

УДК 539.3:534.1

© 1991 г.

В. А. ЕРЕМЕЕВ, Л. М. ЗУБОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ТЕЛ, ИСПЫТЫВАЮЩИХ ФАЗОВЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ

Методами пространственной нелинейной теории упругости [1, 2] рассмотрена проблема устойчивости упругих тел в условиях фазовых переходов первого рода — твердое тело. Подобные фазовые переходы часто встречаются в задачах о кристаллизации отливок, о росте кристаллов, замерзании грунтов, в задачах механики льда и снега, полимеров, в различных геофизических задачах. В рамках механики сплошной среды фазовые переходы первого рода различными методами рассматривались в [3–8]. Устойчивость упругих тел в условиях фазового перехода исследовалась в [8–10]. В настоящей работе для описания фазового равновесия использован подход [4, 5], основанный на обобщении на случай произвольного напряженно-деформированного состояния вариационного принципа Гиббса [11]. Положение границы раздела фаз заранее неизвестно и определяется в ходе решения задачи совместно с полем перемещений в зависимости от внешних нагрузок. Получены линеаризованные в окрестности произвольного напряженно-деформированного состояния уравнения равновесия твердого тела и краевые условия на ограничивающих его поверхностях. Исследованы равновесие и устойчивость двухфазного нелинейно-упругого шара, находящегося под действием внешнего гидростатического давления.

1. Рассмотрим упругое тело, состоящее из твердой и жидкой фаз и занимающее в деформированном состоянии объем V . Пусть $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ — внешняя граница тела, а Γ — граница раздела в деформированном состоянии, содержащаяся внутри тела. Двухфазную деформацию будем описывать радиус-вектором точки тела в деформированном состоянии $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r})$ и вектором \mathbf{S} , указывающим на положение фазовой границы в пространстве. Здесь \mathbf{r} — радиус-вектор точки тела в некоторой отсчетной конфигурации. Тело деформируется под действием внешних сил \mathbf{f} , распределенных по поверхности Σ_1 . На поверхности Σ_2 заданы перемещения. Действием массовых сил пренебрегаем. Температуру тела будем считать постоянной. Жидкость предполагается сжимаемой и однородной.

Обозначим прообраз фазовой границы Γ при отображении $\mathbf{R}(\mathbf{r})$ через γ , а прообраз внешней границы Σ через $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$. С поверхностью γ свяжем вектор \mathbf{s} соотношением $\mathbf{R}(\mathbf{s}) = \mathbf{S}$. Вектор \mathbf{s} описывает положение фазовой границы в отсчетной конфигурации. В случае отсутствия фазового перехода поверхность γ является фиксированной поверхностью в отсчетной конфигурации, отделяющей твердое тело от жидкости, и не изменяется под действием внешних нагрузок. Таким образом, изменяемость вектора \mathbf{s} характеризует изменение межфазной границы только в результате фазового превращения и может быть использована для описания чисто фазовой деформации.

Уравнения равновесия двухфазного тела, деформируемого в изотермическом процессе, могут быть получены из вариационного принципа минимума свободной энергии, в котором допускается независимое варьирование как радиус-вектора частицы \mathbf{R} , так и вектора положения фазовой границы \mathbf{s} [4, 5]. Получаемые уравнения равновесия в твердой фазе и краевые условия на внешней поверхности в метрике отсчетной конфигу-

рации имеют вид

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{D}(\mathbf{C}) = \rho_+^0 \frac{\partial \psi_+}{\partial \mathbf{C}}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}|_{\sigma_1} = \mathbf{f}_0, \quad \mathbf{R}|_{\sigma_2} = \mathbf{R}_0 \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{D} — тензор напряжений Пиолы, ρ_+^0 — плотность твердой фазы в отсчетной конфигурации, ψ_+ — массовая плотность свободной энергии, $\mathbf{C} = \nabla_0 \mathbf{R}$ — градиент деформации, \mathbf{n} — вектор единичной нормали к σ , \mathbf{f}_0 — поверхностная нагрузка, отнесенная к единице площади поверхности тела в недеформированном состоянии. В дальнейшем величины, относящиеся к твердой фазе, будем обозначать знаком «плюс», а относящиеся к жидкой — знаком «минус».

Условия на фазовой границе даются соотношениями [4, 5]

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = -p \mathbf{J} \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{J} = \det \mathbf{C} \quad (1.2)$$

$$[\psi]_{-}^{+} + p[\rho]_{-}^{+} = 0 \quad (1.3)$$

В (1.3) квадратными скобками обозначен скачок соответствующей величины при переходе через γ : $[\psi]_{-}^{+} = \psi_+ - \psi_-$, $[\rho^{-1}]_{-}^{+} = \rho_+^{-1} - \rho_-^{-1}$, ρ_{\pm} — плотности твердого тела и жидкости в деформированном состоянии. Соотношения (1.1) представляют собой уравнения равновесия и краевые условия в задаче равновесия нелинейно-упругого тела, соотношение (1.2) описывает действие гидростатического давления p со стороны жидкости на поверхность твердой фазы [1, 2]. Уравнение (1.3) представляет собой условие фазового равновесия и служит для определения положения фазовой границы.

Вводя в рассмотрение тензор напряжений Коши \mathbf{T} , связанный с \mathbf{D} соотношением [1, 2]: $\mathbf{T} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{D}$, уравнения (1.1), (1.2) можно записать в геометрии деформированного состояния $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$, $\mathbf{N} \cdot \mathbf{T}|_{\sigma_1} = \mathbf{f}$, $\mathbf{N} \cdot \mathbf{T}|_{\Gamma} = -p \mathbf{N}$, где \mathbf{N} — вектор единичной нормали к поверхности тела в деформированном состоянии, ∇ — оператор градиента в эйлеровых координатах, связанный с ∇_0 формулой [2]: $\nabla = \mathbf{C}^{-1} \cdot \nabla_0$. Уравнение (1.3) выполняется и на поверхности Γ .

Выполнение уравнений равновесия в сжимаемой жидкости в отсутствие массовых сил приводит к тому, что давление в жидкой фазе не зависит от координат. Учитывая закон состояния для сжимаемой жидкости

$$p = p(\rho_-) = \rho_-^2 \partial \psi_- / \partial \rho_- \quad (1.4)$$

получим, что плотность однородной жидкости также постоянна.

2. Устойчивость произвольного напряженно-деформированного состояния равновесия нелинейно-упругого тела, состоящего из двух фаз, при консервативных внешних нагрузках будем исследовать статическим методом, состоящим в рассмотрении положений равновесия, мало отличающихся от заданного, и определении тех значений параметров нагружения, при которых возможно существование нетривиальных решений линеаризованных в окрестности данного состояния уравнений равновесия и краевых условий.

В геометрии отсчетной конфигурации линеаризованные уравнения равновесия в твердой фазе и на внешней поверхности тела имеют вид [1, 2]:

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{D}' = 0, \quad \mathbf{D}' = \frac{d}{d\tau} \mathbf{D}(\nabla_0(\mathbf{R} + \tau \mathbf{w}))|_{\tau=0} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}'|_{\sigma_1} = \mathbf{f}_0', \quad \mathbf{w}|_{\sigma_2} = 0$$

В (2.1) точкой сверху обозначены линейные приращения соответствующих величин, обусловленные наложением малых добавочных перемещений \mathbf{w} .

При линеаризации краевых условий на фазовой границе необходимо также учитывать изменение положения фазовой границы, что приводит к возмущению не только неизвестных функций, но и их аргументов. Линейные приращения соответствующих величин на фазовой границе в отличие от линеаризованных в объеме и на внешней поверхности будем обозначать символом δ . Обозначим возмущения векторов s и S через ξ и Z . Учитывая зависимость между векторами s и S ($S=R(s)$), путем ее линеаризации получим соотношение, связывающее их возмущения $Z=w+\xi \cdot C$.

Для линеаризации соотношения (1.2) определим вариацию вектора нормали γ . Воспользуемся формулами [12], связывающими значения векторов ориентированных площадок невозмущенной поверхности γ и возмущенной поверхности γ^x с радиус-вектором $s^x=s+\tau\xi$:

$$n^x d\gamma^x = P^L \cdot n d\gamma, \quad d\gamma^x = J^x d\gamma \quad (2.2)$$

$$J^x = 1/2 [\text{tr}^2(P \cdot P^T) - \text{tr}((P \cdot P^T)^2)], \quad P = \nabla_0' \xi$$

При использовании формул (2.2) необходимо знать только радиус-вектор поверхности γ^x , определенный как вектор-функция координат на поверхности γ . Здесь ∇_0' — оператор градиента на поверхности γ , P^L — тензор, присоединенный к P .

Линеаризация (2.2) приводит к формулам

$$\delta(n d\gamma) = n \cdot (\nabla_0' \cdot \xi E - (\nabla_0' \xi)^T) d\gamma, \quad \delta(d\gamma) = (\nabla_0' \cdot \xi) d\gamma \quad (2.3)$$

Особенность формул (2.3) заключается в том, что в них присутствует двумерный оператор градиента. Отсюда следует, что

$$\delta n = -(\nabla_0' \xi) \cdot n \quad (2.4)$$

Используя разложение вектора ξ на нормальную и касательную составляющие $\xi = \eta n + \xi$ и формулы [12], полученное выражение можно преобразовать к виду $\delta n = -\nabla_0' \eta - k \cdot \xi$, где $k = -\nabla_0' n$ — тензор кривизны поверхности γ .

С учетом выражения для вариации градиента деформации на поверхности γ : $\delta C = \nabla_0' w + \xi \cdot \nabla_0' C$, линеаризация (1.2), (1.3) дает

$$n \cdot D'(\nabla_0' w + \xi \cdot \nabla_0' C) - n \cdot (\nabla_0' \xi)^T \cdot D = -p' n \cdot J C^{-T} \quad (2.5)$$

$$-p n \cdot J C^{-T} \cdot (\nabla_0' w E - (\nabla_0' w)^T) + p n \cdot (\nabla_0' \xi)^T \cdot J C^{-T} - p n \cdot (\xi \cdot \nabla_0') J C^{-T}$$

$$[\psi' + \xi \cdot \nabla_0' \psi]_{-} + p' [\rho^{-1}]_{-} - p [(\rho' + \xi \cdot \nabla_0' \rho) \rho^{-2}]_{-} = 0 \quad (2.6)$$

Получим также линеаризованные уравнения равновесия и краевые условия для двухфазного нелинейно-упругого тела в геометрии деформированного состояния, содержащие в качестве неизвестных функций вектор малых добавочных перемещений w и вектор возмущения фазовой границы Γ в деформированном состоянии Z .

В объеме тела и на поверхности Σ они имеют вид [1, 2]:

$$\nabla \cdot \Pi = 0, \quad \Pi(L) = T'(L) + T \text{tr} L - L^T \cdot T, \quad L = \nabla w \quad (2.7)$$

$$N \cdot \Pi|_{x_2} = \Phi, \quad w|_{x_2} = 0, \quad T'(L) = \frac{d}{d\tau} T(C + \tau C \cdot L)|_{\tau=0}$$

(Φ — возмущение поверхностной нагрузки). Справедливы соотношения, аналогичные (2.3), (2.4):

$$\delta(N d\Gamma) = N \cdot (\nabla' \cdot Z E - (\nabla' Z)^T) d\Gamma, \quad \delta N = -(\nabla' Z) \cdot N \quad (2.8)$$

Можно проверить, что верны тождества

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{wE} - (\nabla \mathbf{w})^T) &= \mathbf{N} \cdot (\nabla' \cdot \mathbf{wE} - (\nabla' \mathbf{w})^T) \\ \xi \cdot \nabla_0 &= (\mathbf{Z} - \mathbf{w}) \cdot \nabla \end{aligned} \quad (2.9)$$

Используя (2.8), (2.9), получим краевые условия на Γ :

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}'(\mathbf{L} + \mathbf{C}^{-1} \cdot ((\mathbf{Z} - \mathbf{w}) \cdot \nabla \mathbf{C})) + \mathbf{N} \cdot (\nabla' \cdot \mathbf{ZE} - (\nabla' \mathbf{Z})^T) \cdot \mathbf{T} &= \\ &= -p' \mathbf{N} - p \mathbf{N} \cdot (\nabla' \cdot \mathbf{ZE} - (\nabla' \mathbf{Z})^T) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$[\psi' + (\mathbf{Z} - \mathbf{w}) \cdot \nabla \psi]_{-} + p' [\rho^{-1}]_{-} - p [\rho' + (\mathbf{Z} - \mathbf{w}) \cdot \nabla \rho] \rho^{-2} \Big|_{-} = 0$$

Учитывая (2.9), первое уравнение из (2.10) можно выразить через тензор Π :

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \cdot \Pi(\mathbf{L}) + \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}'(\mathbf{C}^{-1} \cdot ((\mathbf{Z} - \mathbf{w}) \cdot \nabla \mathbf{C})) + \mathbf{N} \cdot (\nabla' \cdot (\mathbf{Z} - \mathbf{w}) \mathbf{E} - \\ - (\nabla' (\mathbf{Z} - \mathbf{w}))^T) \cdot \mathbf{T} &= -p' \mathbf{N} - p \mathbf{N} \cdot (\nabla' \cdot \mathbf{ZE} - (\nabla' \mathbf{Z})^T) \end{aligned}$$

Соотношения (2.7), (2.10) описывают малые деформации предварительно напряженного упругого тела с границей фазового перехода.

При отсутствии фазового превращения ($\xi = 0$, $\mathbf{Z} = \mathbf{w}$) краевые условия (2.5), (2.10) совпадают с известными [1, 2] линейризованными краевыми условиями в случае задания на поверхности гидростатического давления.

Использование линейризованных соотношений (2.1), (2.5–2.7), (2.10) при исследовании устойчивости эквивалентно методу, примененному в [9, 10] и основанному на анализе второй вариации энергии. Аналогичные (2.5) формулы использованы в [13] при исследовании устойчивости равновесия двухфазных тел в условиях неоднородного поля температур.

3. Рассмотрим краевые условия на фазовой границе в случае, когда жидкость занимает связную область. Ограничимся изучением несжимаемой твердой фазы ($\rho_+^0 = \rho_+$). Следуя [14], получим соотношение, связывающее плотность жидкости с перемещением фазовой границы. В отсутствие массовых сил и в однородном поле температур давление и плотность жидкости постоянны. Полная масса тела в процессе деформации не изменяется и равна M . В двухфазном состоянии масса тела складывается из массы жидкой фазы, равной в силу постоянства плотности $\rho_- V_-$, и массы твердой составляющей, равной $\rho_+ V_+$. Здесь V_{\pm} — объемы, занимаемые жидкостью и твердым телом в деформированном состоянии, которые могут быть выражены через радиус-векторы ограничивающих их поверхностей [14]:

$$V_- = -\frac{1}{3} \iint_{\Gamma} \mathbf{N} \cdot \mathbf{S} \, d\Gamma, \quad V = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} \mathbf{N} \cdot \mathbf{R} \, d\Sigma, \quad V_- = V - V_+$$

где \mathbf{N} — нормаль, направленная вне твердой фазы. Из закона сохранения массы имеем $M = \rho_+ V_+ + \rho_- V_-$. Полную массу представим в виде $M = \rho_+ v$, где v — объем тела в твердом состоянии. Отсюда следует соотношение для плотности жидкости

$$\rho_- = \rho_+ (v - V_+) / V_- \quad (3.1)$$

С учетом (3.1) закон состояния (1.4) позволяет определить давление в жидкости как функционал от \mathbf{R} и \mathbf{S} .

Условие фазового равновесия (1.3) преобразуем к виду

$$\rho_+ \psi_+(\mathbf{C}) = F(\rho_-), \quad F(\rho_-) = \rho_+ \psi_-(\rho_-) - p(\rho_-) (1 - \rho_+ / \rho_-) \quad (3.2)$$

Вариация плотности жидкости ρ_- дается соотношением $\rho_- \dot{=} = (\rho_+ - \rho_-) V_- / V_- - \rho_+ V_+ / V_-$, где значения V_- , V_+ определяются формула-

ми, аналогичными [14]:

$$V_- = - \iint_{\Gamma} \mathbf{N} \cdot \mathbf{Z} d\Gamma, \quad V' = \iint_{\Sigma} \mathbf{N} \cdot \mathbf{w} d\Sigma, \quad V_+ = V' - V_-$$

Учитывая, что $\delta(\rho_+ \psi_+) = \mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{C}^T$, и линеаризуя соотношение (3.2), получим

$$\mathbf{D} \cdot (\nabla_0 \mathbf{w} + \xi \cdot \nabla_0 \mathbf{C})^T = \rho_- \cdot dF/d\rho_- \quad (3.3)$$

Преобразуя (3.3) к виду, содержащему тензор напряжений Коши \mathbf{T} и вектор \mathbf{Z} , получим линеаризованное условие фазового равновесия в геометрии деформированного состояния

$$\mathbf{T} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{C}^{-1}((\mathbf{Z} - \mathbf{w}) \cdot \nabla \mathbf{C})) = \rho_- \cdot dF/d\rho_- \quad (3.4)$$

Заметим, что уравнение (3.3) не содержит компоненты вектора ξ , касательной к поверхности γ . Действительно, из уравнения (3.2) вытекает, что на γ функция $\rho_+ \psi_+(\mathbf{C})$ принимает одно и то же значение, следовательно, градиент деформации \mathbf{C} также не зависит от выбора точки на ней. Таким образом, производная по касательному направлению к γ от \mathbf{C} равна нулю и $\xi \cdot \nabla_0 \mathbf{C} \equiv (\eta \partial/\partial n + \xi \cdot \nabla_0') \mathbf{C} = \eta \partial/\partial n \mathbf{C}$. В отличие от (3.3), соотношение (3.4) содержит как нормальную, так и касательную составляющие вектора \mathbf{Z} .

Рассматривая возмущение фазовой границы, следует считать, что вектор ξ имеет только нормальную составляющую: $\xi = \eta \mathbf{n}$. В самом деле, бесконечно малое смещение точек поверхности γ в касательном направлении не изменяет этой поверхности. Кроме того, линеаризованное условие на межфазной границе состоит из одного уравнения и должно содержать одну дополнительную неизвестную, которой и является функция η . При выполнении этого условия разность $\mathbf{Z} - \mathbf{w}$ направлена по нормали к Γ .

4. В качестве примера исследуем равновесие и устойчивость двухфазного нелинейно-упругого шара, находящегося под действием внешнего гидростатического давления p_e . Твердая фаза предполагается несжимаемой.

Рассмотрим случай, когда твердая фаза представляет собой сферическую оболочку, содержащую в себе жидкость. Радиально-симметричная деформация несжимаемого тела дается формулами [2]

$$R = \sqrt[3]{r^3 - \alpha}, \quad \Phi = \varphi, \quad \Theta = \theta, \quad \alpha = \text{const} \quad (4.1)$$

где R , Φ , Θ и r , φ , θ — эйлеровы и лагранжевы сферические координаты.

Фазовая граница Γ представляет собой сферу радиуса A , ее прообраз γ — сферу радиуса a , поверхности Σ и σ также являются сферами радиусов B и b соответственно.

Соотношение (3.1), связывающее плотности твердой и жидкой фаз, принимает вид

$$\rho_- = \rho_+ l, \quad l = \frac{b^3 - B^3 + A^3}{A^3} = \frac{a^3}{a^3 - \alpha}$$

Коэффициент l характеризует скачок плотности при фазовом превращении. Случай $l > 1$ соответствует увеличению плотности после плавления, случай $l < 1$ — уменьшению. Первый случай относится к так называемым аномальным веществам, плотность которых в жидкой фазе больше, чем в твердой.

Определяющее соотношение для твердого тела выберем в форме модели материала Бартенева — Хазановича [2]:

$$\rho_+ \psi_+(C) = 2\mu (\text{tr } U - 3), \quad U = (C \cdot C^T)^{1/2}, \quad \det C = 1$$

$$D = 2\mu A - qC^{-T}, \quad A = U^{-1} \cdot C \quad (4.2)$$

Здесь q — неизвестная функция координат, не зависящая от деформации, μ — упругая постоянная, при малых деформациях играющая роль модуля сдвига. Закон состояний для жидкости возьмем в виде $p(\rho) = k\rho^\kappa$, $\psi_-(\rho) = k\rho^{\kappa-1}/(\kappa-1)$.

Уравнения равновесия и краевые условия (1.1), (1.2) сводятся к соотношениям

$$\frac{d}{dr} D_{rr} + 2 \frac{D_{rr} - D_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad D_{rr}|_{r=a} = -p(\rho_-) \frac{A^2}{a^2}, \quad D_{rr}|_{r=b} = -p_e \frac{B^2}{b^2}$$

где $D_{rr} = 2\mu - qR^2/r^2$, $D_{\theta\theta} = D_{\phi\phi} = 2\mu - qr/R$ — диагональные компоненты тензора напряжений Пиолы в базисе e_r, e_ϕ, e_θ , связанном с лагранжевыми сферическими координатами. Отсюда следует, что $q = p_e - 2\mu b^2/B^2 = = p(\rho_-) - 2\mu a^2/A^2$ и механические условия равновесия сводятся к нелинейному уравнению для определения параметра деформации α :

$$p_e = p(\rho_-) + 2\mu (a^2/A^2 - b^2/B^2) \quad (4.3)$$

Условие фазового равновесия (1.3) принимает вид

$$2\mu (l^{2/3} + 2l^{-1/3} - 3) - \rho_+ \psi_-(\rho_-) + p(\rho_-) \alpha/a^3 = 0 \quad (4.4)$$

В данном случае радиально-симметричной деформации можно установить непосредственную связь уравнений (4.3), (4.4) с принципом стационарности свободной энергии. Вычислим значение функционала свободной энергии W на деформациях вида (4.1). Имеем

$$W = \iiint_V \rho_+ \psi_+(C) dV + \iiint_V \rho_- \psi_-(\rho_-) dV +$$

$$+ \frac{1}{3} p_e \iint_\Sigma \mathbf{N} \cdot \mathbf{R} d\Sigma = 8\pi\mu \{ (b^3 - \alpha)^{1/3} b^2 -$$

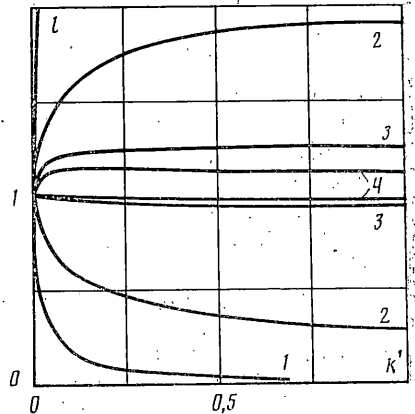
$$- (a^3 - \alpha)^{1/3} a^2 + a^3 - b^3 \} + 4\pi/3 p_e (b^3 - \alpha) +$$

$$+ 4\pi/3 \rho_+ a^3 \psi_-(\rho_-)$$

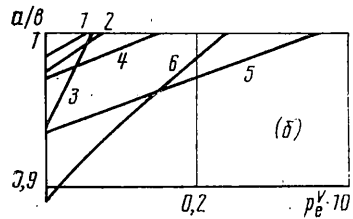
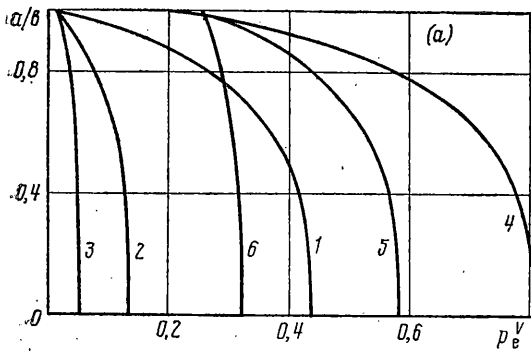
Таким образом, W является функцией переменных α и a и ее стационарность можно исследовать обычным образом. Легко проверить, что требование $\partial W/\partial \alpha = 0$ эквивалентно уравнению (4.3), а требование $\partial W/\partial a = 0$ эквивалентно (4.4).

Из уравнения (4.4) видно, что скачок плотности l при фазовом переходе не зависит от внешнего давления, а определяется свойствами материала. Можно показать, что уравнение (4.4) имеет два решения l_1^*, l_2^* , причем $l_1^* > 1$, $l_2^* < 1$. Зависимости l_1^*, l_2^* от параметра $k' = k/(2\mu\rho_+^\kappa)$ при разных значениях κ (1,1; 2; 5; 9) приведены на фиг. 1 (кривые 1—4).

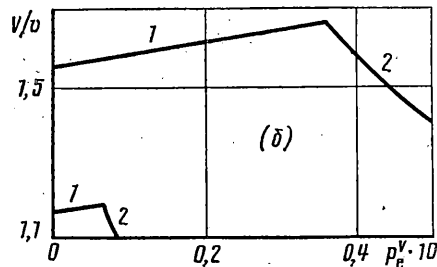
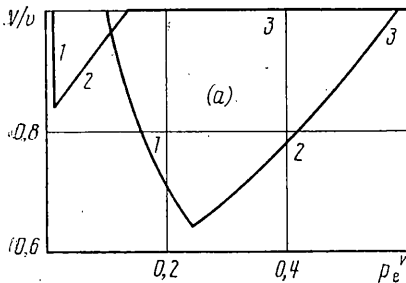
С использованием найденных значений l_1^*, l_2^* из уравнения (4.3) определяются положение фазовой границы Γ и ее прообраза γ (т. е. ра-



Фиг. 1



Фиг. 2.



Фиг. 3.

диусы A , a), полный объем шара V , параметр деформации α

$$a = b(\beta l / (l-1))^{1/3}, \quad A = l^{1/3} a, \quad V = 4\pi/3 b^3 (1-\beta) \quad (4.5)$$

$$\alpha = b^3 \beta, \quad \beta = 1 - (k' l^k + l^3 - p_e^V)^{-3/2}, \quad p_e^V = p_e / 2\mu$$

где l принимает значения l_1^* или l_2^* . Здесь и далее галочкой обозначены безразмерные давления, т. е. отнесенные к 2μ . Из формул (4.5) следует, что двухфазное состояние шара возможно не при всех значениях внешнего давления, а только если внешнее давление изменяется в некоторых пределах $\min(p_1^V, p_2^V) < p_e^V < \max(p_1^V, p_2^V)$, $p_1^V = k' l^k$, $p_2^V = k' l^k + l^3 - 1$. При $l = l_1^*$ $p_1^V < p_2^V$, при $l = l_2^*$ $p_1^V > p_2^V$. Для принятых при расчетах значений k' и χ при $l = l_2^*$ $p_2^V < 0$. Это означает, что двухфазное состояние равновесия шара возможно при нулевом внешнем давлении.

На фиг. 2 показаны значения a в зависимости от p_e^V в случаях $l = l_1^*$ (фиг. 2, а) и $l = l_2^*$ (фиг. 2, б). Кривые 1-3 соответствуют значению $k' = 0,01$ и $\chi = 1,4$; 2; 10, кривые 4-6 соответствуют значению $k' = 0,1$ и тем же значениям χ . На фиг. 3 указаны характерные зависимости отношения объемов шара в деформированном состоянии V к объему шара в твердом состоянии v при $l = l_1^*$ (фиг. 3, а) и $l = l_2^*$ (фиг. 3, б) и значениях $\chi = 2$ и $k' = 0,01$; 0,1. На фиг. 2, б, 3, б области отрицательных значений внешнего давления не показаны.

В случае $l = l_1^*$ (т. е. в случае, когда плотность жидкости больше плотности твердого вещества) деформацию шара можно описать следующим образом. Вначале шар состоит из жидкости, которая сжимается под действием внешнего давления, полный объем шара уменьшается (фиг. 3, а, кривые 1). С увеличением давления до величины p_1^V становится возможным образование новой фазы. На поверхности шара образуется твердая корочка, которая с увеличением давления утолщается и при $p_e^V = p_2^V$ весь шар становится твердым. На данном этапе объем шара увеличивается, что связано с тем, что образующаяся твердая фаза занимает больший объем, чем жидкая (кривые 2). При $p_e^V > p_2^V$ объем шара не изменяется, так как твердое

вещество предполагается несжимаемым (кривые 3). Заметим, что в образовавшейся твердой оболочке сразу существуют напряжения, т. е. в терминологии [7] в результате фазового превращения происходит процесс непрерывного наращивания с натягом. Это вызвано тем, что ненапряженное состояние, от которого отсчитываются деформации в определяющем соотношении (4.2), фиксировано заранее.

Деформация шара в случае $l=l_2^*$ (плотность жидкой фазы меньше твердой) происходит совершенно иначе (фиг. 3, б). Для принятых значений k' и κ при $p_e^\sim=0$ существует двухфазное состояние равновесия. С увеличением давления твердая оболочка плавится, количество жидкой фазы увеличивается. Жидкость стремится расширяться, что приводит к растяжению твердой оболочки и увеличению объема шара (кривые 1). Когда внешнее давление достигает значения p_1^\sim , весь шар становится жидким и его объем уменьшается с ростом p_e^\sim (кривые 2).

Отличия процесса деформирования шара при наличии фазового превращения от сжатия шара, заполненного жидкостью, заключаются в следующем. Давление в жидкой фазе постоянно и не зависит от внешнего давления: $p^\sim=p_1^\sim$, изменение внешнего давления компенсируется изменением несущей способности твердой оболочки. Объем шара не является монотонно убывающей функцией внешнего давления p_e^\sim (фиг. 3). Участки возрастания зависимости V от p_e^\sim вызваны изменением толщины твердой оболочки в процессе плавления или кристаллизации (ее уменьшением с ростом внешнего давления при $l=l_2^*$, возрастанием в случае $l=l_1^*$). Отмеченные отличия вызваны специфическими особенностями процесса деформирования шара в условиях фазового перехода.

Рассмотрим теперь случай обратного расположения жидкой и твердой фаз, т. е. когда твердая фаза занимает центральную область шара. Здесь в шаре реализуется однородное гидростатически напряженное состояние, деформация твердой фазы отсутствует. Анализ уравнений равновесия (1.1)–(1.3) приводит к определению скачка плотности при фазовом переходе $l_*=\kappa/(\kappa-1)$. Оказывается, что двухфазное состояние равновесия возможно только при одном значении внешнего давления: $p_e^\sim=k'l_*^*$, причем положение фазовой границы определяется неоднозначно. На диаграмме объем шара – внешнее давление, аналогичной фиг. 3, двухфазное состояние соответствует вертикальному отрезку. Таким образом, в данном случае фазовый переход происходит сразу во всем объеме (так называемое объемное отверждение) в отличие от предыдущего, где происходит фронтальный фазовый переход с четко выделенной границей раздела фаз.

С помощью уравнений (2.1), (2.5), (3.3) исследуем устойчивость найденного решения, определяемого формулами (4.1), (4.5). Ограничимся рассмотрением осесимметричных возмущений

$$w = ue_r + ve_\theta, \quad \xi = \eta(\theta)e_r \quad (4.6)$$

Линеаризованный тензор напряжений Пиолы имеет вид

$$D^* = 2\mu A^* - q^* C^{-T} + q C^{-T} \cdot (\nabla_0 w)^T \cdot C^{-T} \quad (4.7)$$

$$A^* = \chi(e_r e_r - e_\theta e_\theta), \quad \chi = \left(\frac{r^2}{R^2} + \frac{R}{r} \right)^{-1} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) \right)$$

Преобразование уравнений (2.1), (2.5), (3.3) и линеаризованного условия несжимаемости $\nabla \cdot w = 0$ с учетом (4.1)–(4.7) приводит к соотношениям

$$-\frac{R^2}{r^2} \frac{\partial q^*}{\partial r} + 2\mu \frac{1}{r} \left(\chi \operatorname{tg} \theta - \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (4.8)$$

$$-\frac{1}{R} \frac{\partial q^*}{\partial \theta} + 2\mu \left(\frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\chi}{r} \right) = 0$$

$$\frac{R^2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - v \operatorname{tg} \theta + 2u \right) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) - \left(\frac{r^2}{R^2} + \frac{R}{r} \right) \chi = 0$$

$$\left(-q^* + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=b} = 0, \quad \left(\chi + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) \right) \Big|_{r=b} = 0$$

$$\left[-q^* + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} - 2\mu \frac{r^4}{R^4} \frac{d}{dr} \left(\frac{R^2}{r^2} \eta \right) \right] \Big|_{r=a} = 0 \quad (4.9)$$

$$\left[\chi + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) - \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r^3}{R^3} \right) \frac{d\eta}{d\theta} \right] \Big|_{r=a} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - v \operatorname{tg} \theta \right) + \eta \frac{d}{dr} \operatorname{tr} \mathbf{U} = \frac{dF}{d\rho_-} \frac{\rho_-}{2\mu} \quad (4.10)$$

Уравнение (4.10), которое является линеаризованным условием фазового равновесия (3.3), позволяет исключить неизвестную $\eta(\theta)$ из краевых условий (4.9) при $r=a$.

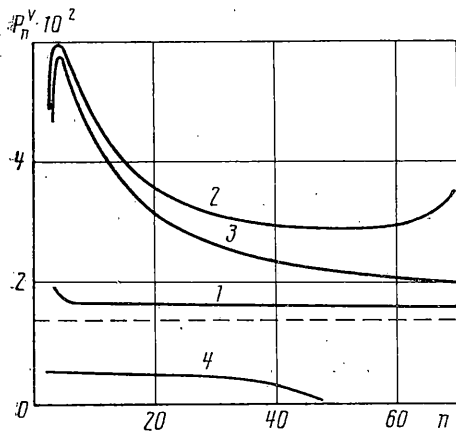
Следуя [1, 14], решение краевой задачи (4.8)–(4.10) ищется в виде разложения по полиномам Лежандра P_n :

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(r) P_n(\sin \theta), \quad v(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(r) P_n'(\sin \theta) \cos \theta,$$

$$q^*(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(r) P_n(\sin \theta), \quad \eta(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n P_n(\sin \theta)$$

Значение $n=1$ соответствует движению шара как жесткого целого и в дальнейшем не рассматриваются. Подставляя это представление в уравнения (4.8)–(4.10), получим линейную однородную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно U_n , V_n , Q_n . Свойства ортогональности полиномов Лежандра приводят к тому, что $V_{\pm} = 0$, а следовательно, и $\rho_{\pm} = p_{\pm} = 0$.

Критические значения внешнего давления определялись численно из условия нетривиальной разрешимости этой краевой задачи. При $l=l^* > 1$ оказалось, что



Фиг. 4

существуют две ограниченные сверху последовательности критических значений внешнего давления p_n' , p_n'' , где $p_n' < p_n''$. Характерные зависимости p_n' , p_n'' от n приведены на фиг. 4 (кривые 1, 2) при $k^* = 0,01$, $\kappa = 2$. Здесь для наглядности функции дискретной переменной n изображены непрерывными линиями. Заметим, что согласно (4.5) толщина оболочки и внешнее давление не являются независимыми переменными. Это означает, что значениям p_n' , p_n'' соответствуют свои значения толщины твердой оболочки шара h_n' , h_n'' ($h = b - a$). Другими словами, в качестве бифуркационного параметра здесь можно выбирать толщину, а соответствующее ей значение внешнего давления определяется из (4.5). Расчеты показали, что с ростом n значения p_n^* стремятся к p_1^* , при этом значения толщины стремятся к нулю. Таким образом, при сколь угодно малой толщине твердой фазы происходит потеря устойчивости шара. С другой стороны,

если в процессе наращивания удалось создать твердую оболочку с толщиной, большей некоторого значения, соответствующего максимальному из всех критических значений p_n' , p_n'' , то при дальнейшем увеличении внешнего давления бифуркация равновесия не происходит.

Для выяснения влияния массообмена на фазовой границе исследована устойчивость состояния равновесия (4.1), (4.5) без учета фазового перехода при возмущении исходного равновесного состояния. В краевых условиях (4.9) функция $\eta = 0$, уравнение (4.10) не рассматривается. Определены критические значения внешнего давления p_n^* . Характерная зависимость p_n^* от n приведена на фиг. 4 (кривая 3).

На фиг. видно, что $p_n^{\sim} < p_n^{*} < p_n^{\sim\sim}$. С ростом n значения $p_n^{\sim\sim}$ стремятся к p_1^{\sim} . Пунктирная линия на фиг. 4 обозначает прямую $p_e^{\sim} = p_1^{\sim}$.

Аналогично исследована устойчивость шара, когда плотность жидкости меньше плотности твердого тела ($l=l_2^*$). В области положительных значений давления лежит конечное число критических давлений p_n^{\sim} . Минимальное из них отлично от нуля и при $k'=0,01$, $\chi=2$ достигается при $n=47$ и равно $0,2733 \cdot 10^{-3}$. Зависимость p_n^{\sim} от n указана на фиг. 4 (кривая 4) при $k'=0,01$, $\chi=2$. Здесь в твердой упругой оболочке действуют растягивающие напряжения, и потери устойчивости без учета фазового перехода не происходит.

Рассмотренная задача о потере устойчивости двухфазного шара позволяет сделать вывод о существенном влиянии фазового перехода на выпучивание нелинейно-упругих тел, что согласуется с выводами работ [9, 10]. Вместе с тем, в отличие от изученной в [10] задачи устойчивости для полупространства, где обнаружен непрерывный спектр критических нагрузок (любые негидростатические напряжения приводят к неустойчивости границы раздела фаз), для двухфазных тел конечных размеров, как установлено выше, число критических нагрузок не более чем счетно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
2. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
3. Пальмов В. А. О напряжениях, возникающих при затвердевании материалов // Инж. ж. МТТ. 1967. № 4. С. 80–85.
4. Гринфельд М. А. Об условиях термодинамического равновесия фаз нелинейно-упругого материала // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251. № 4. С. 824–828.
5. Гринфельд М. А. О двух типах гетерогенных фазовых равновесий // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258. № 3. С. 567–569.
6. Кондуаров В. И., Никулин Л. В. Исследование фазовых переходов первого рода в нелинейно-упругих средах // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 6. С. 49–55.
7. Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д., Наумов В. Э. Механика растущих вязкоупруго-пластических тел. М.: Наука, 1987. 474 с.
8. Gurtin M. E. Two-phase deformations of elastic solids // Arch. Ration. Mech. Analysis. 1983. V. 84. № 1. P. 1–29.
9. Гринфельд М. А. Устойчивость гетерогенного равновесия в системах, содержащих твердые упругие фазы // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265. № 4. С. 836–840.
10. Гринфельд М. А. Неустойчивость границы раздела между негидростатически нагруженным упругим телом и расплавом // Докл. АН СССР. 1986. Т. 290. № 6. С. 1358–1363.
11. Гиббс Дж. В. Термодинамика: Статистическая механика. М.: Наука, 1982. 584 с.
12. Зубов Л. М. Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1982. 143 с.
13. Еремеев В. А. Устойчивость равновесия кристалла со своим расплавом с учетом механических напряжений // Тез. докл. 2-й Всесоюз. конф. «Моделирование роста кристаллов»: Рига: Изд. Латв. ун-та, 1987. С. 420–422.
14. Еремеев В. А., Зубов Л. М. Равновесие и устойчивость нелинейно-упругих тел с полостями, содержащими жидкость // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 3. С. 453–457.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
3.X.1989