МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1991

УДК 539.3.01

С. Е. МИХАЙЛОВ

АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ВБЛИЗИ УГЛОВ ПРИ ЗАДАННЫХ НЕ ГРАНИЦЕ СМЕЩЕНИЯХ

Рассматриваются нетрадиционные граничные интегральные уравнения (ГИУ), к которым сводятся плоские краевые задачи линейной теории упругости для сжимаемых и несжимаемых упругих сред и линеаризованные задачи гидродинамики несжимаемой вязкости жидкости в областях с кусочно-гладкой границей при заданных на ней смещениях. Эти уравнения получены[1] в результате использования продифференцированных вдоль контура граничных условий и упругих потенциалов двойного слоя первого или второго рода, а для несжимаемых сред – гидродинамического потенциала двойного слоя. В рамках подхода [1] с использованием интегрального преобразования Меллина, применяемого непосредственно к ГИУ, в [2] исследовались асимптотики вблизи углов для решений ГИУ антиплоской деформации, в [3] – для прямых ГИУ плоских гармонических задач и в [4] – для ГИУ плоских задач теории упругости с заданными усилиями. Здесь получены явные представления (до ограниченных членов включительно) асимптотик решений ГИУ плоских задач теории упругости с заданными перемещениями. Для асимптотики и при критических углах, когда кроме степенных появляются также и логарифмические члены, и представлена связь между коэффициентами интенсивности плотностей при критических и докритических углах. Представлены также асимптотики перемещений и напряжений в окрестности угловых точек вплоть до ограниченных членов и даны выражения коэффициентов интенсивности напряжений через коэффициенты интенсивности плотностей интегральных уравнений.

1. Введение. В этой работе будет рассматриваться асимптотика ГИУ II:

$$Q_i^{\rm II}-\lambda\int\limits_{\partial D} K_{ij}^{\rm II}(s,s_0)Q_j^{\rm II}(s)\,ds=h_i^{\rm II}(s_0)$$

$$K_{ij}^{\rm II}(s,\ s_0)=[\pi r^2(1+\varkappa)]^{-1}\{[4z_iz_jr^{-2}+(\varkappa-1)\delta_{ij}]\times$$
$$\times z_ln_l(s_0)-(\varkappa-1)[n_j(s_0)z_i-n_i(s_0)z_j]\}$$

и асимптотика ГИУ IV:

$$Q_i^{\rm IV}-\lambda\int\limits_{\partial D} K_{ij}^{\rm IV}(s,s_0)Q_j^{\rm IV}(s)\,ds=h_i^{\rm IV}(s_0)$$

$$K_{ij}^{\rm IV}(s,\ s_0)=[\pi r^2\varkappa]^{-1}[2z_iz_jr^{-2}+(\varkappa-1)\delta_{ij}]z_ln_l(s_0)$$

к которым сводится задача 1 (с заданными перемещениями) плоской теории упругости для сжимаемой среды, если искать ее решение в виде потенциала двойного слоя первого или второго рода соответственно. Здесь $z_i=x_i(s_0)-x_i(s)$; x_i – декартовы, а s – дуговая координаты точки границы ∂D области D, причем при положительном обходе ∂D область D оста-

[1] *Михайлов С. Е., Котов Ю. И.* Интегральные уравнения плоских задач теории упругости для областей с отверстиями и углами. ЦНИИПСК. М., 1986. 73 с.– Деп. в ВИНИТИ 17.09.86, № 6695–В86.

ется слева; $r^2=z_iz_i$; $n_j(s)$ — единичная внешняя нормаль к ∂D; постоянная плоской теории упругости $\varkappa:=(\Lambda+3\mu)/(\Lambda+\mu)>1$; $\Lambda>0$, $\mu>0$ — постоянные Ламе для случая плоской деформации (для случая плоского напряженного состояния фигурирующую здесь и далее постоянную Λ необходимо заменить на $\Lambda^*=2\Lambda\mu/(\Lambda+2\mu)$). Функции $h_i^{\mathrm{II},\mathrm{IV}}(s)=f_i'(s)-u_{0i}'(x(s))$, где $f_i(s)=u_i(x(s))|_{\partial D}$ — заданное граничное перемещение, а $u_{0i}(x)$ — добавочное бесконечно гладкое вплоть до границы ∂D поле перемещений, появляющееся [2] для неодносвязных областей D. Штрих сверху обозначает дифференцирование по s. Индексы у индексируемых величин меняются от 1 до 2 и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование в этих пределах; δ_{ij} — символ Кронекера; e_{ij} — альтернирующий символ: $e_{11}=e_{22}=0$, $e_{12}=-e_{21}=1$, отметим, что $e_{\alpha m}e_{pj}=\delta_{\alpha p}\delta_{mj}-\delta_{mp}\delta_{\alpha j}$, $e_{ij}=\delta_{1i}\delta_{2j}-\delta_{2i}\delta_{1j}$.

Пусть $Q_i(s)=q_i'(s)$. Тогда смещения и напряжения в точке $x\in D$ через плотность Q_i^{II} выражаются с помощью упругого потенциала двойного слоя первого рода

$$u_i(x)=U_i^{\mathrm{II}}(x)+u_{0i}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\partial D}\Gamma_{i\beta,l}[z]\,c_{j\eta\beta l}\,q_j^{\mathrm{II}}(s)\,n_\eta(s)\,ds+u_{0i}(x) \quad (1.1)$$

$$\sigma_{il}(x)=-4\mu\int_{\partial D}[\pi(\varkappa+1)r^2]^{-1}[2z_iz_lz_tr^{-2}-\delta_{it}z_l-\delta_{lt}z_i+\delta_{il}z_t]\,e_{tj}Q_j^{\mathrm{II}}(s)\,ds+$$
$$+\sigma_{il}(u_0;x) \quad (1.2)$$

а через плотность Q_i^{IV} — с помощью упругого потенциала двойного слоя второго рода

$$u_i(x)=U_i^{\mathrm{IV}}(x)+u_{0i}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\partial D}\Gamma_{i\beta,l}[z]\,c_{j\eta\beta l}^{(N)}\,q_j(s)\,n_\eta(s)\,ds+u_{0i}(x) \quad (1.3)$$

$$\sigma_{il}(x)=\mu\int_{\partial D}[\pi\varkappa r^2]^{-1}[4z_iz_lz_tr^{-2}-(\varkappa+1)(\delta_{it}z_l+\delta_{lt}z_i-\delta_{il}z_t)]\,e_{tj}Q_j^{\mathrm{IV}}(s)\,ds+$$
$$+\sigma_{il}(u_0;x) \quad (1.4)$$

$$c_{ijkl}:=\Lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})$$

$$c_{ijkl}^{(N)}:=c_{ijkl}+\mu(\varkappa-1)\varkappa^{-1}e_{ik}e_{jl}=\mu\varkappa^{-1}[(\varkappa+1)(\varkappa-1)^{-1}\delta_{ij}\delta_{kl}+\varkappa(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{lk})]$$

$$\Gamma_{ij}(z):=[\mu(\varkappa+1)]^{-1}[-\varkappa\ln(r)\,\delta_{ij}+z_iz_jr^{-2}]$$

Для несжимаемой упругой среды (или для несжимаемой вязкой жидкости) задача с заданными граничными смещениями (скоростями) сводится к ГИУ III, получаемому из ГИУ II, IV, если положить в них $\varkappa=1$. Через его решение Q_i^{III} смешения (скорости) выражаются с помощью гидродинамического потенциала двойного слоя

$$u_i(x)=\overset{\infty}{U}{}_i^{\mathrm{II}}(x)+u_{0i}(x)=\frac{-2}{\pi}\int_{\partial D}z_iz_jz_\eta r^{-4}q_j^{\mathrm{III}}(s)\,n_\eta(s)\,ds+u_{0i}(x) \quad (1.5)$$

а напряжения даются формулами (1.2), (1.4) при $\varkappa=1$. Представление для давления в несжимаемой среде получается тогда из соотношения $P(x)=-\sigma_{ii}(x)/2$.

Ядра этих интегральных уравнений имеют сильные стационарные особенности в угловых точках ∂D, ядро ГИУ II, кроме того, имеет особенность типа Коши, а ядра ГИУ III, IV непрерывны в достаточно гладких точках контура. Эти уравнения изучены в [5] в пространствах Лебега $L_p(\partial D)$ для двумерных областей D.

---

[2] См. указ. публ. с. 28.

2. Асимптотики решений ГИУ. Асимптотика решений ГИУ III, которое возникает также в задаче с заданными усилиями, вместе с асимптотиками ГИУ I получены в [4]. Методика получения асимптотик ГИУ II, IV очень близка той, что использована в [4], поэтому здесь укажем лишь общую схему рассуждений и окончательные результаты.

Рассмотрим сначала случай, когда s_* — дуговая координата угловой точки, D — бесконечный клин: $\{x_i=\rho(\delta_{1i}\cos\theta+\delta_{2i}\sin\theta),\quad 0<\rho<\infty,\ -\omega/2<\theta<\omega/2\}$, $0<\omega<2\pi$. Тогда ГИУ I—IV преобразуются к виду

$$Q_{ip}(\rho_0)-\int_0^\infty K_{ijpm}(\rho,\rho_0)Q_{jm}(\rho)\,d\rho=h_{ip}(\rho_0) \tag{2.1}$$

$$Q_{jm}(\rho):=Q_j(s_*+(-1)^m\rho),\quad h_{ip}(\rho_0):=h_i(s_*+(-1)^p\rho_0)$$

$$K_{ijpm}(\rho,\rho_0):=K_{ij}(s_*+(-1)^m\rho,\ s_*+(-1)^p\rho_0)$$

Пусть при $a\in(0,\infty]$ $L_2^{\sim}(\omega;a)$ — весовое пространство функций с нормой $\|f\|:=\left\{\int_0^a[f(\rho)\rho^\omega]^2\rho^{-1}d\rho\right\}^{1/2}<\infty$, а при $a=0$ $L_2^{\sim}(\omega;0):=\cup_{<a<\infty}L_2^{\sim}(\omega;a)$. Пусть еще $L_2^{\wedge}(\xi;a):=\cap_{\xi<\omega<\infty}L_2^{\sim}(\omega;a)$, т. е. множество $L_2^{\wedge}(\xi;a)$ состоит из функций, интегрируемых по $\rho^{-1}d\rho$ с квадратом с любым весом, показатель которого $\omega>\xi$. Определим еще $L_2^{\wedge}(\xi,\beta;\infty):=\cap_{\xi<\omega<\beta}L_2^{\sim}(\omega;\infty)$.

Пусть для $a\in[0,\infty)$ множество $M_\beta^{\wedge}(a):=\cup_{\xi<\beta}L_2^{\wedge}(\xi;a)\equiv\cup_{\xi<\beta}[\cap_{\omega>\xi}L_2^{\sim}\times\times(\omega;a)]$, т. е. $M_\beta^{\wedge}(a)$ состоит из функций, интегрируемых по $\rho^{-1}d\rho$ с квадратом с любым весом, показатель которого $\omega>\xi$ для какого-либо $\xi<\beta$. Пусть еще $M_\beta^{\wedge}(g):=\cup_{\xi<\beta}L_2^{\wedge}(\xi,\beta;\infty)\equiv\cup_{\xi<\beta}[\cap_{\xi<\omega<\infty}L_2^{\sim}(\omega;\infty)]$[4].

Пусть $h_{ip}(\rho_0)\in L_2^{\wedge}(\alpha_0,1;\infty)$ для некоторого $\alpha_0<1$. Будем, следуя [6], искать решение Q_{ip} ГИУ (2.1), принадлежащее множеству $M_1^{\wedge}(\infty)$, с помощью преобразования Меллина. После его применения к (2.1) приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно $\langle Q_{ip}\rangle(\gamma)$:

$$\langle Q_{ip}\rangle(\gamma)-K_{ijpm}^{\wedge}(\gamma)\langle Q_{jm}\rangle(\gamma)=\langle h_{ip}\rangle(\gamma) \tag{2.2}$$

$$\langle Q_{ip}\rangle(\gamma):=\int_0^\infty Q_{ip}(p)\rho^{\gamma-1}d\rho,\qquad K_{ijpm}^{\wedge}(\gamma):=\int_0^\infty K_{ijpm}(1,\xi)\xi^{\gamma-1}d\xi \tag{2.3}$$

имеющей место в интервале $\alpha<\operatorname{Re}\gamma<1$ при некотором $\alpha<1$. При этом функция $Q_{ip}(\rho)$ через свою трансформанту $\langle Q_{ip}\rangle(\gamma)$ представляется в виде

$$Q_{ip}(\rho)=\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\langle Q_{ip}\rangle(\gamma)\rho^{-\gamma}\,d\gamma\qquad(\alpha<c<1) \tag{2.4}$$

Подставляя $K_{ijpm}^{\mathrm{II,IV}}$ в (2.3), получаем после ряда преобразований

$$K_{ijpm}^{\mathrm{II}\wedge}(\gamma)=-a^{\mathrm{I}}(\gamma)\chi_{ij}\Omega_{pm}-b^{\mathrm{I}}(\gamma)\Omega_{ij}e_{pm}+c^{\mathrm{I}}(\gamma)\delta_{ij}\Omega_{pm}+d^{\mathrm{I}}(\gamma)e_{ij}e_{pm}-$$
$$-f^{\mathrm{I}}(\gamma)e_{ij}\chi_{pm}$$

$$K_{ijpm}^{\mathrm{IV}\wedge}(\gamma)=-a^{\mathrm{IV}}(\gamma)\chi_{ij}\Omega_{pm}-b^{\mathrm{IV}}(\gamma)\Omega_{ij}e_{pm}+c^{\mathrm{IV}}(\gamma)\delta_{ij}\Omega_{pm}$$
$$\chi_{ij}:=-\delta_{1i}\delta_{1j}+\delta_{2i}\delta_{2j},\quad \Omega_{ij}:=\delta_{1i}\delta_{2j}+\delta_{2i}\delta_{1j}$$

---

[4] Здесь используются несколько отличающиеся от [4] обозначения весовых пространств.

$$a^{\mathrm{I}}:=2(\gamma-1)\sin(\varphi)\cos[(\gamma-1)\varphi][(1+\varkappa)\sin(\gamma\pi)]^{-1}$$

$$b^{\mathrm{I}}:=-2(\gamma-1)\sin(\varphi)\sin[(\gamma-1)\varphi][(1+\varkappa)\sin(\gamma\pi)]^{-1}$$

$$c^{\mathrm{I}}:=-\sin[(\gamma-1)\varphi][\sin(\gamma\pi)]^{-1}$$

$$d^{\mathrm{I}}:=(\varkappa-1)\cos[(\gamma-1)\varphi][(1+\varkappa)\sin(\gamma\pi)]^{-1}$$

$$f^{\mathrm{I}}:=-(\varkappa-1)(\varkappa+1)^{-1}\operatorname{ctg}(\gamma\pi)$$

$$a^{\mathrm{IV}}:=(\gamma-1)\sin(\varphi)\cos[(\gamma-1)\varphi][\varkappa\sin(\gamma\pi)]^{-1}$$

$$b^{\mathrm{IV}}:=-(\gamma-1)\sin(\varphi)\sin[(\gamma-1)\varphi][\varkappa\sin(\gamma\pi)]^{-1}$$

$$c^{\mathrm{IV}}:=-\sin[(\gamma-1)\varphi][\sin(\gamma\pi)]^{-1},\qquad \varphi:=\omega-\pi$$

Решение системы (2.2) имеет вид

$$\langle Q_{ip}\rangle(\gamma)=G_{ijpm}^{\frown}(\gamma)\langle h_{jm}\rangle(\gamma)/\Delta(\gamma) \qquad (2.5)$$

Здесь $G_{ijpm}^{\frown}(\gamma)$ — алгебраические дополнения элементов матрицы размера (4×4) системы (2.2), явные представления которых через $K_{ipm}^{\frown}$ даны в [4], $\Delta(\gamma)$ — определитель этой матрицы:

$$\Delta^{\mathrm{II}}(\varkappa,\ \omega,\ \gamma)=16[(\varkappa+1)\sin(\gamma\pi)]^{-4}\Delta_*(\varkappa,\ \omega,\ \gamma)\Delta_*(-\varkappa,\ \omega,\ \gamma)\times$$
$$\times\Delta_*(1,\ 2\pi-\omega,\ \gamma)\Delta_*(-1,\ 2\pi-\omega,\ \gamma)$$

$$\Delta^{\mathrm{IV}}(\varkappa,\ \omega,\ \gamma)=[\varkappa\sin(\gamma\pi)]^{-4}\Delta_*(\varkappa,\ \omega,\ \gamma)\Delta_*(-\varkappa,\ \omega,\ \gamma)\times$$
$$\times\Delta_*(\varkappa,\ 2\pi-\omega,\ \gamma)\Delta_*(-\varkappa,\ 2\pi-\omega,\ \gamma)$$

$$\Delta_*(\varkappa,\ \omega,\ \gamma):=\varkappa\sin[(\gamma-1)\omega]+(\gamma-1)\sin\omega$$

Так как $h_{jm}(\rho)\in L_2^{\frown}(\alpha,\ 1;\ \infty)$, то из [6] следует, что $\langle h_{jm}\rangle(\gamma)$ являются регулярными аналитическими функциями в полосе $\alpha_0<\operatorname{Re}\gamma<1$, в которой, кроме того, норма $\langle h_{jm}\rangle(\gamma)$ в L_2 на прямой $\operatorname{Re}\gamma=c$ выражается через норму $h_{jm}(\rho)$ в $L_2^{\sim}(c;\ \infty)$. Тогда в этой полосе правая часть (2.5) есть мероморфная функция с полюсами конечной кратности в нулях (по γ) функций $\Delta_*(\pm\varkappa,\ \omega,\ \gamma)$, $\Delta_*(\pm1,\ 2\pi-\omega,\ \gamma)$ для Q_{ip}^{II} и функций $\Delta_*(\pm\varkappa,\ \omega,\ \gamma)$, $\Delta_*(\pm\varkappa,\ 2\pi-\omega,\ \gamma)$ для Q_{ip}^{IV}.

Нули этих функций изучались ранее [7—11]. В полосе $0<\operatorname{Re}\gamma<1$ эти нули действительные, простые и в данной полосе имеется не более чем по одному нулю каждой из упомянутых функций в интервале $0<\omega<2\pi$, причем корень γ_1 функции $\Delta(\varkappa,\ \omega,\ \gamma)$ не меньше корня γ_2 функции $\Delta(-\varkappa,\ \omega,\ \gamma)$ $(\varkappa\geqslant1)$ и $\gamma_1(\varkappa,\ \omega)$, $\gamma_2(\varkappa,\ \omega)<{}^1/_2$. При $\gamma=0$ функция $\Delta_*(1,\ \omega,\ \gamma)$ имеет двойной нуль для $\omega=\omega_0=\operatorname{tg}\omega_0$.

Отсюда видно, что функция $\langle Q_{ip}\rangle(\gamma)$ есть регулярная аналитическая функция в полосе $\alpha_*<\operatorname{Re}\gamma<1$, где $\alpha_*=\max({}^1/_2,\ \alpha_0)$ и, следовательно [6], $Q_{ip}(\rho)\in L_2^{\frown}(\alpha_*,\ 1;\ \infty)$, т. е. как и предполагалось априори, $Q_{ip}\in M_1^{\frown}$.

Теперь для нахождения решения (2.1) осталось подставить (2.5) в (2.4). Для получения асимптотики решения при $\rho\to0$ перенесем в γ-плоскости, как и в [1, 4], контур интегрирования в (2.4) влево до прямой $\operatorname{Re}\gamma=\alpha_0$, беря вычеты в точках полюсов $\langle Q_{ip}\rangle(\gamma)$. Допустимость этой операции, как и вложение для остаточного члена

$$Q_{ip}{}^*(\rho):=\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\langle Q_{ip}\rangle(\gamma)\rho^{-\gamma}d\gamma\in L_2^{\frown}(\alpha_0,1;\infty)\ (\alpha_0<c<\min_{\alpha_0<\operatorname{Re}\gamma_i}\operatorname{Re}\gamma_i),$$

где γ_i — нули функций Δ^{II}, Δ^{IV} соответственно, следует из вида функций $G_{ipm}^{\frown}(\gamma)$, $\Delta(\gamma)$ и вложения $h_{jm}(\rho)\in L_2^{\frown}(\alpha_0,\ 1;\ \infty)$.

Для нас представляет интерес один частный случай, который мы и будем далее предполагать, когда $h_{jm}(\rho)\in L_2^{\wedge}(0,\ 1;\ \infty)$ и, кроме того, $|h_{jm}(0)|<\infty$, $h_{jm}(\rho)-h_{jm}(0)\in M_0^{\wedge}(0)$. В этом случае предыдущие рассуждения можно продолжить, перемещая контур интегрирования в (2.4) левее точки $\gamma=0$ и беря в ней вычет подынтегрального выражения. Тогда остаточный член $Q^*(\rho)\in M_0^{\wedge}(0)$.

Введем параметры $B_k(\omega;\ h)$ $(k=1\div4)$, линейно выражающиеся через четыре предельных значения некоторых граничных функций $h_i(s)$:

$$B_1(\omega;\ h):=h_1^S(s_*)\cos(\omega/2)+h_2^A(s_*)\sin(\omega/2)$$

$$B_2(\omega;\ h):=-h_1^S(s_*)\sin(\omega/2)-h_2^A(s_*)\cos(\omega/2)$$

$$B_3(\omega;\ h):=h_1^S(s_*)\sin(\omega/2)-h_2^A(s_*)\cos(\omega/2)$$

$$B_4(\omega;\ h):=h_1^S(s_*)\cos(\omega/2)-h_2^A(s_*)\sin(\omega/2) \tag{2.6}$$

$$h_1^S(s_*):=[h(s_*+0)+h(s_*-0)]/2, \qquad h_2^A(s_*):=[h(s_*+0)-h(s_*-0)]/2$$

Определяя вычеты явно и учитывая, что элементы $G\hat{i}_{pm}(\gamma)$ в точках γ_i нулей $\Delta(\gamma)$ линейно зависимы, будем иметь для решения $Q_i^{\mathrm{II}}(s)$ в окрестности угловой точки s_* представления $(\rho>0)$

$$Q_i^{\mathrm{II}}(s_*\mp\rho)=\sum_{k=1}^{4}A_k(\omega,\varkappa)\,d_{ki}^{\mathrm{II}\mp}(\omega,\varkappa)\,\rho^{-\gamma_k^{\mathrm{II}}}+$$

$$+\pi\{\sin[\omega+(2\pi-\omega)\cos\omega]\}^{-1}A_0^{\mathrm{II}}(\omega,\varkappa)\,n_i^{\mp}+Q_i^{\mathrm{II}*}(s_*\mp\rho) \tag{2.7}$$

$$d_{1i}^{\mathrm{II}\mp}:=t_{ip}^{\mp}(\omega,\ \gamma_1^{\mathrm{II}}(\omega),\ \varkappa^{-1})n_p^{\mp}, \qquad d_{2i}^{\mathrm{II}\mp}:=e_{ij}t_{jp}^{\mp}(\omega,\ \gamma_2^{\mathrm{II}}(\omega),\ \varkappa^{-1})n_p^{\mp}$$

$$d_{3i}^{\mathrm{II}\mp}:=\pm q_{ip}^{\mp}(2\pi-\omega,\ \gamma_3^{\mathrm{II}}(\omega))n_p^{\mp}, \qquad d_{4i}^{\mathrm{II}\mp}:=\pm e_{ij}q_{jp}^{\mp}(2\pi-\omega,\ \gamma_4^{\mathrm{II}}(\omega))n_p^{\mp}$$

$$t_{ip}^{\mp}(\omega,\ \gamma,\ \varkappa):=\{\delta_{ij}\sin[(1-\gamma)(\omega-\pi)]\mp e_{ij}(\varkappa-1)(\varkappa+1)^{-1}\times$$

$$\times\cos[(1-\gamma)(\omega-\pi)]\}q_{ip}^{\mp}(\omega,\ \gamma), \quad q_{ip}^{\mp}(\omega,\ \gamma):=-\delta_{ip}\sin(\gamma\omega/2)\pm e_{ip}\cos(\gamma\omega/2)$$

Здесь $Q_i^{\mathrm{II}}(s_*\mp\rho)\in M_0^{\wedge}(0)$, $\gamma_k^{\mathrm{II}}(\omega)$ — максимальные при $\operatorname{Re}\gamma_k^{\mathrm{II}}<1$ корни соответственно уравнений

$$\Delta_*(\varkappa,\ \omega,\ \gamma_1^{\mathrm{II}})=0, \qquad \Delta_*(-\varkappa,\ \omega,\ \gamma_2^{\mathrm{II}})=0$$

$$\Delta_*(1,\ 2\pi-\omega,\ \gamma_3^{\mathrm{II}})=0, \qquad \Delta_*(-1,\ 2\pi-\omega,\ \gamma_4^{\mathrm{II}})/\gamma_4^{\mathrm{II}}=0 \tag{2.8}$$

Отсюда видно, что $\gamma_1^{\mathrm{II}}(\omega)$, $\gamma_2^{\mathrm{II}}(\omega)<0$ при $\omega>\pi$; $\gamma_3^{\mathrm{II}}(\omega)<0$ при $\omega>\pi$; $\gamma_4^{\mathrm{II}}(\omega)<0$ при $\omega>\omega_{00}=2\pi+\operatorname{tg}\omega_{00}\approx1{,}790$. В этих интервалах угла ω функции $\rho^{-\gamma_k^{\mathrm{II}}}\in M_0^{\wedge}(0)$ и члены с соответствующими сомножителями можно объединить с остаточным членом $Q_i^{\mathrm{II}*}(s_*\mp\rho)$. т. е. опустить их в явной записи (2.7). Если правые части $h_i^{\mathrm{II}}(s)$ почти везде непрерывно меняются с изменением угла ω, то коэффициенты интенсивности плотности $A_i^{\mathrm{II}}\times\times(\omega,\ \varkappa)$ являются непрерывными функциями ω в интервалах $0<\gamma_k<1$ и имеют простые полюсы при $\gamma_k(\omega)=0$ (для конечных значений $h_m^{\mathrm{II}}\times\times(s_*\mp0)$), что имеет место при критических значениях углов: для A_1^{II}, A_2^{II}, A_3^{II} — при $\omega=\pi$, а для A_4^{II} — при $\omega=\omega_0$.

Выделяя особенности коэффициентов интенсивности плотности около критических углов, их можно представить в виде

$$A_1^{\mathrm{II}}(\omega,\ \varkappa)=A_1^{\mathrm{II}0}(\omega,\ \varkappa)+(\varkappa+1)(2\sin\omega)^{-1}B_1(\omega)$$

$$A_2^{\mathrm{II}}(\omega,\ \varkappa)=A_2^{\mathrm{II}0}(\omega,\ \varkappa)-(\varkappa+1)^2[2(3\varkappa-1)\sin\omega]^{-1}B_4(\omega)$$

$$A_3^{\mathrm{II}}(\omega,\ \varkappa)=A_3^{\mathrm{II}0}(\omega,\ \varkappa)+(\varkappa^2-1)[2(3\varkappa-1)\sin\omega]^{-1}B_4(\omega) \tag{2.9}$$

$$A_4^{\mathrm{II}}(\omega,\ \varkappa)=A_4^{\mathrm{II}0}(\omega,\ \varkappa)-\pi\{[\sin\omega+(2\pi-\omega)\cos\omega]\sin\omega_{00}\}^{-1}A_0^{\mathrm{II}}(\omega,\ \varkappa)$$

Здесь и далее $B_i(\omega):=B_i(\omega;\ f')$. Отметим, что так как для непрерывной функции $f'(s)$ функционалы $B_4(\pi):=B_4(\pi;\ f')=0$, то можно было бы положить везде $B_i=B_i-\omega;\ h^{\text{II}})$, однако при этом несколько усложнилась бы связь между коэффициентами интенсивности напряжений и плотности при критических углах ω.

Функции $A_k^{\text{II}0}(\omega,\varkappa)$ $(k=1\div3)$ уже непрерывны по ω при $\omega=\pi$, а $A_4^{\text{II}0}(\omega,\varkappa)$ — при $\omega=\omega_{00}$.

Выпишем асимптотику плотности при критических значениях углов $\omega=\omega_{00}$, π, когда некоторые из коэффициентов в (2.7) становятся неограниченными.

При $\omega=\omega_{00}\approx102{,}5°$ будем иметь $\gamma_4^{\text{II}}(\omega_{00})=0$; $\gamma_3^{\text{II}}(\omega_{00})>0$; $\gamma_1^{\text{II}}(\omega_{00})\times\times\gamma_2^{\text{II}}(\omega_{00})<0$:

$$Q_i^{\text{II}}(s_*\mp\rho)=A_3(\omega_{00},\varkappa)\,d_{3i}^{\text{II}\mp}(\omega_{00},\varkappa)\rho^{-\gamma_3^{\text{II}}}+$$
$$+\{\pi[(2\pi-\omega_{00})\sin(\omega_{00})]^{-2}A_0^{\text{II}}(\omega_{00},\varkappa)\,(2\ln\rho-1)+A^{\text{II}0}(\omega_{00},\varkappa)\}\,n_i^{\mp}\pm$$
$$\pm\pi[(2\pi-\omega_{00})\sin^2(\omega_{00})]^{-1}A_0^{\text{II}}(\omega_{00},\varkappa)\,e_{ij}n_j^{\mp}+Q_i^{\text{II}*}(s_*\mp\rho)\qquad(2.10)$$

При $\omega=\pi$ получим $\gamma_1(\pi)=\gamma_2(\pi)=\gamma_3(\pi)=0$, $\gamma_4(\pi)<0$,

$$A_0^{\text{II}}(\pi,\varkappa)=(1-\varkappa)B_1(\pi)/2=(\varkappa-1)[f_i'^-(s_*)-f_i'^+(s_*)]\,e_{ij}n_j/4,$$
$$Q_i^{\text{II}}(s_*\mp\rho)=-(\varkappa^2-1)\,(4\pi\varkappa)^{-1}[f_j'^-(s_*)-f_j'^+(s_*)]\,e_{ij}\ln\rho\pm$$
$$\pm(\varkappa+1)^2(8\varkappa)^{-1}[f_i'^-(s_*)-f_i'^+(s_*)]-A_1^{\text{II}0}(\pi,\varkappa)\,(\varkappa-1)\times$$
$$\times(\varkappa+1)^{-1}n_i-[A_2^{\text{II}0}(\varkappa-1)\,(\varkappa+1)^{-1}+A_3^{\text{II}0}]\,e_{ip}n_pQ_i^{\text{II}*}(s_*\mp\rho)\qquad(2.11)$$

Соотношения (2.10), (2.11) можно получить как путем вычисления вычетов функций $\langle Q_{ip}\rangle(\gamma)\rho^{-\gamma}$ при соответствующих углах ω, так и путем предельных переходов из (2.7), (2.9) при $\gamma_i\to0$ с учетом следующих из (2.8) соотношений

$$\left.\frac{d\gamma_1^{\text{II}}}{d\omega}\right|_{\omega=\pi}=\frac{\varkappa+1}{\pi\varkappa},\quad \left.\frac{d\gamma_2^{\text{II}}}{d\omega}\right|_{\omega=\pi}=\frac{\varkappa-1}{\pi\varkappa},\quad \left.\frac{d\gamma_3^{\text{II}}}{d\omega}\right|_{\omega=\pi}=\frac{-2}{\pi}$$
$$\left.\frac{d\gamma_4^{\text{II}}}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_{00}}=\frac{-2}{2\pi-\omega_{00}},\quad \left.\frac{d^2\gamma_1^{\text{II}}}{d\omega^2}\right|_{\omega=\pi}=-2\left(\frac{\varkappa+1}{\pi\varkappa}\right)^2,\quad \left.\frac{d^2\gamma_2^{\text{II}}}{d\omega^2}\right|_{\omega=\pi}=$$
$$=-2\left(\frac{\varkappa-1}{\pi\varkappa}\right)^2\qquad(2.12)$$

Используя те же соображения, что и выше при получении (2.7), для асимптотики решения ГИУ IV имеем

$$Q_i^{\text{IV}}(s_*\mp\rho)=\sum_{k=1}^{4}A_k^{\text{IV}}(\omega,\varkappa)\,d_{ki}^{\text{IV}\mp}(\omega,\varkappa)\,\rho^{-\gamma_k^{\text{IV}}}+Q_i^{\text{IV}\mp}(s_*\mp\rho)\qquad(2.13)$$

$$d_{1i}^{\text{IV}\mp}:=q_{ip}^{\mp}(\omega,\gamma_1^{\text{IV}}(\omega))\,n_p^{\mp},\quad d_{2i}^{\text{IV}\mp}:=e_{ij}q_{jp}^{\mp}(\omega,\gamma_2^{\text{IV}}(\omega))\,n_p^{\mp}$$

$$d_{3i}^{\text{IV}\mp}:=\pm q_{ip}^{\pm}(2\pi-\omega,\gamma_3^{\text{IV}}(\omega))\,n_p^{\mp},\qquad d_{4i}^{\text{IV}\mp}:=\pm e_{ij}q_{jp}^{\pm}(2\pi-\omega,\gamma_4^{\text{IV}}(\omega),\varkappa)\,n_p^{\mp}$$

Здесь также $Q_i^{\text{IV}}(s_*\mp p)\in M_0{}^{\wedge}(0)$, $q_{ip}^{\mp}$ даны в (2.7), а $\gamma_k^{\text{IV}}(\omega)$ — максимальные при $\operatorname{Re}\gamma_k^{\text{IV}}<1$ корни соответственно уравнений

$$\Delta_*(\varkappa,\omega,\gamma_1^{\text{IV}})=0,\quad \Delta_*(-\varkappa,\omega,\gamma_2^{\text{IV}})=0$$
$$\Delta_*(\varkappa,2\pi-\omega,\gamma_3^{\text{IV}})=0,\quad \Delta_*(-\varkappa,2\pi-\omega,\gamma_4^{\text{IV}})=0\qquad(2.14)$$

Отсюда имеем, что $\gamma_1^{\text{IV}}(\omega)$, $\gamma_2^{\text{IV}}(\omega)<0$ при $\omega<\pi$; $\gamma_3^{\text{IV}}(\omega)$, $\gamma_4^{\text{IV}}(\omega)<0$ при $\omega>\pi$. В этих интервалах угла ω члены с соответствующими сомножителями $\rho^{-\gamma_k^{\mathrm{IV}}} \in M_0^{\wedge}(0)$ можно объединить с остаточным членом $Q_i^{\mathrm{IV}*}(s_*\mp\rho)$, т. е. опустить их в явной записи (2.13).

Коэффициенты интенсивности плотности $A_k^{\mathrm{IV}}(\omega, \varkappa)$ являются непрерывными функциями угла ω для $0\leqslant\gamma_k(\omega)<1$, если заданные граничные функции $h_i^{\mathrm{IV}}(s)$, от которых зависят эти коэффициенты, непрерывны по ω почти во всех точках $s\in\partial D$.

С учетом полученных из (2.14) соотношений $\gamma_k^{\mathrm{IV}}(\pi)=0$ $(k=1\div4)$:

$$\left.\frac{d\gamma_1^{\mathrm{IV}}}{d\omega}\right|_{\omega=\pi}=\frac{\varkappa+1}{\pi\varkappa};\quad \left.\frac{d^2\gamma_1^{\mathrm{IV}}}{d\omega^2}\right|_{\omega=\pi}=-2\left(\frac{\varkappa+1}{\pi\varkappa}\right)^2$$

$$\left.\frac{d^3\gamma_1^{\mathrm{IV}}}{d\omega^3}\right|_{\omega=\pi}=6\left(\frac{\varkappa+1}{\pi\varkappa}\right)^3-\frac{\varkappa^2-1}{\pi\varkappa^3},\quad \left.\frac{d\gamma_2^{\mathrm{IV}}}{d\omega}\right|_{\omega=\pi}=\frac{\varkappa-1}{\pi\varkappa} \tag{2.15}$$

удается показать, что при $\omega=\pi$:

$$A_1^{\mathrm{IV}}(\pi,\varkappa)=-B_1(\pi)=[h_i^{\mathrm{IV}-}(s_*)-h_i^{\mathrm{IV}+}(s_*)]e_{ip}n_p/2$$

$$A_2^{\mathrm{IV}}(\pi,\varkappa)=B_4(\pi)=-[h_i^{\mathrm{IV}-}(s_*)-h_i^{\mathrm{IV}+}(s_*)]n_i/2$$

Тогда будем иметь

$$Q_i^{\mathrm{IV}}(s_*\mp\rho)=\pm[h_i^{\mathrm{IV}-}(s_*)-h_i^{\mathrm{IV}+}(s_*)]/2+A_4^{\mathrm{IV}}(\pi,\varkappa)n_i-$$

$$-A_3^{\mathrm{IV}}(\pi,\varkappa)e_{ip}n_p+Q_i^{\mathrm{IV}*}(s_*\mp\rho) \tag{2.16}$$

К этому же соотношению приводит прямое вычисление вычетов функций $\langle Q_{ip}^{\mathrm{IV}}\rangle(\gamma)\rho^{-\gamma}$ при $\omega=\pi$.

До сих пор речь шла о случае, когда область D — бесконечный клин. Тогда как коэффициенты интенсивности плотности $A_i^{\mathrm{II,IV}}$, так и параметры B_i являются функционалами от заданных правых частей f_i' и они могут быть явно вычислены.

При анализе асимптотики решения ГИУ на произвольном кусочно-ляпуновском контуре ∂D, если $h_i(s_*\mp\rho)\in L_2^{\wedge}(0;0)$, $|h_i(s_*\mp0)|<\infty$ и $h_i(s_*\mp\rho)-h_i(s_*\mp0)\in M_0^{\wedge}(0)$, то можно записать ГИУ в окрестности рассматриваемой угловой точки s_* в виде (2.1) с некоторым конечным верхним пределом a_0, где ядро K_{ijpm} формируется по касательным к ∂D в угловой точке. Далее получившееся ГИУ на отрезке $[0, a_0]$ необходимо продолжить с помощью тех же формул для ядра на полуось $[0,\infty)$, положив $Q_{jm}(\rho)=0$ $(\rho>a_0)$. Образовавшиеся при этом добавочные интегральные члены необходимо перенести в правую часть. Эта правая часть $h_{im}^0(\rho)$ тогда станет уже условно заданной, но будет принадлежать $L_2^{\wedge}(0,1;\infty)$ и по-прежнему $|h_{im}^0(0)|<\infty$, $h_{im}^0(\rho)-h_{im}^0(0)\in M_0^{\wedge}(0)$.

Таким образом удается прийти к уже исследованной системе (2.1) на полуоси с условно заданной правой частью h_{im}^0. Кроме того, так как около угловой точки s_* исходные h_i и условно заданные h_i^0 правые части различаются при $\omega=\pi$ лишь на непрерывные, в s_* функции, то параметры $B_1(\omega)$ и $B_4(\omega)$ могут определяться по тем же формулам (2.6) через исходные правые части f_i'. Этого нельзя сказать о коэффициентах A_i, которые для тела с произвольной границей через правые части априори (без полного решения уравнения на этой границе) не выражаются.

Далее, если в окрестности угловой точки s_* правая часть $h_{im}(\rho)$ — гельдерова функция, то можно показать, что остаточный член $Q_i^{*\mathrm{II,IV}}(s_*\mp\rho)$ в асимптотиках (2.7)—(2.16) тоже принадлежит не только $M_0^{\wedge}(0)$, но и пространству Гельдера и $Q_i^{*\mathrm{II,IV}}(s_*)=0$.

3. Асимптотики перемещений и напряжений в сжимаемой упругой среде. Если область D — клин, то из представлений (1.1), (1.3) можно обычным образом получить представления для трансформант градиентов перемещений $\langle u_{i,j}\rangle(\gamma,\theta)$ через трансформанты плотностей $\langle Q_{ip}\rangle(\gamma)$. Используя далее асимптотики плотностей (2.7), (2.13), а также (2.11), (2.16) и вычисляя, как и выше, вычеты при передвижении контура интегрирования в γ-плоскости в обратном преобразовании Меллина, получим асимптотику для градиента перемещений около угловой точки s_*.

Если область отлична от бесконечного клина, а производные от заданных граничных смещений f_i' гельдеровы в левой и правой окрестностях угловой точки s_*, то к полученной асимптотике необходимо добавить неизвестное гладкое вплоть до s_* поле градиентов смещений, порожденное интегрированием в (1.1), (1.3) по криволинейной части границы. Для определения возникающих при этом неизвестных постоянных можно подставить полученные асимптотики в граничное условие $u_i(x(s))|_{\partial D}=f_i(s)$.

Интегрирование этой асимптотики позволяет определить асимптотику для перемещений, а использование закона Гука — для напряжений.

Будем пользоваться введенной выше местной полярной системой координат (ρ,θ) с началом в угловой точке s_* и углом θ, отсчитываемым против часовой стрелки от биссектрисы угла ω. При $0<\omega<2\pi$ перемещения имеют вид

$$u_i=\sum_{n=1}^{2}K_n u_i^{(n)}(\theta)\rho^{1-\gamma_n}+u_i^0(\theta)\rho+f_i(s_*)+u_i^*(\rho,\theta) \qquad (3.1)$$

$$u_\rho^{(1)}:=(\varkappa+\gamma_1-1)(1-\gamma_1)^{-1}\{\sin(\gamma_1\omega/2)[\sin(\omega(\gamma_1-2)/2)]^{-1}\times$$
$$\times\sin[(\gamma_1-2)\theta]-\sin(\gamma_1\theta)\}$$

$$u_\theta^{(1)}:=(\varkappa-\gamma_1+1)(1-\gamma_1)^{-1}\{\cos(\gamma_1\omega/2)[\cos(\omega(\gamma_1-2)/2)]^{-1}\times$$
$$\times\cos[(\gamma_1-2)\theta]-\cos(\gamma_1\theta)\}$$

$$u_\rho^{(2)}:=(\varkappa+\gamma_2-1)(1-\gamma_2)^{-1}\{\cos(\gamma_2\omega/2)[\cos(\omega(\gamma_2-2)/2)]^{-1}\times$$
$$\times\cos[(\gamma_2-2)\theta]-\cos(\gamma_2\theta)\}$$

$$u_\theta^{(2)}:=(\varkappa-\gamma_2+1)(1-\gamma_2)^{-1}\{-\sin(\gamma_2\omega/2)[\sin(\omega(\gamma_2-2)/2)]^{-1}\times$$
$$\times\sin[(\gamma_2-2)\theta]+\sin(\gamma_2\theta)\}$$

$$u_\rho^0:=-(B_2-B_4\operatorname{ctg}\omega)\cos 2\theta-(B_1\operatorname{ctg}\omega+B_3)\sin 2\theta-B_4/\sin\omega$$

$$u_\theta^0:=(B_2-B_4\operatorname{ctg}\omega)\sin 2\theta-(B_1\operatorname{ctg}\omega+B_3)\cos 2\theta+B_1/\sin\omega$$

Для напряжений получим

$$\sigma_{ij}(\rho,\theta)=\sum_{n=1}^{2}2\mu K_n\sigma_{ij}^{(n)}(\theta)\rho^{-\gamma_n}+2\mu\sigma_{ij}^0(\theta)+\sigma_{ij}^*(\rho,\theta) \qquad (3.2)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)}:=-\varkappa\sin(\gamma_1\omega)[\sin\omega]^{-1}\sin[(\gamma_1-2)\theta]-(\gamma_1+2)\sin(\gamma_1\theta)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(1)}:=\varkappa\sin(\gamma_1\omega)[\sin\omega]^{-1}\sin[(\gamma_1-2)\theta]+(\gamma_1-2)\sin(\gamma_1\theta)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{(1)}:=\varkappa\sin(\gamma_1\omega)[\sin\omega]^{-1}\cos[(\gamma_1-2)\theta]+\gamma_1\cos(\gamma_1\theta)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2)}:=\varkappa\sin(\gamma_2\omega)[\sin\omega]^{-1}\cos[(\gamma_2-2)\theta]-(\gamma_2+2)\cos(\gamma_2\theta)$$

$$\overset{(2)}{\sigma_{\theta\theta}} := -\varkappa \sin(\gamma_2\omega)[\sin\omega]^{-1}\cos[(\gamma_2-2)\theta] + (\gamma_2-2)\cos(\gamma_2\theta)$$

$$\overset{(2)}{\sigma_{\rho\theta}} := \varkappa \sin(\gamma_2\omega)[\sin\omega]^{-1}\sin[(\gamma_2-2)\theta] - \gamma_2\sin(\gamma_2\theta)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^0 := -(B_2-B_4\operatorname{ctg}\omega)\cos 2\theta - (B_1\operatorname{ctg}\omega+B_3)\sin 2\theta - 2B_4[(\varkappa-1)\sin\omega]^{-1}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^0 := (B_2-B_4\operatorname{ctg}\omega)\cos 2\theta + (B_1\operatorname{ctg}\omega+B_3)\sin 2\theta - 2B_4[(\varkappa-1)\sin\omega]^{-1}$$

$$\sigma_{\rho\theta}^0 := (B_2-B_4\operatorname{ctg}\omega)\sin 2\theta - (B_1\operatorname{ctg}\omega+B_3)\cos 2\theta$$

Здесь $\gamma_k(\omega)=\gamma_k^{\text{II}}(\omega)=\gamma_k^{\text{IV}}(\omega)$ $(k=1\div 2)$. В (3.1), (3.2) остаточные члены $u_i^*(\rho,\theta)=o(\rho)$, $\sigma_{ij}^*(\rho,\theta)\to 0$ для $\rho\to 0$, если $f_i'(s_*\mp\rho)$ — гельдеровы по ρ функции в окрестности точки s_*. В [12] представлен главный член асимптотики перемещений около угловой точки и он совпадает с членами $u_i^{(1)}$ в (3.1). Члены $u_i^{(1)}$, $u_i^{(2)}$ в (3.1) совпадают также после соответствующих преобразований с членами асимптотики, данными в [13] (если сделать там очевидные исправления неточностей, связанных с зависимостью от коэффициента Пуассона).

Коэффициенты интенсивности напряжений K_i прямо выражаются через коэффициенты интенсивности A_i плотности Q_i. Для ГИУ II, IV соответственно

$$K_i(\omega)=2(\varkappa+1)^{-1}A_i^{\text{II}}(\omega)\{\operatorname{ctg}(\gamma_i\pi)\sin[(1-\gamma_i)(\omega-\pi)]-$$
$$-(\varkappa-1)(\varkappa+1)^{-1}\cos[(1-\gamma_i)(\omega-\pi)]\} \tag{3.3}$$

$$K_i(\omega)=A_i^{\text{IV}}(\omega)\operatorname{ctg}(\gamma_i\pi)/\varkappa \tag{3.4}$$

Отсюда видно, что $K_i(\omega)$ непрерывны по ω при $\pi<\omega<2\pi$, если граница ∂D и заданные функции f_i' почти везде на ней также непрерывно зависят от ω. При $\omega=\pi$ коэффициенты $K_i(\omega)$ имеют простые полюсы, так что их можно представить в виде

$$K_1(\omega)=K_1^0(\omega)+[(\varkappa+1)\sin\omega]^{-1}B_1(\omega),$$
$$K_2(\omega)=K_2^0(\omega)-[(\varkappa-1)\sin\omega]^{-1}B_4(\omega)$$

Тогда функции $K_i^0(\omega)$ будут уже непрерывными при $\omega=\pi$ и, как следует из (3.3), (3.4), (2.9), (2.12), (2.15), для ГИУ II:

$$K_1^0(\pi)=2[\varkappa+1]^{-2}A_1^{\text{II}0}(\pi,\varkappa),$$
$$K_2^0(\pi)=2(3\varkappa-1)(\varkappa+1)^{-2}(\varkappa-1)^{-1}A_2^{\text{II}0}(\pi,\varkappa) \tag{3.5}$$

для ГИУ IV:

$$K_1^0(\pi)=-[\varkappa+1]^{-1}\lim_{\omega\to\pi}\{[A_1^{\text{IV}}(\omega)+B_1(\omega)]/\sin\omega\}-B_1(\pi)/(\varkappa\pi)$$
$$K_2^0(\pi)=-[\varkappa-1]^{-1}\lim_{\omega\to\pi}\{[A_2^{\text{IV}}(\omega)-B_4(\omega)]/\sin\omega\}+B_4(\pi)/(\varkappa\pi) \tag{3.6}$$

Угол $\omega=\pi$ является критическим, и около точки s_* с таким углом перемещения имеют вид

$$u_\rho(\rho,\theta)=f_\rho(s_*;\theta)+\{[(\varkappa-1)(\pi\varkappa)^{-1}B_4(\ln\rho-1)+K_{02}](\cos 2\theta+1)+$$
$$+[-(\varkappa+1)(\pi\varkappa)^{-1}B_1(\ln\rho-1)+K_{01}]\sin 2\theta-(\varkappa-1)(\pi\varkappa)^{-1}B_4\theta\sin 2\theta-$$
$$-(\pi\varkappa)^{-1}B_1\theta[(\varkappa+1)\cos 2\theta-\varkappa+1]+B_2\}\rho+u_\rho^*(\rho,\theta)$$
$$u_\theta(\rho,\theta)=f_\theta(s_*;\theta)+\{-[(\varkappa-1)(\pi\varkappa)^{-1}B_4(\ln\rho-1)+K_{02}]\sin 2\theta+$$
$$+[-(\varkappa+1)(\pi\varkappa)^{-1}B_1(\ln\rho-1)+K_{01}](\cos 2\theta+1)-(\pi\varkappa)^{-1}B_4\theta\times$$
$$\times[-(\varkappa+1)\cos 2\theta+\varkappa+1]+(\varkappa+1)(\pi\varkappa)^{-1}B_1\theta\sin 2\theta+B_3\}\rho+u_\theta^*(\rho,\theta) \tag{3.7}$$

Здесь $f_\rho(s_*;\ \theta)$, $f_\theta(s_*;\ \theta)$ — постоянное в декартовых координатах смещение $f_i(s_*)$, выраженное в полярных координатах. Для напряжений при $\omega=\pi$ получим

$$\sigma_{\rho\rho}=2\mu\{(\pi\varkappa)^{-1}B_4\ln\rho+(\varkappa-1)^{-1}K_{02}][(\varkappa-1)\cos 2\theta+2]+$$
$$+[-(\varkappa+1)(\pi\varkappa)^{-1}B_1\ln\rho+K_{01}]\sin 2\theta+$$
$$+(\pi\varkappa)^{-1}\theta[B_1[-(\varkappa+1)\cos 2\theta+2]-(\varkappa-1)B_4\sin 2\theta]+$$
$$+2(\varkappa-1)^{-1}B_2+(3-\varkappa)[\pi\varkappa(\varkappa-1)]^{-1}B_4\}+\sigma_{\rho\rho}^*$$
$$\sigma_{\theta\theta}=2\mu\{[(\pi\varkappa)^{-1}B_4\ln\rho+(\varkappa-1)^{-1}K_{02}][-(\varkappa-1)\cos 2\theta+2]-$$
$$-[-(\varkappa+1)(\pi\varkappa)^{-1}B_1\ln\rho+K_{01}]\sin 2\theta+$$
$$+(\pi\varkappa)^{-1}\theta[B_1[(\varkappa+1)\cos 2\theta+2]+(\varkappa-1)B_4\sin 2\theta]+$$
$$+\varkappa-1)^{-1}B_2+(\varkappa+1)[\pi\varkappa(\varkappa-1)]^{-1}B_4\}+\sigma_{\theta\theta}^*$$
$$\sigma_{\rho\theta}=2\mu\{-[(\pi\varkappa)^{-1}B_4\ln\rho+(\varkappa-1)^{-1}K_{02}](\varkappa-1)\sin 2\theta+$$
$$+[-(\varkappa+1)(\pi\varkappa)^{-1}B_1\ln\rho+K_{01}]\cos 2\theta+$$
$$+(\pi\varkappa)^{-1}\theta[B_1(\varkappa+1)\sin 2\theta+(\varkappa-1)B_4\cos 2\theta]-(\pi\varkappa)^{-1}B_1\}+\sigma_{\rho\theta}^*$$

Коэффициенты K_{01}, K_{02} локально через значения плотности ГИУ в точке s_* не выражаются, однако, переходя в формулах (3.1), (3.2) к пределу при $\omega\to\pi$, эти коэффициенты можно представить через значения регулярных членов представления коэффициентов интенсивности напряжений

$$K_{01}=-(\varkappa+1)K_1^0(\pi)-(\pi\varkappa)^{-1}B_1(\pi)-B_3(\pi)$$
$$K_{02}=-(\varkappa+1)K_2^0(\pi)-(\pi\varkappa)^{-1}B_4(\pi)-B_2(\pi) \qquad (3.8)$$

Подстановка в эти соотношения формул (3.5), (3.6) позволяет выразить K_{0i} через регулярные члены представления коэффициентов интенсивности плотности ГИУ II или IV.

При $0<\omega<\pi$ в асимптотиках (3.1), (3.2) $\gamma_n<0$ $(n=1\div 2)$ и, следовательно, члены с K_n можно объединить с u_i^*, σ_{ij}^* соответственно, т. е. опустить их в явной записи (3.1), (3.2). Таким образом, тогда главные части асимптотик даются членами u_i^0, σ_{ij}^0, явно выражающимися через заданные граничные функции $f_i'^{\mp}(s_*)$.

4. Асимптотики перемещений и напряжений для несжимаемой среды. Могут быть получены из (1.5) и (1.4) с помощью асимптотики плотности $Q_i^{\rm III}$, данной в [3], по аналогии со сжимаемым случаем. При этом, однако, нужно учесть, что неизвестное гладкое поле градиентов смещений, порожденных интегрированием по криволинейной части границы, является несжимаемым и сопровождается гладким полем давления.

Асимптотики перемещений и напряжений в окрестности точки s_* с углом $\omega\neq\omega_0$, π имеют вид (3.1), (3.2) соответственно, если положить там $\varkappa=1$, $\gamma_k(\omega)=\gamma_k^{\rm III}(\omega)$ $(k=1\div 2)$:

$$K_i(\omega)=A_i^{\rm III}(\omega)\operatorname{ctg}(\gamma_i\pi) \qquad (4.1)$$

и в качестве u_i^0 взять представления

$$u_\rho^0:=\{-[B_2-B_4(\cos\omega+\omega\sin\omega)/(\sin\omega-\omega\cos\omega)]\cos 2\theta-$$
$$-(B_1\operatorname{ctg}\omega+B_3)\sin 2\theta-B_4/(\sin\omega-\omega\cos\omega)\}\rho$$
$$u_\theta^0:=\{[B_2-B_4(\cos\omega+\omega\sin\omega)/(\sin\omega-\omega\cos\omega)]\sin 2\theta-$$
$$-(B_1\operatorname{ctg}\omega+B_3)\cos 2\theta+B_1/\sin\omega+2\theta B_4/(\sin\omega-\omega\cos\omega)\}\rho$$

(4.2)

а в качестве σ_{ij}^0 — представления

$$\sigma_{\rho\rho}^{\infty 0}=2\mu\{B_4(2\ln\rho-1)/(\sin\omega-\omega\cos\omega)-[B_2-B_4(\cos\omega+\omega\sin\omega)/$$
$$/(\sin\omega-\omega\cos\omega)]\cos 2\theta-(B_1\operatorname{ctg}\omega+B_3)\sin 2\theta\}-P_0$$
$$\sigma_{\theta\theta}^{\infty 0}=2\mu\{B_4(2\ln\rho+1)/(\sin\omega-\omega\cos\omega)+[B_2-B_4(\cos\omega+\omega\sin\omega)/$$
$$/(\sin\omega-\omega\cos\omega)]\cos 2\theta+(B_1\operatorname{ctg}\omega+B_3)\sin 2\theta\}-P_0$$
$$\sigma_{\rho\theta}^{\infty 0}=2\mu\{[B_2-B_4(\cos\omega+\omega\sin\omega)/(\sin\omega-\omega\cos\omega)]\sin 2\theta-$$
$$-(B_1\operatorname{ctg}\omega+B_3)\cos 2\theta\} \qquad (4.3)$$

Здесь P_0 — постоянные, не выражающиеся локально через значения плотности ГИУ III в точке s_*.

Учитывая гладкость коэффициентов интенсивности плотности $A_i^{III}(\omega)$ как функций параметра ω, исследованную в [4], получаем, что коэффициент интенсивности напряжений $K_1(\omega)$ непрерывен в интервале $\pi<\omega<<2\pi$, $K_2(\omega)$ — в интервале $\omega_0<\omega<2\pi$, если с изменением ω непрерывно меняется граница ∂D и почти везде — заданные на ней функции $f_i'(s)$. Представляя $K_i(\omega)$ в виде

$$K_1(\omega)=K_1^0(\omega)+[2\sin\omega]^{-1}B_1(\omega) \qquad (4.4)$$
$$K_2(\omega)=[K_2^0(\omega)-\pi B_4(\omega)/(\sin\omega-\omega\cos\omega)]\operatorname{ctg}(\gamma_2\pi)$$

из (4.1) и [4] можно увидеть, что функции $K_1^0(\omega)$, $K_2^0(\omega)$ будут уже непрерывны при $\omega=\pi$, $\omega=\omega_0$ соответственно, причем

$$K_1^0(\pi)=-\lim_{\omega\to\pi}\{[A_1^{III}(\omega)+B_1(\omega)]/(2\sin\omega)\}-\pi^{-1}B_1(\pi), \qquad K_2^0(\omega_0)=$$
$$=A_2^{III0}(\omega_0),$$

где функция $A_2^{III0}(\omega)$ непрерывна для $\pi\leqslant\omega<2\pi$.

Угол $\omega=\omega_0=\operatorname{tg}\omega_0$ является критическим, и около точки с таким углом перемещения имеют вид

$$u_\rho(\rho,\theta)=f_\rho(s_*;\theta)+K_1u_\rho^{(1)}(\theta)\rho^{1-\gamma_1}+\{[2(\omega^2\sin\omega)^{-1}\times$$
$$\times B_4(\ln\rho-1)+K_2^0(\omega)/\pi][(\cos\omega)^{-1}\cos 2\theta-1]-2(\omega^2\sin\omega\cos\omega)^{-1}\times$$
$$\times B_4\theta\sin 2\theta-(B_2-B_4\operatorname{ctg}\omega)\cos 2\theta-(B_1\operatorname{ctg}\omega+B_3)\sin 2\theta\}\rho+u_\rho^*(\rho,\theta)$$
$$u_\theta(\rho,\theta)=f_\theta(s_*;\theta)+K_1u_\theta^{(1)}(\theta)\rho^{1-\gamma_1}+\{[2(\omega^2\sin\omega)^{-1}\times$$
$$\times B_4(\ln\rho-1)+K_2^0(\omega)/\pi][-(\cos\omega)^{-1}\sin 2\theta+2\theta]-2(\omega^2\sin\omega)^{-1}\times$$
$$\times B_4\theta[\cos 2\theta/\cos\omega-1]+(B_2-B_4\operatorname{ctg}\omega)\sin 2\theta-$$
$$-(B_1\operatorname{ctg}\omega+B_3)\cos 2\theta+B_1/\sin\omega\}\rho+u_\theta^*(\rho,\theta)$$

Для напряжений при $\omega=\omega_0$ получим

$$\sigma_{\rho\rho}^\infty=K_1\sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\theta)\rho^{-\gamma_1}+2\mu\{[2(\omega^2\sin\omega)^{-1}B_4[(\ln\rho)^2+\theta^2]+2\pi^{-1}K_2^0(\omega)\ln\rho+$$
$$+[2(\omega^2\sin\omega)^{-1}B_4\ln\rho+K_2^0(\omega)/\pi][(\cos\omega)^{-1}\cos 2\theta-1]-$$
$$-2(\omega\sin^2\omega)^{-1}B_4\theta\sin 2\theta-(B_2-B_4\operatorname{ctg}\omega)\cos 2\theta-(B_1\operatorname{ctg}\omega+B_3)\sin 2\theta\}-$$
$$-P_0+\sigma_{\rho\rho}^*(\rho,\theta)$$

$$\sigma_{\theta\theta}{}^{\infty}=K_1\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\theta)\rho^{-\gamma_1}+2\mu\{[2(\omega^2\sin\omega)^{-1}B_4[(\ln\rho)^2+\theta^2]+2\pi^{-1}K_2{}^0(\omega)\ln\rho-$$
$$-[2(\omega^2\sin\omega)^{-1}B_4\ln\rho+K_2{}^0(\omega)/\pi][(\cos\omega)^{-1}\cos 2\theta-1]+$$
$$+2(\omega\sin^2\omega)^{-1}B_4\theta\sin 2\theta+(B_2-B_4\operatorname{ctg}\omega)\cos 2\theta+(B_1\operatorname{ctg}\omega+B_3)\sin 2\theta\}-$$
$$-P_0+\sigma_{\theta\theta}{}^*(\rho,\theta)$$
$$\sigma_{\rho\theta}{}^{\infty}=K_1\sigma_{\rho\theta}^{(1)}(\theta)\rho^{-\gamma_1}+2\mu\{-[2(\omega^2\sin\omega)^{-1}B_4\ln\rho+K_2{}^0(\omega)/\pi](\cos\omega)^{-1}\sin 2\theta-$$
$$-2(\omega^2\sin\omega)^{-1}B_4\theta[(\cos\omega)^{-1}\cos 2\theta-1]+(B_2-B_4\operatorname{ctg}\omega)\sin 2\theta-$$
$$-(B_1\operatorname{ctg}\omega+B_3)\cos 2\theta\}+\sigma_{\rho\theta}{}^*(\rho,\theta)$$

Здесь $B_i=B_i(\omega_0;\,f)$; функции $u_i^{(1)}(\rho,\theta)$, $\sigma_{ij}^{(1)}(\rho,\theta)$, как и для остальных углов даются соотношениями (3.1), (3.2) соответственно, если положить в них $\varkappa=1$, $K_1=K_1{}^{\mathrm{III}}(\omega_0)$.

Перейдем к случаю критического угла $\omega=\pi$. В окрестности точки с таким углом перемещения имеют вид (3.7), если положить в них $\varkappa=1$. Коэффициент K_{02} при этом явно выражается через граничные условия: $K_{02}=-B_2(\pi)-B_4(\pi)/\pi$. Коэффициент K_{01} через локальное значение плотности не выражается, но может быть с помощью (3.8) (при $\varkappa=1$) представлен через значения регулярных членов зависимости $K_1(\omega)$ от угла ω в (4.4). Напряжения тогда будут иметь вид

$$\sigma_{\rho\rho}{}^{\infty}=2\mu\{2\pi^{-1}B_4\ln\rho+2\theta\pi^{-1}B_1-(2\pi^{-1}B_1\ln\rho-K_{01})\sin 2\theta+$$
$$+K_{02}(\cos 2\theta+1)-2\pi^{-1}B_1\theta\cos 2\theta+B_2\}-P_0+\sigma_{\rho\rho}{}^*(\rho,\theta)$$
$$\sigma_{\theta\theta}{}^{\infty}=2\mu\{2\pi^{-1}B_4\ln\rho+2\theta\pi^{-1}B_1+(2\pi^{-1}B_1\ln\rho-K_{01})\sin 2\theta-$$
$$-K_{02}(\cos 2\theta+1)+2\pi^{-1}B_1\theta\cos 2\theta-B_2\}-P_0+\sigma_{\theta\theta}{}^*(\rho,\theta)$$
$$\sigma_{\rho\theta}{}^{\infty}=2\mu\{-(2\pi^{-1}B_1\ln\rho-K_{01})\cos 2\theta-K_{02}\sin 2\theta+$$
$$+\pi^{-1}B_1(2\theta\sin 2\theta-1)\}+\sigma_{\rho\theta}{}^*(\rho,\theta)$$

При $\omega<\omega_0\approx257{,}5^\circ$ степень сингулярности $\gamma_2{}^{\mathrm{III}}(\omega)<0$ и члены с коэффициентом K_2 в асимптотиках (3.1), (3.2) при $\varkappa=1$ для несжимаемой среды можно присоединить к $w_i{}^*$, $\sigma_{ij}{}^*$, т. е. опустить их в явной записи (3.1), (3.2). Точно также при $\omega<\pi$ можно опустить члены и с K_1, тогда главными членами асимптотики будут $u_i{}^0$, $\sigma_{ij}{}^{0\infty}$, даваемые (4.2), (4.3) и явно выражаемые через заданные граничные функции $f_i'(s_*\mp 0)$.

Отметим, что из приведенных результатов, в частности, видно, что при углах $\omega\leqslant\pi$ главные члены асимптотики перемещений и напряжений полностью определяются поведением заданных граничных перемещений около углов и могут быть вычислены без полного решения краевой задачи.

Представленные здесь асимптотики плотностей ГИУ дают возможность более точной аппроксимации плотности около углов при численном решении ГИУ, как это сделано в [14, 15] для задач с заданными усилиями, а значит, повысить точность решения задач с угловыми точками. Выражения (3.3), (3.4), (4.1) при этом позволяют и в задачах с заданными смещениями вычислять коэффициенты интенсивности напряжений по коэффициентам интенсивности плотности интегрального уравнения без численного дифференцирования и других дополнительных процедур, ведущих к снижению точности.

Отметим еще, что при численном решении коэффициенты асимптотик для критических углов ω_0, π, ω_{00} могут быть получены не только путем прямой аппроксимации плотностей или напряжений около углов, содержащей логарифмические члены, но и с учетом связи между коэффициентами критических и докритических асимптотик по значениям коэффициентов при достаточно близких докритических углах ω.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эскин Г. И.* Задача сопряжения для уравнений главного типа с двумя независимыми переменными // Тр. Моск. мат. о-ва. 1970. Т. 21. С. 245–292.
2. *Михайлов С. Е.* Решение задач об антиплоской деформации упругих тел с угловыми точками методом интегральных уравнений // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 6. С. 981–987.
3. *Costabel Martin, Stephan Ernst.* Curvature terms in the asymptotic expansions for solutions of boundary integral equations on curved polygons // J. Integr. Equat. 1983. V. 5. № 4. P. 353–371.
4. *Михайлов С. Е.* Асимптотики решений некоторых интегральных уравнений и плоских задач теории упругости вблизи углов при заданных на границе усилиях // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 3. С. 33–43.
5. *Михайлов С. Е.* Спектральные свойства и методы решения некоторых интегральных уравнений теории упругости для плоских неодносвязных тел с угловыми точками при заданных на границе усилиях // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 5. С. 52–62.
6. *Титчмарш В.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л.: Гостехиздат. 1948. 479 с.
7. *Williams M. L.* Stress singularities resultinge from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // J. Appl. Mech. 1952. V. 19. № 4. P. 526–528.
8. *Moffatt H. K., Duffy B. R.* Local similarity solutions and their limination // J. Fluid Mech. 1980. V. 96. Pt 2. P. 299–313.
9. *Ting T. C. T.* The wedge subjected to tractions: a paradox re-examined // J. Elasticity. 1984. V. 14. № 3. P. 235–247.
10. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1963. 367 с.
11. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
12. *Заргарян С. С.* Об асимптотике решений системы сингулярных интегральных уравнений, порожденной уравнениями Ламе, в окрестности угловых точек контура // Докл. АН АрмССР. 1983. Т. 77. № 1. С. 30–35.
13. *Аксентян О. К.* Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра/ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 1. С. 178–186.
14. *Клепиков В. П., Михайлов С. Е.* Применение метода граничных интегральных уравнений в расчете сварных узлов конструкций // Строит. механика и расчет сооружений. 1989. № 4. С. 4–7.
15. *Клепиков В. П., Михайлов С. Е.* Расчет элементов и узлов конструкций с концентраторами напряжений методом граничных интегральных уравнений // Машиноведение. 1989. № 5. С. 38–46.

Москва

Поступила в редакцию
17.X.1988