МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1991

УДК 531.31

А. П. БЛИНОВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Выделен класс гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, содержащих угловую координату и допускающих интерпретацию движения в виде движения материальной точки на плоскости. Требуемая редукция задачи проводится с сохранением смысла угловой координаты, что позволяет применить критерий Уиттекера [1] для решения вопроса о существовании периодических движений системы как либрационного так и ротационного типов.

Предложенный подход применен к доказательству существования периодических движений твердого тела типа гантели вблизи от притягивающего центра.

1. Рассмотрим динамическую систему с двумя степенями свободы, представимую функцией Рауса в следующем (безразмерном) виде

$$R_*=a_{11}(r)\dot{r}^2+a_{22}(r)\dot{\varphi}^2+a_1(r,\ \varphi)\dot{r}+a_2(r,\ \varphi)\dot{\varphi}+u(r,\ \varphi) \tag{1.1}$$

где координата φ угловая, а $r\geqslant 0$; $u(r,\ \varphi)$ — приведенная силовая функция. Предполагается, что R_* аналитическая функция обобщенных координат r, φ в области возможности движения за исключением, быть может, изолированных особых точек. К системам такого вида относятся, например, системы рассмотренные в [2], [3].

Указанную систему можно преобразовать в систему, описывающую движение материальной точки на плоскости под действием потенциальных и гироскопических сил. Действительно, определим новую переменную ρ соотношением

$$\rho^2=\lambda^2(r)\,a_{22}(r) \tag{1.2}$$

в котором функция $\lambda^2(r)$ удовлетворяет условию $\dot{\rho}^2=\lambda^2(r)a_{11}(r)\dot{r}^2$. Тогда $\dot{\rho}/\rho=\sqrt{a_{11}/a_{22}}\dot{r}$ или

$$\rho=c_0\exp\left(\int\sqrt{a_{11}/a_{22}}\,dr\right),\qquad (\lambda^2=\rho^2/a_{22}) \tag{1.3}$$

где постоянная c_0 выбирается из соображений удобства представления (1.3) для конкретной системы.

После перехода к новому времени τ по формуле $dt=\lambda^2[r(\rho)]d\tau$ с нулевым значением постоянной энергии [4] функция Рауса и уравнения движения примут вид

$$R=\rho'^2+\rho^2\varphi'^2+a_3\rho'+a_4\varphi'+U(\rho,\ \varphi),\ (\rho'=d\rho/d\tau) \tag{1.4}$$

$$\rho''-\rho\varphi'^2-a_5\varphi'-{}^1/_2\partial U/\partial\rho=0 \tag{1.5}$$

$$\rho\varphi''+2\rho'\varphi'+a_5\rho'/\rho-{}^1/_2\rho^{-1}\partial U/\partial\varphi=0$$

$$a_3=\lambda^2a_1,\ a_4=\lambda^2a_2,\ a_5={}^1/_2(\partial a_3/\partial\rho-\partial a_4/\partial\varphi)$$

$$U=\lambda^2(u+h),\ h=\text{const}$$

В декартовых координатах $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ система (1.5) принимает вид

$$x''-a_5y'(x^2+y^2)^{-1/2}-{}^1/_2\partial U/\partial x=0 \quad (1.6)$$

$$y''+a_5x'(x^2+y^2)^{-1/2}-{}^1/_2\partial U/\partial y=0$$

Она допускает интеграл Якоби $x'^2+y'^2=U$. Уравнения (1.6) или (1.5) можно трактовать как уравнения движения материальной точки на плоскости под действием консервативных и гироскопических сил. При $a_5=0$ к этим уравнениям можно применить критерий Уиттекера [1] о существовании замкнутых траекторий в некоторых кольцевых областях координатной плоскости, соответствующих периодическим движениям системы.

Заметим, что движение системы (1.1) допускает также интерпретацию в виде движения тяжелой точки на плоскости посредством перехода к изотермическим координатам. Однако, при этом теряется специфика угловой координаты и для определения периодических движений ротационного типа нельзя применить критерий Уиттекера.

Выражение, определяющее неравенства для критерия Уиттекера применительно к системе (1.5) для кругового контура с центром в начале координат радиуса ρ принимает вид

$$D(\rho,\ \varphi)=U(\rho,\ \varphi)+{}^1/_2\rho\partial U/\partial\rho \quad (1.7)$$

Для существования замкнутой траектории Γ_0, соответствующей периодическому движению системы (1.5) в кольце $0<\rho_*<\rho<\rho^*$ согласно указанному критерию, необходимо и достаточно чтобы выполнялись неравенства

$$D(\rho_*,\ \varphi)<0<D(\rho^*,\ \varphi) \quad (1.8)$$

(при некотором значении постоянной энергии h, допускаемым выбранным кольцом).

Поскольку могут интересовать замкнутые траектории в кольцевых областях с центрами отличными от точки $\rho=0$, то полезно переформулировать критерий и для таких областей. (Предполагаем, что особые точки могут быть только в центрах этих колец.)

Пусть нас интересует кольцевая область Ω_0 с центром в точке $\rho=a_0$, $\varphi=\varphi_0$. Без ограничения общности положим $\varphi_0=0$. Введем новые полярные координаты q, ψ с центром в указанной точке так, что $\psi=0$ при $\varphi=0$. Тогда имеет место связь между старыми и новыми координатами

$$q=(a_0^2+\rho^2-2a_0\rho\cos\varphi)^{1/2},\quad \rho=(a_0^2+q^2+2a_0q\cos\psi)^{1/2} \quad (1.9)$$

$$\sin\psi=\rho\sin\varphi/q,\quad \sin\varphi=q\sin\psi/\rho$$

$$\cos\psi=(a_0-\rho\cos\varphi)/q,\ \cos\varphi=(a_0+q\cos\psi)/\rho$$

В новых координатах для кругового контура радиуса q выражение D (которое теперь обозначим D_a) и критерий для кольцевой области $q_*<q<q^*$ принимает вид

$$D_a=\left(\lambda^2+q\frac{d\lambda}{dr}\frac{\partial\rho}{\partial q}\right)(u+h)+\frac{1}{2}q\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial\rho}{\partial q}+\lambda^2\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right) \quad (1.10)$$

$$D_a(q_*,\ \psi)<0<D_a(q^*,\ \psi) \quad (1.11)$$

2. Установив существование периодического движения системы (1.1) при $a_1=0$, $a_2=0$, выясним когда оно будет порождающим периодическим решениям для (4.1) при $a_1\neq0$, $a_2\neq0$.

Функции Рауса (1.1) соответствует функция Гамильтона

$$H_* = \frac{1}{4a_{11}} (p_1-a_1)^2 + \frac{1}{4a_{22}} (p_2-a_2)^2 - u(r, \varphi) \qquad (2.1)$$

где p_1, p_2 — обобщенные импульсы, соответствующие r, φ.

В гамильтониане (2.1) произведем каноническое контактное преобразование координат по формулам

$$r = (a^2+Q^2+2aQ\cos\Psi)^{1/2}, \qquad \varphi = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{Q\sin\Psi}{a+Q\sin\Psi+r} \qquad (2.2)$$

$$(\sin\varphi = Q\sin\Psi/r,\ \cos\varphi = (a+Q\cos\Psi)/r)$$

$$Q = (a^2+r^2-2ar\cos\varphi)^{1/2}, \qquad \Psi = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{r\sin\varphi}{a-r\sin\varphi+Q}$$

$$(\sin\Psi = r\sin\varphi/Q,\ \cos\Psi = (a-r\cos\varphi)/Q$$

При этом, прежние импульсы p_1, p_2 следует выразить через новые p, v по формулам

$$p_1 = [(Q+a\cos\Psi)/r]p + [2aQ(1-\cos\Psi)\sin\Psi/(rg)]v$$

$$p_2 = (a\sin\Psi)p + \{2[a^2+(a+Q)Q\cos\Psi + aQ\cos^2\Psi]/g\}v$$

$$g = a^2 - 2aQ(1-\sin\Psi) + Q^2(1-2\sin\Psi+2\sin^2\Psi)$$

Новый гамильтониан принимает вид

$$H = b_{11}p^2 + b_{12}pv + b_{22}v^2 + b_1p + b_2v + u \qquad (2.3)$$

В процессе проведенных преобразований кольцевая область Ω_0 отобразится диффеоморфно в кольцевую область Ω, охватывающую начало координат в плоскости переменных Q, Ψ.

Произведем изоэнергетическую редукцию задачи на фиксированном ранее (в п. 1) уровне энергии, разрешив уравнение $H=0$ относительно импульса v [5]:

$$v = -K,\quad K = l_2 \pm \sqrt{l_2^2 - l_3},\quad l_2 = l_2(Q, \Psi, p),\quad l_3 = l_3(Q, \Psi, p, h) \qquad (2.4)$$

Выбор знака перед радикалом определяется начальными условиями, соответствующими выбранному направлению обхода замкнутой траектории Γ_0 в Ω_0 (при $a_1=0$, $a_2=0$). Координата траектории Γ_0 тяжелой точки для кольца Ω_0, лежащего в достаточно малой окрестности притягивающего центра, является однозначной функцией угла ψ.

В нелокальном случае будем требовать знакопостоянство производной $d\psi/dt$ в кольце Ω_0 ($d\psi/dt = \partial H_{**}/\partial v_{**}$, где H_{**} — гамильтониан соответствующий функции Рауса R_* после перехода к координатам q, ψ, а v_{**} — обобщенный импульс, соответствующий координате ψ). Тогда, учитывая, что

$$\Psi = \Psi\{r[\rho(q(\psi), \psi], \varphi[q(\psi), \psi]\} \qquad (2.5)$$

является сложной функцией от ψ, можем записать

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{d\Psi}{d\psi}\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\Psi}{d\psi}\frac{d\psi}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \lambda^2 \frac{d\psi}{d\tau}\frac{d\Psi}{d\psi}$$

Здесь первые два сомножителя знакопостоянны. Последний сомножитель также знакопостоянен ввиду взаимной однозначности отображения (2.5). Следовательно, в указанном периодическом движении угол Ψ является монотонной функцией времени. Поэтому, переходя к уравнениям Уиттекера [5]:

$$dQ/d\Psi = \partial K/\partial p,\quad dp/d\Psi = -\partial K/\partial Q \qquad (2.6)$$

можно заменить исследование T — периодических движений системы (1.1) (при $a_1 \equiv 0$, $a_2 \equiv 0$) исследованием 2π — периодических движений системы (2.6) по углу Ψ. После определения 2π — периодического решения системы (2.6) по формуле (2.4) находится импульс v и временной период T по формуле $T=\int\limits_0^{2\pi}(\partial H/\partial v)^{-1}\,d\Psi$.

В этом есть упрощение задачи фактического определения периодического движения, особенно, если правая часть (2.6) содержит малый параметр в виде сомножителя [6]. Используя теоремы гл. 6 [6], можно исследовать периодические движения системы (2.6) и в случае, когда коэффициенты a_1, a_2 в области возможности движения малы по модулю. Если в точке $Q=0$ правые части (2.6) имеют особенность, с точки зрения теории аналитических функций, то замена переменной $Q=Q_0+u$, где $Q_0={}^1/_2(Q^*+Q_*)$, а Q_* и Q^* — расстояния от точки $Q=0$ соответственно до области Ω и до самой удаленной точки области Ω, обеспечит аналитичность правых частей (2.6) относительно u при $|u|<{}^1/_2(Q^*-Q_*)$.

3. Применим изложенное к доказательству существования периодических движений твердого тела типа гантели в центральном поле сил вблизи от притягивающего центра. (Существование периодических движений гантели либрационного и ротационного типа вдали от притягивающего центра было показано в работе [3].)

Функция Рауса такой системы [3] после перехода к безразмерным величинам $\bar{t}=t_*t$, $\bar{r}=r/a$, $\bar{b}=t_*b/m$, $\bar{\mu}=\mu t_*^2/a^2$ (t_* — единица времени, $2a$, $2m$ — длина и масса гантели, μ — постоянная тяготения) и сохранения прежних обозначений имеет вид

$$R=r^{\cdot 2}+r^2(1+r^2)^{-1}\varphi^{\cdot 2}+b(1+r^2)^{-1}\varphi^{\cdot}-b^2/[4(1+r^2)]+u \tag{3.1}$$

$$b=2[(1+r^2)\alpha^{\cdot}+\varphi^{\cdot}]$$

$$u=\mu[(1+r^2+2r\cos\varphi)^{-1/2}+(1+r^2-2r\cos\varphi)^{-1/2}]-b^2/[4(1+r^2)]$$

где b — циклический интеграл, α — угловая координата центра масс гантели, φ — угол, характеризующий отклонение продольной оси гантели от направления текущего радиуса — вектора центра масс гантели r.

После перехода к новым переменным ρ и τ по формулам (1.3) и $dt=\lambda^2[r(\rho)]d\tau$, где $a_{22}=r^2/(1+r^2)$ уравнения движения соответствующей материальной точки на плоскости примут вид (1.5) или (1.6), где $a_5= =-b\rho(r\lambda-\rho)/(\lambda r^3)$, $(U=\lambda^2(u+h)$, $\lambda^2=\rho^2/a_{22})$, а величина r определяется из выражения

$$\rho=r\exp\sqrt{1+r^2}/(1+\sqrt{1+r^2}) \tag{3.2}$$

Область возможности движения гантели [7] лежит в круге радиуса r_b, определяемого из уравнений $\mu r/(r^2-1)-b^2/[4(r^2+1)]=-h$ для $r>a$; $\mu/(1-r^2)-b^2/[4(1+r^2)]=-h$ для $r<a$. Далее положим интеграл площадей равным нулю ($b=0$ или $a_1\equiv 0$, $a_2\equiv 0$).

Проверка показывает, что кольцевой области, удовлетворяющей критерию (1.8) в малой окрестности точки $\rho=0$ нет.

Проверим наличие кольцевой области с центром в особой точке $\rho=a_0=e^{\sqrt{2}}/(1+\sqrt{2})$, $\varphi=0$ ($r=1$, $\varphi=0$), удовлетворяющей критерию (1.11) (после перехода к координатам q, ψ).

В окрестности указанной точки

$$\rho=a_0+q\cos\psi+[q^2/(2a_0)]\sin^2\psi+o(q^2)$$

$$r=1+g_5(\cos\psi)q+(g_6\sin^2\psi+g_7\cos^2\psi)q^2+o(q^2)$$

$$\cos\varphi = 1 - [q^2/(2a_0^2)]\sin^2\psi + o(q^2)$$
$$g_5 = g_3/(2g_8),\; g_6 = g_3/(4a_0g_8),\; g_7 = -g_3^2/(8g_8^3)$$
$$g_3 = 1/\rho_{2a},\; g_2 = g_1^2 - a_0/\rho_{2a},\; g_1 = -\rho_{1a}/(2\rho_{2a})$$
$$g_8 = \sqrt{g_2 + a_0g_3},\; \rho_{1a} = a_0(4+2\sqrt{2})/(1+\sqrt{2}),\; \rho_{2a} = a_0(13+9\sqrt{2})/4 \tag{3.3}$$
$$D_a = (b_{11} + b_{12}q)(h + b_{21} + b_{22}q + b_{23}/q) + $$
$$+ (b_{31} + b_{32}q + b_{33}/q) + o(q)$$
$$b_{11} = 2a_0^2, \qquad b_{12} = 2a_0(2 - a_0g_5)\cos\psi + \sqrt{2}\,\frac{3+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\,e^{\sqrt{2}}\cos\psi$$
$$b_{21} = 0{,}5,\; b_{22} = -0{,}25g_5\cos\psi,\; b_{23} = 1/b_{24}$$
$$b_{24} = (g_5^2\cos^2\psi - a_0^{-2}\sin^2\psi)^{1/2}$$
$$b_{31} = 0{,}5b_{23}^3[\lambda_0b_{41}\bar b_{32} + \lambda_0^2b_{52}b_{61} + (\lambda_0b_{42} + \lambda_1b_{41})\bar b_{33} + \lambda_0(\lambda_0b_{62} + 2\lambda_1b_{61})b_{53}]$$
$$b_{32} = 0{,}5[-0{,}25\lambda_0b_{41} + (\lambda_0b_{42} + \lambda_1b_{41})\bar b_{32}b_{23}^3 +$$
$$+ \lambda_0(\lambda_0b_{62} + 2\lambda_1b_{61})b_{52}b_{23}^3]$$
$$b_{33} = 0{,}5\lambda_0b_{23}^3(b_{41}\bar b_{33} + \lambda_0b_{53}b_{61})$$
$$\bar b_{32} = -(g_6 + 0{,}5a_0^{-2})\sin^2\psi - g_7\cos^2\psi$$
$$\bar b_{33} = -g_5\cos\psi,\; b_{52} = (0{,}5g_5\sin 2\psi + \sin\psi)/a_0$$
$$b_{41} = 2\cos\psi,\; b_{53} = a_0^{-1}\sin\psi$$
$$b_{42} = -a_0^{-1}\cos 2\psi,\; b_{61} = -a_0^{-1}\sin\psi,\; b_{62} = a_0^{-2}\sin 2\psi$$

При достаточно малом значении h, область возможности движения будет лежать внутри окружности радиуса $q = q^* < a_0$.

Чтобы исключить случай попадания материальной точки в притягивающий центр, положим

$$h + u(q^*, 0) = h_0 > 0,\; u(q^*, 0) = {}^1/_2 - {}^1/_4g_5q^* + 1/(g_5q^*) - o(q^*)$$

Значение h_0 выберем таким, чтобы на отмеченной окружности выполнялось неравенство $D_a(q^*, \psi) > 0$.

Заметив, что сомножитель $[h + b_{21} + b_{22}(1+q) + b_{23}/q + o(q)]$ в (3.3) равен $[u(q_0, \psi) - u(q_0, 0) + h_0]$, например, при $q^* = 0{,}1$ получим $D_a(q^*, \psi) > > 0$, если $h_0 = 170$.

При $q \to 0$ получим $D_a \to (2a_0^2/0{,}21 - (1 + \sin^2\psi)/0{,}0185)/(q\sqrt{1 + 0{,}3\sin^2\psi})$. Например, при $q = q_* = 0{,}02$ получим $D_a(q_*, \psi) < 0$. Таким образом, критерий Уиттекера (1.11) выполняется в кольце $q_* = 0{,}02$, $q^* = 0{,}1$.

Из выражения (3.3) видно, что в любой достаточно малой окрестности точки $q = 0$ при некоторых значениях h_0 существуют кольцевые области, удовлетворяющие (1.11).

Автор благодарит В. В. Румянцева за обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. М.– Л.: 1937. 500 с.
2. *Румянцев В. В.* Об устойчивости гироскопа в кардановом подвесе // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 3. С. 374–378.
3. *Блинов А. П.* О движении гантели в центральном поле сил // МТТ. 1988. № 4. С. 37–42.
4. *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. М.– Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.
6. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
7. *Окунев Ю. М.* О возможных движениях длинной гантели в центральном поле сил // Космич. исслед. 1969. Т. 7. № 5. С. 637–642.

Москва

Поступила в редакцию 21.V.1990