентные уравнения [10]:

$$f_2(X) [U''(X, t) + U''(X, t) * K(t)] - U''(X, t) - f_1(X) U'(X, t) = 0 \quad (1.11)$$

$$f_2(X) U''(X, t) - U''(X, t) + U''(X, t) * R(t) - f_1(X) [U'(X, t) - U'(X, t) * R(t)] = 0 \quad (1.12)$$

Будем рассматривать построение асимптотических представлений $U(X, t)$ в рамках так называемой «модифицированной» теории наследственных сред, при которой $K(t)$ и $R(t)$ задаются в форме [1-3]:

$$K(t) = K_1(t) + 1/4 K_1(t) * K_1(t) \quad (1.13)$$

$$R(t) = R_1(t) - 1/4 R_1(t) * R_1(t) \quad (1.14)$$

Здесь $K_1(t)$ и $R_1(t)$ — модифицированные ядра ползучести и релаксации, которые в соответствии с (1.8) связаны между собой соотношением

$$K_1(t) - R_1(t) - 1/2 K_1(t) * R_1(t) = 0 \quad (1.15)$$

Главное внимание будем уделять средам с Ei -памятью, при которых $K_1(t)$ задается в форме [1-3]:

$$K_1(t) = [-2m/\ln(a/b)] [Ei(-t/a) - Ei(-t/b)] \quad (1.16)$$

$$Ei(-y) = - \int_v^{\infty} z^{-1} e^{-z} dz, \quad 0 < m < \infty, \quad 0 < a < b < \infty$$

Известно [3], что в качестве предельного случая $a \rightarrow b$ эта модель охватывает и модель среды с E -памятью, при которой [1, 3-5]:

$$K_1(t) = 2m \exp(-t/b) \quad (1.17)$$

Введем параметр γ по определению [3]:

$$\gamma = a/b, \quad 0 < \gamma \leq 1 \quad (1.18)$$

Тогда на основе (1.16) имеем для среды с Ei -памятью выражение

$$K_1(t) = [-2m/\ln \gamma] [Ei(-t/\gamma b) - Ei(-t/b)] \quad (1.19)$$

которое в предельном случае $\gamma \rightarrow 1$ приобретает вид (1.17), соответствующий частному случаю среды с E -памятью.

Замечание 1. В частном случае однородной среды в уравнениях (1.11) и (1.12) имеем

$$f_1(X) = 0, \quad f_2(X) = c_0^{-2} \quad (1.20)$$

Точные и асимптотические представления $U(X, t)$ для этого случая при $K_1(t)$ вида (1.19) выведены в [1-3].

2. **Формальное решение.** Выполняя преобразование Лапласа по времени над уравнениями (1.11) и (1.12), с учетом начальных условий (1.2) имеем (s — параметр преобразования) [10]:

$$[U^L(X, s)]'' + f_1(X) [U^L(X, s)]' - s^2 f_2(X) [1 + K^L(s)] U^L(X, s) = 0 \quad (2.1)$$

$$[U^L(X, s)]'' + f_1(X) [U^L(X, s)]' - s^2 f_2(X) [1 - R^L(s)]^{-1} U^L(X, s) = 0 \quad (2.2)$$

Однако из (1.13), (1.14) и (1.15) следует

$$1 + K^L(s) = [1 + {}^{1/2}K_1^L(s)]^2, \quad 1 - R^L(s) = [1 - {}^{1/2}R_1^L(s)]^2 \quad (2.3)$$

$$1 + {}^{1/2}K_1^L(s) = [1 - {}^{1/2}R_1^L(s)]^{-1} \quad (2.4)$$

Поэтому, введя обозначение

$$s[1 + {}^{1/2}K_1^L(s)] = p(s) \quad (2.5)$$

получим

$$s^2[1 + K^L(s)] = p^2(s), \quad s^2[1 - R^L(s)]^{-1} = p^2(s) \quad (2.6)$$

Учитывая (2.6), получим из (2.1) и (2.2) одинаковое уравнение

$$[U^L(X, s)]'' + f_1(X) [U^L(X, s)]' - f_2(X) p^2(s) U^L(X, s) = 0 \quad (2.7)$$

В [10] построено асимптотическое при $p(s) \rightarrow \infty$ решение уравнения (2.7). Для волны, которая генерирована краевым воздействием (1.3) и распространяется в положительном направлении X , это решение имеет вид

$$U^L(X, s) = U_0 \Psi^L(s) \Phi^L(X, s) \quad (2.8)$$

$$\Phi^L(X, s) = \exp[-p(s) \Phi_2(X) + \Phi_1(X) - p^{-1}(s) \Phi_3(X) + \dots]$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\Phi_1(X) = -{}^{1/4} \int_0^X \{2f_1(x) + [f_2'(x)/f_2(x)]\} dx$$

$$\Phi_2(X) = \int_0^X f_2^{1/2}(x) dx$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(X) = & {}^{1/2} \int_0^X f_2^{-1/2}(x) \{ {}^{1/2} f_1'(x) + {}^{1/4} f_1^2(x) + \\ & + {}^{1/4} [f_2''(x)/f_2(x)] - {}^{5/16} [f_2'(x)/f_2(x)]^2 \} dx \end{aligned} \quad (2.9)$$

Для сред с Ei - и с E -памятью на основе (1.19) имеем [3]:

$$K_1^L(s) = 2(m/s) [1 + D(s)] \quad (2.10)$$

причем в общем случае среды с Ei -памятью

$$D(s) = (\ln \gamma)^{-1} \ln \{1 + (1 - \gamma) / [\gamma(1 + bs)]\} \quad (2.11)$$

и в предельном случае среды с E -памятью

$$D(s) = -(1 + bs)^{-1} \quad (2.12)$$

Согласно формулам (2.5) и (2.10), имеем

$$p(s) = s + m + mD(s) \quad (2.13)$$

Используя (2.13), для развернутой записи первого члена в квадратных скобках второй формулы (2.8) получим

$$U^L(X, s) = U_0 \Psi^L(s) \Phi_0^L(X, s) \exp [\Phi_1(X) - m\Phi_2(X) - s\Phi_2(X)] \\ \Phi_0^L(X, s) = \exp [-m\Phi_2(X)D(s) - \Phi_3(X)p^{-1}(s) + \dots] \quad (2.14)$$

На основе формул (2.14) несложно выписать формальное решение

$$U(X, t) = U_0 \exp [\Phi_1(X) - m\Phi_2(X)] \int_0^{t_1} \Psi(t_1 - \tau) \Phi_0(X, \tau) d\tau \quad (2.15)$$

$$t_1 = t - \Phi_2(X), \quad \Phi_0(X, t) = \Phi_{02}(X, t) * \Phi_{03}(X, t) \quad (2.16)$$

где $\Phi_{02}(X, t)$ и $\Phi_{03}(X, t)$ обозначают функции, которые следует вычислить по своим изображениям

$$\Phi_{02}^L(X, s) = \exp [-m\Phi_2(X)D(s)] \quad (2.17)$$

$$\Phi_{03}^L(X, s) = \exp [-\Phi_3(X)p^{-1}(s) + \dots] \quad (2.18)$$

Используя определение (1.3) функции $\Psi(t)$, придаем формуле (2.15) вид

$$U(X, t) = U_0 \exp [\Phi_1(X) - m\Phi_2(X)] H(t_1) \int_0^{t_1} \Psi(t_1 - \tau) \Phi_0(X, \tau) d\tau \quad (2.19)$$

Имея в виду построение прифронтной асимптотики, при которой $1 + bs \rightarrow \infty$, используем в дальнейших рассуждениях следующий упрощенный вариант выражения (2.18):

$$\Phi_{03}^L(X, s) \approx \exp [-\Phi_3(X)(s+m)^{-1}] \quad (2.20)$$

Тогда на основе известных формул обращения [1, 3-5, 10] имеем

$$\Phi_{03}(X, t) = \delta(t) + B_0^* (2G_3(X, t)) e^{-im} H(t) \quad (2.21)$$

Здесь $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака и принято следующее обозначение [10]: $B_0(x) = J_0(x)$, если $\Phi_3(X) > 0$, и $B_0(x) = I_0(x) = J_0(ix)$, если $\Phi_3(X) < 0$ (здесь $J_0(z)$ — функция Бесселя), $G_3(X, t) = (|\Phi_3(X)|t)^{1/2}$.

Теперь на основе (2.16) и (2.21) получим

$$\Phi_0(X, t) = H(t) \Phi_{02}(X, t) + H(t) \int_0^t \Phi_{02}(X, t - \tau) B_0^* (2G_3(X, \tau)) e^{-im} d\tau \quad (2.22)$$

Итак, формулы (2.19) и (2.22) определяют формальное асимптотическое решение поставленной задачи. Для практического применения этого формального решения приходится вычислить функцию $\Phi_{02}(X, t)$, входящую в (2.22), на основе ее изображения (2.17).

Замечание 2. Если $\Phi_3(X) = 0$ при каком-либо рассматриваемом значении X , тогда, согласно формулам (2.16) и (2.20), выражение (2.22) приобретает вид

$$\Phi_0(X, t) = H(t) \Phi_{02}(X, t) \quad (2.23)$$

В частном случае однородной среды (см. замечание 1) при всех рассматриваемых значениях X имеем

$$\Phi_1(X)=0, \quad \Phi_2(X)=X/c_0, \quad \Phi_3(X)=0 \quad (2.24)$$

и в данном пункте построенное формальное асимптотическое решение идентично точному формальному решению, которое выведено и использовано в [1-3].

Замечание 3. При построении изложенного формального асимптотического решения нами по существу использовано только то обстоятельство, что функция $p(s)$ в уравнении (2.7) имеет структуру (2.13) и функция $D(s)$, входящая в выражение (2.13), располагает свойством

$$D(s) \rightarrow 0 \quad (1+bs \rightarrow \infty, \quad b=\text{const} > 0) \quad (2.25)$$

Такая функция $p(s)$ появится не только в случае сред с E - и с Ei -памятью, а также в более общих случаях наследственных сред. Однако в дальнейших рассуждениях данной работы ограничимся все же рассмотрением лишь сред с E - и с Ei -памятью, ибо при этих моделях наследственной среды оказывается возможным точное вычисление функции $\Phi_{02}(X, t)$, входящей в построенное формальное решение.

3. Явное асимптотическое решение для среды с E -памятью. Рассмотрим случай, когда функция $D(s)$ имеет вид (2.12). Тогда путем обращения выражения (2.17) получим

$$\Phi_{02}(X, t) = \delta(t) + H(t) I_0^* (2G_2(X, t)) e^{-t/b} \quad (3.1)$$

$$G_2(X, t) = (m\Phi_2(X)t/b)^{1/2} \quad (3.2)$$

Далее на основе (2.22) и (3.1)

$$\Phi_0(X, t) = \delta(t) + H(t) I_0^* (2G_2(X, t)) e^{-t/b} + H(t) B_0^* (2G_3(X, t)) e^{-tm} + H(t) F(X, t) \quad (3.3)$$

$$F(X, t) = \int_0^t [I_0^* (2G_2(X, t-\tau)) e^{-(t-\tau)/b}] [B_0^* (2G_3(X, \tau)) e^{-\tau m}] d\tau \quad (3.4)$$

Подставляя (3.3) в (2.19), получим следующее явное асимптотическое решение:

$$U(X, t) = U_0 \exp [\Phi_1(X) - m\Phi_2(X)] \psi(t_1) + F_2(X, t) + F_3(X, t) + F_0(X, t) \} H(t_1) \quad (3.5)$$

$$F_2(X, t) = \int_0^{t_1} \psi(t_1 - \tau) I_0^* (2G_2(X, \tau)) e^{-\tau/b} d\tau \quad (3.6)$$

$$F_3(X, t) = \int_0^{t_1} \psi(t_1 - \tau) B_0^* (2G_3(X, \tau)) e^{-\tau m} d\tau \quad (3.7)$$

$$F_0(X, t) = \int_0^{t_1} \psi(t_1 - \tau) F(X, \tau) d\tau \quad (3.8)$$

Эти формулы могут быть интерпретированы как несколько улучшенный вариант асимптотического решения, построенного в [10].

Замечание 4. В частном случае однородной среды (см. замечания 1 и 3) выражение (3.5) превращается в точную формулу

$$U(X, t) = U_0 \exp (-mX/c_0) \{ \psi(t_1) + F_2(X, t) \} H(t_1) \quad (3.9)$$

которая путем интегрирования по частям в выражении (3.6) функции $F_2(X, t)$ и с учетом условия (1.4) может быть записана также в форме

$$U(X, t) = U_0 H(t_1) \exp(-mX/c_0) \int_0^{t_1} [b^{-1} \psi(t_1 - \tau) + \psi^*(t_1 - \tau)] \exp(-\tau/b) I_0(2(mX\tau/c_0b)^{1/2}) d\tau \quad (3.10)$$

В соответствии с (2.16) и (2.24) в (3.9) и (3.10) $t_1 = t - (X/c_0)$.

Такого типа точное решение для однородной среды с E -памятью впервые было построено в [4, 5].

Замечание 5. В частном случае упругой среды, исследованном в [11], имеем $m=0$ и формула (3.5) приобретает вид

$$U(X, t) = U_0 H(t_1) \exp[\Phi_1(X)] \left\{ \psi(t_1) + \int_0^{t_1} \psi(t_1 - \tau) B_0^*(2G_3(X, \tau)) d\tau \right\} \quad (3.11)$$

Выполняя интегрирование по частям с учетом (1.4), можем переписать (3.11) также в форме

$$U(X, t) = U_0 H(t_1) \exp[\Phi_1(X)] \int_0^{t_1} \psi^*(t_1 - \tau) B_0(2G_3(X, \tau)) d\tau \quad (3.12)$$

Замечание 6. Формула (3.5) построена для описания волнового процесса в прифронтовой зоне, где вклад функции $F_0(X, t)$ небольшой по сравнению с суммарным вкладом остальных трех членов в фигурных скобках формулы (3.5). Следует также отметить, что при применении модели среды с E -памятью, как правило, имеется в виду случай, когда $m \ll 1/b$, и, следовательно, вклад экспоненциального члена при вычислении $F_3(X, t)$ по формуле (3.7) в прифронтовой зоне небольшой. Указанное позволяет высказать мнение, что в прикладных расчетах может себя хорошо зарекомендовать упрощенный вариант формулы (3.5), имеющий вид

$$U(X, t) = U_0 H(t_1) \exp[\Phi_1(X) - m\Phi_2(X)] \left\{ \psi(t_1) + \int_0^{t_1} \psi(t_1 - \tau) I_0^*(2G_2(X, \tau)) e^{-\tau/b} d\tau + \int_0^{t_1} \psi(t_1 - \tau) B_0^*(2G_3(X, \tau)) d\tau \right\} \quad (3.13)$$

С физической точки зрения второй и третий члены в фигурных скобках формулы (3.13) могут быть охарактеризованы как «поправки», зависящие соответственно от наследственных свойств и неоднородности среды.

Небезынтересно обратить внимание на то, что «упрощенная» формула (3.13) содержит все члены, которые нами были учтены в замечаниях 4 и 5, относящихся к частным случаям наследственной однородной и упругой неоднородной среды.

4. Явное асимптотическое решение для среды с Ei -памятью. Рассмотрим теперь в двух вариантах построение прифронтовой асимптотики в случае, когда функция $D(s)$ имеет вид (2.11).

Вариант А. Имея в виду асимптотику типа (2.25), используем разложение

$$D(s) \sim -B_1/(1+bs) - B_2/(1+bs)^2 - \dots$$

$$B_1 = (\gamma - 1)/(\gamma \ln \gamma), \quad B_2 = (\gamma - 1)^2/(2\gamma^2 \ln \gamma), \quad \dots \quad (4.1)$$

Сохраняя лишь первый член этого разложения, имеем для $D(s)$ выражение, которое отличается от (2.12) только постоянным множителем B_1 , причем из условия $0 < \gamma < 1$ следует, что B_1 — положительная постоянная. Значит, при таком подходе вычисление прифронтовой асимптотики для среды с Ei -памятью отличается от ее вычисления для среды с E -памятью, рассмотренной в предыдущем пункте, только тем, что в формуле (3.1) следует заменить $\Phi_2(X)$ величиной $B_1\Phi_2(X)$. Иначе говоря, при таком подходе для среды с Ei -памятью сохраняют силу формулы (3.4) — (3.8) для среды с E -памятью, если в выражениях (3.4) и (3.6) заменить $\Phi_2(X)$ величиной $B_1\Phi_2(X)$. Вследствие указанного «упрощенная» расчетная формула (3.13), в частности, приобретает вид

$$U(X, t) = U_0 H(t_1) \exp[\Phi_1(X) - m\Phi_2(X)] \left\{ \psi(t_1) + \int_0^{t_1} \psi(t_1 - \tau) L_0 \cdot (2B_1)^{1/2} G_2(X, \tau) e^{-\tau/b} d\tau + \int_0^{t_1} \psi(t_1 - \tau) B_0 \cdot (2G_3(X, \tau)) d\tau \right\} \quad (4.2)$$

Вариант Б. Используем теперь способ обращения преобразования Лапласа, который нашел применение в [1–3] при построении точных решений для однородной среды с Ei -памятью. Для этого прежде всего заметим, что (2.11) может быть переписана в следующей видоизмененной форме:

$$D(s) = [(\ln \gamma)^{-1} \ln A^L(s)] - 1, \quad A^L(s) = \gamma + (1 - \gamma)/(1 + bs) \quad (4.3)$$

Используя (4.3), получим из (2.17) следующее выражение:

$$\Phi_{02}^L(X, s) = [A^L(s)]^{N(X)} \exp[m\Phi_2(X)] \quad (4.4)$$

$$N(X) = -m\Phi_2(X) / \ln \gamma \quad (4.5)$$

Поскольку $0 < \gamma < 1$, то $\ln \gamma < 0$. С другой стороны, по определению $m > 0$ и $\Phi_2(X) > 0$. Поэтому $N(X)$ — положительная функция. Если задана конкретная функция $\Phi_2(X)$, а также конкретные численные значения величин m и γ , то может быть найдена такая последовательность X_1, X_2, \dots дискретных значений X , при которых

$$N(X_n) = n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.6)$$

Учитывая это обстоятельство, придадим формальному решению вид, удобный для вычисления явного решения в точках, где выполняется условие (4.6). Используя совместно (2.19), (2.22) и (4.4), представим формальное решение в виде формул

$$U(X, t) = U_0 \exp[\Phi_1(X)] H(t_1) \int_0^{t_1} \psi(t_1 - \tau) \Phi_{00}(X, \tau) d\tau \quad (4.7)$$

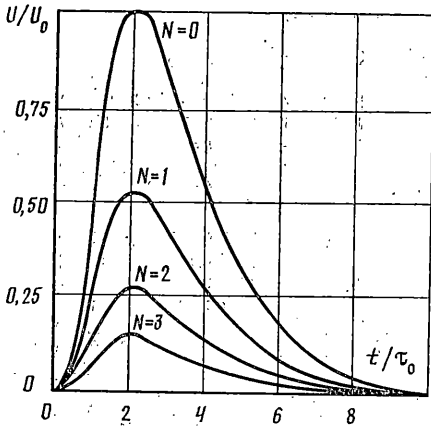
$$\Phi_{00}(X, t) = H(t) \Phi_A(X, t) + H(t) \int_0^t \Phi_A(X, t - \tau) B_0 \cdot (2G_3(X, \tau)) e^{-\tau m} d\tau \quad (4.8)$$

где $\Phi_A(X, t)$ обозначает функцию, которую следует вычислить на основе ее изображения:

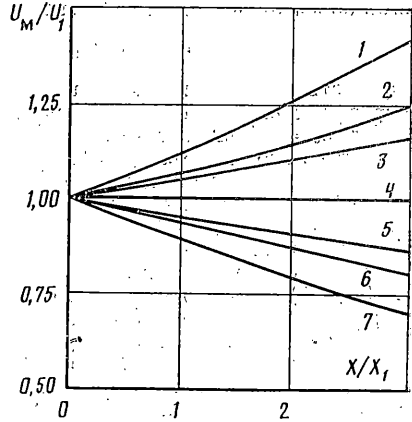
$$\Phi_A^L(X, s) = [A^L(s)]^{N(X)} \quad (4.9)$$

Пусть $A(t)$ обозначает функцию, имеющую изображение $A^L(s)$ вида (4.3). Тогда имеем [4]:

$$A(t) = \gamma \delta(t) + (1 - \gamma) b^{-1} \exp(-t/b) H(t) \quad (4.10)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Далее, в дискретных точках, где $N(X)$ приобретает значения (4.6), задача вычисления функции $\Phi_A(X, t)$, как в случае однородной среды [1], сводится к последовательному вычислению функций времени $\Phi_A(X_1, t)$, $\Phi_A(X_2, t)$, $\Phi_A(X_3, t)$, ... на основе их изображений $\Phi_A^L(X_n, s) = [A^L(s)]^n$ ($n=1, 2, 3, \dots$).

В частности, в точках $X=X_1$, $X=X_2$ и $X=X_3$, где соответственно $N(X)=N(X_1)=1$, $N(X)=N(X_2)=2$ и $N(X)=N(X_3)=3$ имеем [1]:

$$\begin{aligned} \Phi_A(X_1, t) &= A(t) = \gamma \delta(t) + (1-\gamma) b^{-1} \exp(-t/b) H(t) \\ \Phi_A(X_2, t) &= A(t) * A(t) = \\ &= \gamma^2 \delta(t) + 2(1-\gamma) \gamma b^{-1} \exp(-t/b) H(t) + \\ &\quad + (1-\gamma)^2 b^{-2} t \exp(-t/b) H(t) \\ \Phi_A(X_3, t) &= A(t) * A(t) * A(t) = \\ &= \gamma^3 \delta(t) + 3(1-\gamma) \gamma^2 b^{-1} \exp(-t/b) H(t) + \\ &\quad + 3(1-\gamma)^2 \gamma b^{-2} t \exp(-t/b) H(t) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (1-\gamma)^3 b^{-3} t^2 \exp(-t/b) H(t) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Формулы (4.7) и (4.8) совместно с представлениями вида (4.11) определяют прифронтовую асимптотику функции $U(X, t)$ при указанных выше дискретных значениях X . В частном случае однородной среды такая асимптотика перерождается в точное решение, построенное в [1].

5. Пример. Рассмотрим процесс распространения на конечном расстоянии импульса, возбуждаемого краевым условием (1.3) при

$$\psi(t) = \frac{1}{4} (t/\tau_0)^2 \exp[2 - (t/\tau_0)] \quad (5.1)$$

в среде, свойства которой меняются согласно формулам ($\tau_0, \alpha_0, \beta_0, \alpha, \beta$ — постоянные):

$$\rho_0(X) = \alpha_0^2 \exp(\alpha X), \quad E(X) = \beta_0^2 \exp(\beta X) \quad (5.2)$$

Волновой процесс опишем выражением (4.7), функции $\Phi_1(X)$, $\Phi_2(X)$ и $\Phi_3(X)$ в котором определяем аналитически. Используя формулы (2.9), имеем

$$\Phi_1(X) = -\frac{1}{4} (\alpha + \beta) X$$

$$\Phi_2(X) = 2\alpha_0 \{ \exp[\frac{1}{2}(\alpha - \beta) X] - 1 \} / [\beta_0(\alpha - \beta)]$$

$$\Phi_3(X) = -\frac{1}{4} \beta_0 [\beta^2 - \frac{1}{4}(\alpha - \beta)^2] \{ \exp[-\frac{1}{2}(\alpha - \beta) X] - 1 \} / [\alpha_0(\alpha - \beta)] \quad (5.3)$$

Легко определить, что в предельном случае, когда $\alpha \rightarrow \beta$:

$$\Phi_1(X) = 1/2 \beta X, \quad \Phi_2(X) = \alpha_0 X / \beta_0, \quad \Phi_3(X) = 1/8 \beta_0 \beta^2 X / \alpha_0 \quad (5.4)$$

Результаты численного расчета эволюции формы импульса в среде представлены на фиг. 1. При вычислениях использованы следующие исходные данные: $\alpha_0^2 = 10^4$ кг/м³, $\beta_0^2 = 10^4$ МПа, $\alpha = -10$, $\beta = -10$, $\tau_0 = 10^{-7}$ с, $\gamma = 0,5$, $b = 10^{-4}$ с, $m = 10^5$ с⁻¹. Как следует из фиг. 1, амплитуда импульса уменьшается с увеличением расстояния X , значения которого вычислены по формуле (4.5) при $N = 0, 1, 2, 3$. Заметно влияние дисперсии на изменение формы импульса при распространении.

Изменение максимальной амплитуды импульса в различных средах проиллюстрировано на фиг. 2. Здесь через X_1 обозначено расстояние X при $N = 1$, а через U_1 и U_M — максимальные значения амплитуд импульсов, распространяющихся в однородной ($\alpha = 0, \beta = 0$) и исследуемой средах соответственно. При расчетах использованы исходные данные, приведенные выше, за исключением величины $\gamma = 0,1$. Значения параметров α и β в выражениях (5.2) варьируются. Так, кривые 1, 2, 3 на фиг. 2 построены на основе результатов расчетов при значениях параметров $\alpha = -10; -10; 0$ и $\beta = -10; 0; -10$ и кривые 5, 6, 7 — при значениях $\alpha = 10; 0; 10$ и $\beta = 0; 10; 10$ соответственно. Результаты расчетов показывают, что во всех исследуемых вариантах наблюдается уменьшение амплитуды импульса при распространении аналогично результатам расчетов, представленных на фиг. 1. Скорость убывания амплитуды зависит от значений параметров среды. Так, при $\alpha < 0$ и $\beta < 0$ амплитуда уменьшается медленнее, а при $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ быстрее, нежели в однородной ($\alpha = 0, \beta = 0$) среде (линия 4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nigul U.* The modified theory of viscoelasticity. Preprint. Tallinn: Acad. of Sci. ESSR. 1983. 62 p.
2. *Нигул У. К.* Аналитическое решение одномерной обратной задачи импульсной акустодиагностики наследственной среды // Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1984. С. 142–152.
3. *Nigul U.* One-dimensional transient waves in linear homogeneous media with E-memory. Preprint. Tallinn: Est. Acad. of Sci. 1989. 84 p.
4. *Achenbach J. D., Chao C. C.* A three-parameter viscoelastic model particularly suited for dynamic problems // J. Mech. and Phys. Solids. 1962. V. 10. N 3. P. 245–252.
5. *Chao C. C., Achenbach J. D.* A simple viscoelastic analogy for stress waves // Waves in an elastic solid. Berlin: Springer-Verlag, 1964. P. 222–238.
6. *Pound M. J., Chin R. C. Y., Hedstrom G. W.* A comparison of the dynamic response of the ACS and SLS models for linear viscoelasticity // Wave Motion. 1984. V. 6. N 1. P. 23–32.
7. *Душин С. З.* Распространение волн в слабодиспергирующих средах // ПМТФ. 1986. № 1. С. 138–141.
8. *Нигул У. К., Стулов А. С.* Волны в слоистых линейных наследственных средах. Препринт. Таллинн: АН ЭССР, 1985. 66 с.
9. *Pound M. J.* Interface displacement for transient pulses in viscoelastic media // Wave Motion. 1985. V. 7. N 5. P. 271–282.
10. *Равасоо А. А.* Распространение одномерных волн в неоднородной наследственно упругой среде с E -памятью // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 147–152.
11. *Равасоо А.* Асимптотическое описание процесса распространения одномерного импульса в неоднородной среде // Изв. АН ЭССР. Физика. Математика. 1985. Т. 34. № 2. С. 170–177.
12. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.

Таллинн

Поступила в редакцию
30.I.1989