

УДК 539.3.01

© 1991 г.

**А. Э. ПУРО**

**ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОТОУПРУГОСТЬ  
ЛИНЕЙНО ДЕФОРМИРУЕМЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБРАЗЦОВ**

Интегральная фотоупругость [1] рассматривает задачу определения напряженного состояния в прозрачном теле по результатам его сквозного просвечивания. В этом смысле интегральную фотоупругость можно рассматривать как оптическую томографию тензорного поля [2]. Ниже решение задачи разыскивается в предположении слабой оптической анизотропии [3, 4] для линейно деформируемого цилиндрического тела. Просвечивание проводится в плоскостях, нормальных образующей цилиндра, что с технической точки зрения является наиболее удобным. Боковая поверхность тела считается свободной от нагрузок. При такой постановке задачи выделяется класс напряженных состояний, позволяющий методом интегральной фотоупругости определить все компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ .

1. В случае слабой оптической анизотропии при просвечивании вдоль луча  $l$  определяются два интеграла [4, 5]:

$$A(m, \theta) = \int m_i m_j \sigma_{ij} - \sigma_{zz} dl, \quad H(m, \theta) = \int m_i \sigma_{iz} dl \quad (1.1)$$

Здесь  $i, j = x, y$  по повторяющимся индексам ведется суммирование,  $m_i$  — компоненты единичного вектора нормального к лучу  $l$   $m_x = \cos \theta$ ,  $m_y = \sin \theta$ ,  $m$  — расстояние от начала координат до прямой  $l$ , ось  $z$  ортогональна плоскости просвечивания (фиг.).

Покажем, что по экспериментально найденным значениям интеграла  $H(m, \theta, z)$  в плоскости  $z = \text{const}$  можно определить в этой плоскости распределение  $\partial/\partial z \sigma_{zz}$ . Для этого рассмотрим условие равновесия элемента  $S(m, \theta)$  толщиной  $\Delta z$  в направлении оси  $z$ . Элемент ограничен частью боковой поверхности тела, а также плоскостью параллельной оси  $z$  и проходящей через луч  $l$ . Так как боковая поверхность тела свободна от нагрузок, то разность сил в направлении  $z$ , действующих на верхней и нижней плоскостях элемента, уравновешивается касательной силой на боковой плоскости, проходящей через луч  $l$ :

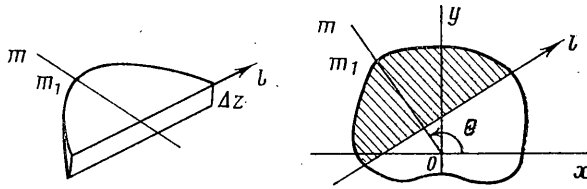
$$\Delta z H(m, \theta, z) \approx \int_m^{m_1} \int [\sigma_{zz}(m', z + \Delta z) - \sigma_{zz}(m', z)] dl dm'$$

Деля обе части этого выражения на  $\Delta z$  и переходя к пределу при  $\Delta z \rightarrow 0$  получаем

$$H(m, \theta, z) = \int_m^{m_1} \int \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz}(m', \theta, z) dl dz \quad (1.2)$$

Дифференцируя обе части (1.2) по  $m$ , окончательно получаем

$$\frac{\partial}{\partial m} H(m, \theta, z) = - \int \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz}(m, \theta, z) dl \quad (1.3)$$



Таким образом определение  $\partial/\partial z \sigma_{zz}$  на основе формулы (1.3) фактически сводится к стандартной процедуре обращения преобразования Радона.

Проекция главного вектора силы сечения  $z=\text{const}$  элемента  $s$  в направлении  $m$  может быть выражена через лучевой интеграл  $H(m, \theta, z)$ :

$$M(m, \theta, z) = \int_s \int_{m_1} \sigma_{zi} m_i dl dm' = \int_m H(m', \theta, z) dm' \quad (1.4)$$

Исходя из условия равновесия элемента  $S$  толщиной  $\Delta z$  в направлении  $m$ :

$$\int \sigma_{ij} m_i m_j dl \approx \frac{1}{\Delta z} [M(m, \theta, z + \Delta z) - M(m, \theta, z)]$$

и переходя в этой формуле к пределу при  $\Delta z \rightarrow 0$ , получаем условие равновесия в дифференциальной форме

$$\frac{\partial}{\partial z} M(m, \theta, z) = \int \sigma_{ij}(m, \theta, z) m_i m_j dl \quad (1.5)$$

С учетом (1.4), (1.5) лучевой интеграл  $A$  сводится к преобразованию Радона от  $\sigma_{zz}$  [6]:

$$\int \sigma_{zz} dl = \int_m \frac{\partial}{\partial z} H(m', \theta, z) dm' - A(m, \theta, z) \quad (1.6)$$

Можно показать, что в (1.6)  $m_1$  — любая из двух крайних точек проекции контура на ось  $m$ . Это следует из условия, что главный вектор силы сечения не зависит от  $z$ .

Таким образом, используя уравнения равновесия и обращая формулы (1.3), (1.6), можно определить  $\sigma_{zz}$  и  $\partial/\partial z \sigma_{zz}$ .

2. Теперь дополнительно предположим, что для образца выполняется закон Гука. Таким образом для нахождения остальных компонент тензора напряжений помимо уравнений равновесия будем использовать уравнения совместности. Для простоты рассмотрение будем вести на примере круглого цилиндра с образующей параллельной оси  $z$ ; боковая поверхность цилиндра свободна от нагрузок. Подчеркнем еще раз, что вновь вводимое условие ортогональности боковой поверхности плоскости просвечивания является дополнительным относительно формул (1.3), (1.6).

Напряжения будем разыскивать в виде суммы: решения первого рода (решения, не содержащего нормального вращения) и решения второго рода [9]. В качестве разрешающих функций будем использовать  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau$ ,  $\Phi$ ,  $N$ . Разрешающие уравнения соответственно равны [10]:

$$\Delta_+ \tau = -\partial/\partial z \sigma \quad (2.1)$$

$$\Delta \Phi = \sigma - \partial \tau / \partial z \quad (2.2)$$

$$\Delta_+ \Phi = (1 - \nu) \partial \tau / \partial z + \nu \sigma \quad (2.3)$$

$$\Delta N = 0 \quad (2.4)$$

Здесь  $\sigma = \sigma_{zz}$ ,  $\nu$  — коэффициент Пуассона

$$\Delta_+ \Phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \Phi$$

Решение будем разыскивать в цилиндрической системе координат  $\rho, \varphi, z$ , причем

$$\sigma_{\rho z} = \frac{\partial \tau}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 N}{\rho \partial \varphi \partial z}, \quad \sigma_{\varphi z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 N}{\rho \partial \rho \partial z} \quad (2.5)$$

$$\sigma_{\rho\rho} = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \Phi - \frac{\partial \tau}{\partial z} + 2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial N}{\partial \varphi} \right] \quad (2.6)$$

$$\sigma_{\rho\varphi} = - \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \Phi + \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] N \quad (2.7)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \Phi - \frac{\partial \tau}{\partial z} - 2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] N \quad (2.8)$$

Разрешающие функции помимо уравнений должны удовлетворять граничным условиям на поверхности цилиндра

$$\sigma_{\rho z} = \sigma_{\rho\varphi} = \sigma_{\rho\rho} = 0 \quad \text{при } \rho = 1 \quad (2.9)$$

Здесь принимается радиус цилиндра за единицу.

Будем предполагать, как и ранее, что просвечивание проводится в параллельных плоскостях  $z = \text{const}$ . Используя формулы (4.3), (4.6), и заменяя в (4.6) производную по  $z$  ее приращением, можно по измерениям в двух близко расположенных плоскостях определить  $\sigma$  и первые две производные по  $z$  от нее  $\sigma_{,z}$ ,  $\sigma_{,zz}$ .

С интересующей нас точки зрения, решения можно разделить на три группы. Однородные решения второго рода, определяемые функцией  $N$ , и удовлетворяющие граничным условиям (2.9). В нашем случае эта группа состоит из одного типа решений — деформации, кручения; только  $\sigma_{\rho\varphi}$ ,  $\sigma_{\varphi z} \neq 0$ . Рассматриваемым методом эти напряжения не обнаруживаются.

Вторая группа — однородные решения первого рода, определяемые функциями  $\sigma, \tau, \Phi$ . По значениям  $\sigma_{,z}, \sigma_{,zz}$  из уравнения (2.1) и граничному условию для  $\sigma_{\rho z}$  (2.9) можно определить  $\tau$  и  $\tau_{,z}$ . Из уравнения (2.3) и граничных условиями для  $\sigma_{\rho\rho}$  и  $\sigma_{\rho\varphi}$  (2.9) можно определить  $\Phi$  и соответственно все компоненты тензора напряжений.

Таким образом, напряжения, обусловленные решением первого рода, определяются таким методом. Напряжения находятся послойно, при этом приходится решать двумерное уравнение Пуассона с соответствующими граничными условиями.

Третий тип однородных решений содержит комбинацию решений первого и второго рода. Для определения  $N$  по граничному условию (2.9) необходимо, чтобы это условие выполнялось на некотором отрезке высоты  $h$ . То есть, в этом случае однородные решения не определяются послойно. Определив значение  $\sigma_{zz}$  в объеме цилиндра высотой  $h$ , используя три уравнения (2.1), (2.3), (2.4) и три граничных условия для трех функций, можно в принципе определить все направления этого типа решения.

В этом случае сталкиваемся с относительно трудной для числовой реализации проблемой разложения  $\sigma_{zz}(z, \rho, \varphi)$  по однородным решениям [11]. Не останавливаясь более подробно на этом случае, рассмотрим более подробно алгоритм нахождения напряжений решения первого рода.

3. Решение первого рода полностью определяется функциями  $\sigma, \tau, \Phi$  и их производными.

Если  $\tau$  и  $\tau_{,z}$  находятся как решение (2.1) с граничным условием  $\sigma_{\rho z}(1, z) = 0$  при любых значениях  $\sigma_{,z}$  и  $\sigma_{,zz}$  соответственно, то относительно  $\Phi$  имеем два граничных условия  $\sigma_{\rho\rho}(1, z) = \sigma_{\rho\varphi}(1, z) = 0$ , которые накладывают ограничения на правую часть уравнения (2.3) и, в конечном счете, на функции  $\sigma$  и  $\sigma_{,zz}$ .

В случае круглого цилиндра эту зависимость можно получить в явном виде. Рассмотрение далее будем вести в виде разложения решения по угловым гармоникам

$$\sigma, \tau, \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(\rho), \quad \tau_n(\rho), \quad \Phi_n(\rho) (\cos n\varphi, \sin n\varphi)$$

Граничные условия относительно  $\sigma_{\rho\rho}$ ,  $\sigma_{\rho\varphi}$  соответственно принимают вид

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \Phi_n |_{\rho=1}, \quad \Phi_n(1-n^2) = \frac{\partial}{\partial z} \tau_n |_{\rho=1} \quad (3.1)$$

Разрешающие уравнения (2.1), (2.3) относительно функций  $\tau_n(\rho)$ ,  $\Phi_n(\rho)$  имеют одинаковый вид

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \right) V_n(\rho, z) = f_n(\rho, z) \quad (3.2)$$

где через  $f_n(\rho, z)$  обозначены угловые гармоники правых частей уравнений (2.1), (2.3).

Исходя из регулярности  $f_n(\rho)$ ,  $V_n(\rho)$  в нуле, постоянная  $C_2$  в решении уравнения (3.2):

$$V_n(\rho) = \frac{1}{2n} \left\{ \rho^n \left[ C_1 + \int_0^1 f_n(t) t^{1-n} dt \right] + \rho^{-n} \left[ C_2 + \int_0^{\rho} f_n(t) t^{n+1} dt \right] \right\} \quad (3.3)$$

выбирается равной нулю. Постоянная  $C_1$  определяется для  $\tau_n(\rho)$  и  $\Phi_n(\rho)$  граничными условиями (2.9):

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \tau_n(1, z) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \rho} \Phi_n(1, z) - \frac{1}{\rho} \Phi_n(1, z) = 0 \quad (3.4)$$

Значение этой постоянной  $C_{11}$  (для функции  $\tau_n(\rho)$ ),  $C_{12}$  (для функции  $\Phi_n(\rho)$ ) соответственно равно

$$C_{11} = \int_0^1 f_n(t) t^{n+1} dt; \quad C_{12} = \frac{n+1}{n-1} \int_0^1 f_n(t) t^{n+1} dt \quad (3.5)$$

Так полученное решение  $\Phi_n$  удовлетворяет только первому условию (3.1), второе условие накладывает ограничения на правую часть уравнения

$$\int_0^1 \left[ (1-\nu) \frac{\partial}{\partial z} \tau_n(\rho, z) - \nu \sigma_n(\rho, z) \right] \rho^{n+1} d\rho = \frac{1}{n+1} \tau_n(1, z) \quad (3.6)$$

Выражая  $\partial/\partial z \tau$  посредством  $\partial^2/\partial z^2 \sigma_n$ , это условие можно также записать в виде

$$\int_0^1 \left\{ \nu \sigma_n + \frac{1}{4(n+1)} \left[ \frac{(1-\nu)(n+2)-4}{n} - (1-\nu)\rho^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sigma_n \right\} \rho^{n+1} d\rho = 0 \quad (3.7)$$

Полученные условия справедливы при  $n > 1$ , случаи  $n = 0, 1$  требуют особого рассмотрения.

При  $n = 1$  второе условие (3.1) переходит в условие относительно  $\partial/\partial z \tau_1$  и накладывает ограничение на  $\partial^2/\partial z^2 \sigma_1$ :

$$\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sigma_1 \rho^2 d\rho = 0 \quad (3.8)$$

В этом случае первое условие (3.1) также накладывает ограничение, которое выражается формулой (3.6) при  $n = 1$  и  $\tau_1(1, z) = 0$ , условие (3.7) в этом случае заменяется на

$$\int_0^1 \left[ \nu \sigma_1(\rho, z) - \frac{(1-\nu)}{8} \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sigma_1(\rho, z) \right] \rho^2 d\rho = 0. \quad (3.9)$$

Таким образом для случая  $n = 1$  имеем два интегральных условия (3.8), (3.9) на определяемые из измерений величины. Интересно отметить, что напряжение  $\sigma_{zz} = (h-z)\rho \cos \varphi$ , соответствующее известному решению изгиба круглой консоли [11], удовлетворяет (3.8) и не удовлетворяет (3.9), так как содержит решение второго рода, зацепляющееся с решением первого рода граничными условиями.

Рассмотрим более подробно случай осесимметричной деформации ( $n = 0$ ). В этом случае  $\sigma_{\varphi\varphi} = 0$  тождественно и из трех граничных условий (2.9) существенными остаются только два. Вместе с тем уравнения относительно  $\partial/\partial \rho \tau_0$ ,  $\partial/\partial \rho \Phi_0$  допускают понижение порядка, так как ни в уравнении, ни в разыскиваемые величины (2.6), (2.8)  $\tau_0$ ,  $\Phi_0$  не входят. Поэтому уже единственное граничное условие (3.4) относительно  $\tau_0$  на решение

$$\sigma_{\rho z} = \frac{\partial \tau_0}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \int_0^1 t \frac{\partial}{\partial z} \sigma_0(t, z) dt \quad (3.10)$$

накладывает интегральное ограничение

$$\sigma_{\rho z}(1, z) = -\int_0^1 t \frac{\partial}{\partial z} \sigma_0(t, z) dt = 0 \quad (3.11)$$

выражающее закон сохранения главного вектора силы в направлении оси  $z$ .

Определив значение  $\partial/\partial \rho \Phi_0$  и подставив в (2.6), получим

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{1}{\rho^2} \int_0^{\rho} t \left[ \nu \sigma_0(t, z) + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial z} \tau_0(t, z) \right] dt - \frac{\partial \tau_0}{\partial z}(\rho, z)$$

Граничное условие (3.4) определяет  $\frac{\partial}{\partial z} \tau_0(\rho, z)$  с точностью до слагаемого  $\partial/\partial z \tau_0(0, z)$ :

$$\frac{\partial}{\partial z} \tau_0(\rho, z) = \int_0^{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{\rho z}(t, z) dt + \frac{\partial}{\partial z} \tau_0(0, z) = \frac{\partial}{\partial z} \tau_{00}(\rho, z) + \frac{\partial}{\partial z} \tau_0(0, z)$$

Значение этого слагаемого определяется граничным условием  $\sigma_{pp}(1, z) = 0$

$$\frac{\partial \tau_0}{\partial z}(0, z) = \frac{2}{(1-\nu)} \left[ \int_0^1 t \left[ \nu \sigma_0(t, z) + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial z} \tau_{00}(t, z) \right] dt - \frac{\partial \tau_{00}}{\partial z}(1, z) \right]$$

Значение  $\sigma_{pp}$ , ради краткости изложения, здесь не приводится.

Формулы, определяющие напряжения осесимметричного состояния по  $\sigma_0(\rho, z)$ , ранее другим методом были получены в [12]. Они не нашли применения в работах по интегральной фотоупругости [13, 14], где решение разыскивалось в рядах, в неявном виде.

Таким образом в случае  $n=0$  имеется единственное интегральное ограничение (3.11), являющееся условием макростатики [14].

4. Для определения угловых гармоник  $\sigma_n, \tau_n$  из значений лучевых интегралов  $A(m, \theta), H(m, \theta)$  проще всего воспользоваться алгоритмом Кормака [15] и эти интегралы разложить тоже по угловым гармоникам  $A_n(m), H_n(m)$ . Исходя из выражения (1.6) приходим к стандартному преобразованию Кормака относительно  $\sigma_n(\rho)$ :

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_m^1 H_n(m_1) dm_1 - A_n(m) = 2 \int_m^1 \frac{\sigma_n(\rho) T_n(m/\rho)}{(\rho^2 - m^2)^{1/2}} \rho d\rho \quad (4.1)$$

где  $T_n(x)$  — многочлен Чебышева первого рода.

Для определения  $\sigma_n(\rho)$  из (4.1) можно применить стандартные методы: разложение  $\sigma_n(\rho)$  по полиномам Цернике, по функциям Бесселя, использование формулы обращения преобразования Кормака с соответствующей регуляризацией. Наличие в правой части (4.1) интеграла от  $H_n(m)$  не затрудняет использования всех этих методов. Так при использовании разложения  $\sigma_n(\rho)$  в ряд по полиномам Цернике  $R_n^k(\rho)$  [15]:

$$\sigma_n(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} (n+2k+1) a_n^k R_n^k(\rho)$$

коэффициенты разложения определяются интегралами

$$a_n^k = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[ H_n(m) \int_{-1}^m U_{n+2k}(m_1) dm_1 - A_n(m) U_{n+2k}(m) \right] dm$$

Здесь  $U_n(m)$  — многочлен Чебышева второго рода.

Теперь рассмотрим некоторые алгоритмы определения  $\tau_n(\rho)$  по значениям  $H_n(m)$ . Применение алгоритма Кормака к (1.3) определяет разрешающее уравнение относительно  $\partial/\partial z \sigma_n(\rho, z)$ :

$$\frac{\partial}{\partial m} H_n(m) = -2 \int_m^1 \frac{\partial}{\partial z} \sigma_n(\rho, z) \frac{T_n(m/\rho)}{(\rho^2 - m^2)^{1/2}} \rho d\rho \quad (4.2)$$

Используя обратные преобразования Кормака

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_n(\rho, z) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\rho} \left[ \rho \int_{\rho}^1 \frac{T_n(m/\rho)}{(m^2 - \rho^2)^{1/2} m} \frac{\partial}{\partial m} H_n(m) dm \right] \quad (4.3)$$

уравнение (3.2) и граничное условие (3.4), можно получить формулу обращения

$$\tau_n(\rho) = -\frac{2^{n-1}}{\pi} (\rho^n + \rho^{-n}) \int_0^1 H_n(m) m^{n-1} dm - \frac{1}{\pi} \int_{\rho}^1 \frac{H_n(m) T_n(m/\rho)}{(m^2 - \rho^2)^{1/2}} dm \quad (4.4)$$

Один из возможных способов получения (4.4) — подстановка (4.3) в (3.3) и упрощение получившегося выражения. Непосредственное вычисление  $\tau_n(\rho)$  по формуле (4.4) вызывает известные трудности, как и непосредственное применение обращения Кормака. Кроме того оба слагаемых в (4.4) имеют особенности в нуле.

Можно показать, используя свойства функции  $H_n(m)$ , что эти особенности в нуле взаимно уничтожаются. При численном же использовании (4.4) погрешности  $H_n(m)$  в этом случае ведут к неустойчивости счета.

Для численного определения  $\tau_n(\rho)$ , как и в предыдущем случае, можно воспользоваться разложением  $\partial/\partial z \sigma_n$  в ряд по полиномам Цернике  $R_n^k(\rho)$ . Подставляя  $R_n^k(\rho)$  в (3.3), получим новую систему линейнонезависимых полиномов  $T_n^k(\rho)$ . Коэффициент разложения

$$\tau_n(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} (n+2k+1) b_n^k T_n^k(\rho)$$

с учетом (4.2) определяется интегралом

$$b_n^k = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_n(m) \frac{d}{dm} U_{(n+2k)}(m) dm$$

В заключение сделаем замечание общего характера. Для определения всех компонент тензора напряжений использовались два независимых предположения: 1) отсутствие нормального вращения; 2) выполнение закона Гука.

В общем случае, используя подстановку (2.5) и учитывая граничные условия на свободной боковой поверхности, интеграл  $H(m, \theta)$  (1.2) можно преобразовать к виду

$$H(m, \theta) = \int \frac{\partial}{\partial m} \tau(\rho, \theta) dm \quad (4.5)$$

Для определения  $\tau$  по значениям  $H(m, \theta)$  (4.5) необходимо дополнительно задать граничные условия для  $\tau$  на контуре. Если нормальное вращение отсутствует ( $N=0$ ),  $\tau$  определяется по значениям  $H(m, \theta)$  (4.5) и определяются соответственно  $\sigma_{\rho z}$ ,  $\sigma_{\rho\rho}$ . Для определения остальных компонент дополнительно используется уравнение (2.3) (уравнение совместности). Можно было бы использовать и другие законы состояния для определения  $\sigma_{\rho\rho}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$ .

Например, осесимметричная деформация становится статически определенной, если вместо закона Гука использовать условие текучести Мизеса  $(\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{\rho\rho})^2 + 6\sigma_{\rho z}^2 = \text{const}$ .

Другой вопрос, что такое предположение имеет малую практическую ценность из-за трудности получения фотопластических материалов.

Второе замечание касается возможности использовать полученное решение для проверки справедливости использования интегралов (1.1). Дело в том, что соотношения являются приближенными, поэтому прямой подстановкой полученных напряжений в уравнения фотоупругости [1] можно определить характеристические величины и сравнить с эксперимен-

тально найденными результатами. В свою очередь, полученную разность можно использовать для итерационного процесса. Такой алгоритм по сути совпадает с методом Ньютона решения операторных уравнений.

Автор признателен Х. К. Абену за проявленное внимание к работе и обсуждение результатов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абен Х. К. Интегральная фотоупругость. Таллинн: Валгус, 1975. 218 с.
2. Aven N. K. Integrated photoelasticity as tensor field tomography // Proc. Intern. Sympos. on Photoelasticity. Tokyo, 1986. P. 243-250.
3. Leray J., Scheibling G. Composition des birefringences: Cas de milieux de faible anisotropie optique // J. Chem. Phys. et Phys.-Chim. Biol. 1961. V. 58. No. 9. P. 797-802.
4. Aven N. K., Josephson J. I., Kell-J. E. The cas of weak birefringence in integrated photoelasticity // Optics and lasers in engineering. 1989. V. 11. No. 2. P. 145-157.
5. Абен Х. К., Индурм С. И., Иосепсон Ю. И., Келл К.-Ю. Э. Случай слабой оптической анизотропии в статической томографии тензорного поля // Тез. докл. Всесоюз. семинара «Оптическая томография». Таллинн, 1988. С. 7-10.
6. Пуро А. Э. Томография при слабой оптической анизотропии // Тез. докл. 4-го Всесоюз. симпоз. по вычисл. томографии. Ташкент, 1989. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1989. Т. 1. С. 36-37.
7. Шарафутдинов В. А. О двух новых типах ядер свертки, возникающих в томографии фотоупругих сред // Тез. докл. 4-го Всесоюз. симпоз. по вычисл. томографии. Ташкент, 1989. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1989. С. 50-51.
8. Шарафутдинов В. А. О методе интегральной фотоупругости в случае слабой статической анизотропии // Изв. АН ЭССР. Физика. Математика. 1989. Т. 38. № 4. С. 379-382.
9. Гутман С. Г. Общее решение задач теории упругости в обобщенных цилиндрических координатах // Известия ВНИИГ им. Веденеева. 1948. Т. 37. С. 89-101.
10. Пуро А. Э. Разделение уравнений теории упругости неоднородных тел // Изв. АН ЭССР. Физика. Математика, 1989. Т. 38. Вып. 4. С. 372-378.
11. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
12. Чумак А. В. К решению осесимметричных задач теории упругости // Сб. науч. тр. Моск. ин-та инж. с.-х. производства. 1975. Т. 12. Вып. 7. С. 122-124.
13. Doyle J. E., Danylyk H. T. Integrated photoelasticity for axisymmetric problems // Exper. Mech. 1978. V. 18. No. 6. P. 215-220.
14. Aven H. Tomographie optique des champs de contraintes // Rev. Franç. Мéc. 1989. No. 1. P. 121-130.
15. Cormak A. M. Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications // J. Appl. Phys. 1964. V. 35. No. 10. P. 2908-2913.

Таллинн

Поступила в редакцию  
11.IV.1990