

толщина отколовшейся части равна 0,2 см. Взаимодействие пластических волн разрывания BP_2 и BP_4 привело к образованию в зоне их встречи области пониженных сжимающих напряжений, в которой при падении амплитуды волны сжатия ниже пороговой для обратного перехода, начался $\epsilon \rightarrow \sigma$ -переход, вследствие чего волна BP_2 преобразовалась в ударную YBP_2 . Аналогичной эволюции с волной BP_4 не произошло в силу заданной геометрии соударяющейся пары. Интерференция волн YBP_3 и YBP_2 привела в итоге ко второму отколу, дающему гладкие отколония поверхности. Толщина второго откола 0,36 см. Оставшаяся неразрушенной часть мишени составляет 0,7 см.

С целью выявления влияния фазового перехода в стали на ее разрушение был проведен аналогичный расчет без учета перехода. Конечная картина процесса показана на фиг. 7. Из нее видно, что в мишени произошел один откол, толщина оставшейся неразрушенной части преграды равна 0,83 см. Сравнение результатов показывает, что в сталях с фазовым переходом откольные явления поражают мишень на большую глубину, чем без учета полиморфного перехода.

О массовых скоростях отколовшихся частей можно судить по векторам скорости на фиг. 6, 7 (1 см модуля вектора соответствует 1 км/с).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новиков С. А. Прочность при квазистатическом и ударно-волновом нагружении // ФГВ. 1985. № 6. С. 77–85.
2. Белов Н. Н., Корнеев А. И., Николаев А. П. Численный анализ разрушения в плитах при действии импульсных нагрузок // ПМТФ. 1985. № 3. С. 132–136.
3. Глушко А. И. Исследование откола как процесса образования микропор // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 5. С. 132–140.
4. Романчычева Л. К., Рузанов А. И. Численное исследование откольных разрушений в меди // ПМТФ. 1982. № 4. С. 117–122.
5. Johnson J. N. Dynamics fracture and spallation in ductile solids // J. Appl. Phys. 1981. Vol. 52. № 4. P. 2812–2825.
6. Ахмадеев Н. Х., Нигматуллин Р. И. Ударные волны и фазовые превращения в железе // ПМТФ. 1976. № 5. С. 128–135.
7. Жуков А. В., Корнеев А. И., Симоненко В. Г. Численное моделирование фазовых переходов в ударных волнах // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 4. С. 138–142.
8. Корнеев А. И., Николаев А. П., Шиповский И. Е. Приложение метода конечных элементов к задачам соударения твердых деформируемых тел // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Матер. VII Всесоюз. конф. Новосибирск, 1982. С. 122–129.

Томск, Калинин

Поступила в редакцию
24.1.1989

УДК 539.3

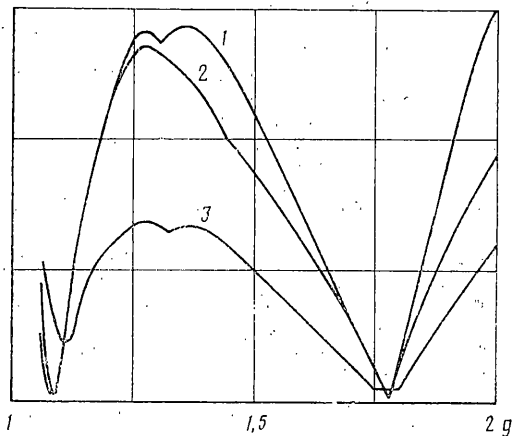
© 1991 г.

А. А. ГОЛОВИН

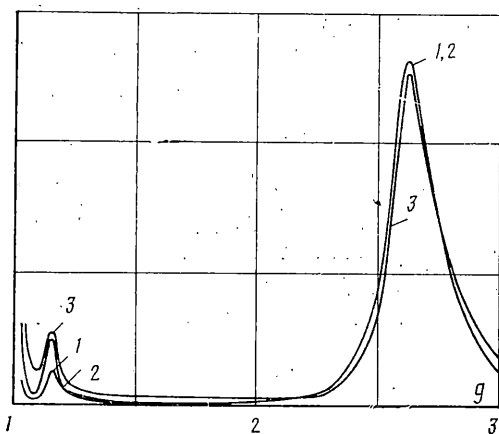
ОСОБЫЕ РАЗМЕРЫ ТОРОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК И ИХ ВЛИЯНИЕ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Наличие участка отрицательной гауссовой кривизны в оболочках приводит к существованию некоторых размеров этих участков, при которых жесткость оболочки и напряженно-деформированное состояние приобретают характерные свойства: при этих размерах оболочка становится либо податливой для некоторых видов нагрузки, т. е. жесткость оболочки для таких нагрузок становится малой, а напряженное состояние — близким к изгибному, либо наоборот, оболочка становится жесткой, а напряженное состояние — безмоментным. Назовем эти размеры особыми. Особые размеры и свойства оболочек ранее исследовались в основном для оболочек при наличии границ. В предлагаемой работе аналогичное исследование особых размеров выполнено для замкнутой тороидальной оболочки кругового поперечного сечения. Такие оболочки распространены в технике, однако в указанном аспекте они не исследовались. Трудность состоит в том, что получить достаточно простое аналитическое решение дифференциальных уравнений тороидальных оболочек не удастся, не удастся и написать выражения для особых размеров в виде формул, поэтому исследование выполнено численно.

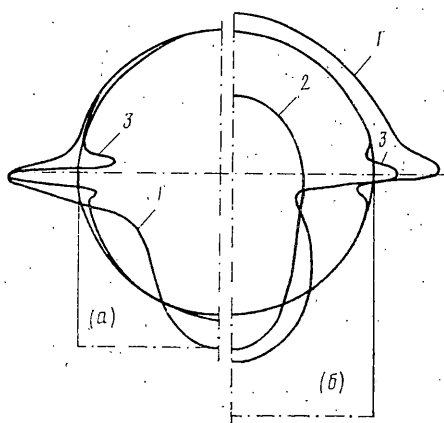
Как известно из [1], краевая задача для системы уравнений гиперболического типа в общем случае не корректна, потому что не всегда имеет решение. Торовая оболочка имеет участок отрицательной гауссовой кривизны. В безмоментной постановке система уравнений для данного участка будет иметь гиперболический вид, и из-за этого краевая задача для нее будет не всегда корректна. Это обстоятельство должно накладывать отпечаток и на поведение решения общих моментных уравнений, для которых краевая задача корректна в силу эллиптичности этой системы.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Пусть радиус a — радиус поперечного сечения тора, а C — расстояние между осью вращения тора и центром поперечного сечения, которое мы возьмем в качестве варьируемого параметра, определяющего геометрию торовой оболочки. Это расстояние в безразмерном виде будет равно $g = c/a$.

Вспользуемся системой обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого порядка, представленной в работе [2] и описывающей поведение оболочки вращения. В коэффициенты этой системы входят коэффициенты первой квадратичной формы и главные радиусы кривизны поверхности, при этом, имеем следующие безразмерные коэффициенты;

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \sin \theta + g, & A_2' &= \cos \theta, & A_2'' &= -\sin \theta \\
 A_1 &= 1, & A_1' &= 0, & R_1^{-1} &= 1, & R_2^{-1} &= A_2^{-1} \sin \theta \\
 & & & & R_2^4 R_2^{-1} &= -g A_2^{-2} \cos \theta
 \end{aligned}
 \quad (1)$$

где θ — угол, составляемый нормалью к серединной поверхности оболочки с осью ее симметрии;

В первом случае исследовался круговой тор, замкнутый в меридиональном направлении. Во втором — торовая оболочка, имеющая только участок отрицательной гауссовой кривизны с границей, проходящей вблизи асимптотической линии. Оболочки нагружались давлением, имеющим закон распределения $\sin \theta \cos 2\varphi$, где φ — окружная координата.

В результате расчета были получены зависимости компонент напряженно-деформированного состояния от параметра g .

На фиг. 1 показаны зависимости модуля наибольшего прогиба W (кривая 1) и модулей наибольших изгибных σ_G (кривая 2) и тангенциальных σ_T (кривая 3) напряжений для тора, замкнутого в меридиональном направлении. По оси абсцисс отложено межосевое расстояние g , изменяющее свое значение от 1 до 2. При этом:

в области минимумов тангенциальные напряжения в 3–6 раз превышают изгибные, то есть наблюдается наличие преимущественно безмоментного напряженного состояния, а в области максимума изгибные напряжения превышают тангенциальные. При увеличении параметра g , начиная с минимума $g=1,76$, происходит монотонный и пропорциональный рост всех трех кривых, что можно объяснить переходом тора по свойствам от оболочки к криволинейному стержню.

На фиг. 2 приведены зависимости от параметра g для модулей наибольшего прогиба W (кривая 1) и модулей наибольших изгибных σ_G (кривая 2) и тангенциальных σ_T (кривая 3) напряжений для тора, имеющего только участок отрицательной гауссовой кривизны. В данном случае зависимости напряжений от параметра g характерны тем, что в области минимумов напряженного состояния, тангенциальные напряжения значительно превышают изгибные, а в области максимумов наблюдается выравнивание величин тангенциальных и изгибных напряжений. Что касается прогибов, то в области второго минимума, который очень слабо выражен, они на два порядка меньше, чем в районе первого максимума и на три, чем в районе второго. При $g > 3$ данный тор постепенно теряет «косые» свойства, и, при дальнейшем увеличении g , все больше по свойствам стремится к цилиндрической панели: исследуемые параметры практически не зависят от g , а напряженное состояние является существенно безмоментным.

Таким образом, можно отметить, что у тора незамкнутого в меридиональном направлении в районе малых прогибов преобладает безмоментное напряженное состояние.

На фиг. 3, а представлены эпюры $W(\theta)$, $\sigma_{T1}(\theta)$, $\sigma_{G1}(\theta)$ по образующей торовой оболочки, замкнутой в меридиональном направлении, соответствующие максимальным и минимальным значениям модулей наибольших по меридиану величин σ_{G1} для значений параметра g равных 1,23 и 1,71.

На фиг. 3, а показаны зависимости для $g=1,23$. Цифрой 1 обозначен график $W = f_1(\theta)$, цифрой 2 — $\sigma_{T1} = f_2(\theta)$, 3 — $\sigma_{G1} = f_3(\theta)$. Из представленных графиков видно, что для данного размера характерна большая изменчивость напряженно-деформированного состояния в районе асимптотической линии ($\theta=0, \pi$) и существенное преобладание модуля наибольшего изгибного напряжения σ_{G1} над модулем наибольшего касательного напряжения σ_{T1} , и можно говорить о преимущественно моментном напряженном состоянии. В отличие от участка положительной гауссовой кривизны, на участке отрицательной гауссовой кривизны прогибы имеют гораздо большие значения, сравнимые с наибольшими значениями $|W|$, приходящимися на область асимптотической линии. Там же находится и $|\sigma_{G1 \max}|$.

На фиг. 3, б представлены графики для тора с размером $g=1,71$. Это соответствует второму и наименьшему минимуму напряженно-деформированного состояния (см. фиг. 1). Из анализа зависимостей следует, что в области асимптотической линии имеется большая изменчивость W и σ_G ; на участке положительной гауссовой кривизны напряженное состояние изменяется слабо, на участке отрицательной гауссовой кривизны прогибы и напряжения изменяются существенно. При этом, наибольшие значения всех компонент приходятся на область, прилегающую к асимптотической линии. Также заметно существенное преобладание σ_{T1} над σ_{G1} по всему меридиану тора, что свидетельствует о преимущественно безмоментном напряженном состоянии для данного размера торовой оболочки. Анализируя большое количество графиков W , σ_{T1} , σ_{G1} от меридиональной координаты θ для различных значений g , можно сделать общие для всех них выводы: в районе асимптотической линии имеет место большая изменчивость напряженно-деформированного состояния и на эту зону приходятся большие величины напряжений и перемещений. На участке отрицательной кривизны изменчивость меньше, но все равно, достаточно велика. На участке положительной кривизны изменчивость напряженно-деформированного состояния слабая. Результаты численного исследования сопоставлялись с результатами приближенного аналитического исследования особых размеров тороидальных оболочек. Аналитическая зависимость была получена в соответствии со следующим обстоятельством: напряженное состояние оболочек отрицательной и нулевой кривизны сильно зависит от поведения асимптотических линий, которые, в случае статического нагружения оболочки, совпадают с характеристиками безмоментной системы уравнений.

Известно, что вдоль асимптотических линий напряженно-деформированное состояние изменяется слабо, и поэтому возмущения распространяются достаточно далеко. Предполагается, что особый размер может проявиться тогда, когда возникает состояние, при котором, при обходе по асимптоте всей области происходит замыкание асимптотической линии.

Для тороидальной оболочки вращения уравнение характеристик получается из следующего дифференциального оператора Λ , определяющего главный оператор вырожденной (безмоментной) системы уравнений:

$$\Lambda = (A_2^{-2}R_1^{-1})(\partial^2 T_1 / \partial \alpha_2^2) + (A_1^{-2}R_2^{-1})(\partial^2 T_1 / \partial \alpha_1^2) \quad (2)$$

$$\alpha_2 = \varphi, \quad \alpha_1 = \theta, \quad A_2^{-2}R_1^{-1} = a_{11}, \quad A_1^{-2}R_2^{-1} = a_{22}$$

Уравнение характеристик будет иметь вид:

$$d\theta/d\varphi = (-A_2^2 R_1 A_1^{-2} R_2^{-1})^{1/2} \quad (3)$$

Подставляя (1) в (3) получим

$$d\varphi = (-\sin \theta (\sin \theta + g))^{1/2} d\theta$$

Для того, чтобы асимптотическая линия замыкалась, при изменении φ от 0 до 2π , необходимо, чтобы выполнялось условие

$$2n\pi/k = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (-\sin \theta (\sin \theta + g))^{-1/2} d\theta$$

в котором n и k — целые числа. Поясняя смысл условия (5) отметим, что характеристика при этих n и k на участке тора отрицательной гауссовой кривизны, являясь периодической линией, поочередно касается «верхней» и «нижней» линий нулевой кривизны тора. При этом n означает количество периодов, которое имеет характеристика до замыкания, а k — количество полных оборотов по параллели, которое она при этом совершает. Отношение n/k образует при этом множество рациональных чисел. Учитывая то, что напряженное состояние вдоль характеристик затухает слабо, в случае небольших чисел n и k (то есть небольшой длины характеристики), при замыкании, напряженное состояние может существенно возрасти. Уравнение (5) служит для определения таких особых соотношений размеров n/k .

Решение уравнения (5) может быть получено аналитически. При этом получается трансцендентное уравнение, правая часть которого представляется в эллиптических функциях. Однако практически решение уравнения (5) удобнее получать численно. В результате численного решения уравнения (5) были получены следующие значения для параметра g и чисел n, k ; $n=1, 2, 3, 4$; $k=2, 3, 4, 5, 7$.

Первый размер $g \approx 1,075$. Этот размер приблизительно соответствует первому минимуму компонент W, σ , полученному выше, исходя из полной моментной теории. При этом, характеристики замыкаются через два периода за три обхода по параллели. Второй размер $g \approx 1,30$. Этот размер соответствует первому максимуму компонент W, σ , замыкание происходит через один период за два обхода. Третий размер $g \approx 1,63$. Этот размер приблизительно соответствует второму минимуму компонент W, σ . Замыкание осуществляется через два периода, после пяти оборотов, т. е. $n=2, k=5$. Четвертый размер: $g=2,65$. Этот размер соответствует второму максимуму и присутствует только у тора незамкнутого в меридиональном направлении. Характеристики замыкаются через два периода за семь обходов по параллели $n=2, k=7$.

Численному исследованию была подвергнута область $1 < g < 5$. Было установлено, что все решения n, k заключены в пределах $0 < n/k < 1$, так как для наименьшего значения g , равного 1 (что соответствует тору с нулевым внутренним радиусом) интеграл правой части не дает значения большего, чем 2π .

Сопоставление полученных приближенным способом особых размеров с особыми размерами, полученными из численных решений выполнены в виде таблицы. В ней приведены все особые размеры, полученные на основании вышеописанных расчетов и формулы (5). Как видно из этой таблицы, получилось достаточно хорошее совпадение численных и аналитических результатов.

	1a	1b	11a	11b
замкнутый тор	1,082	1,27	1,76	—
незамкнутый тор	1,060	1,15	1,70	2,63
приближенная формула	1,075	1,30	1,63	2,65

В работе выполнено исследование размеров торовой оболочки в случае, когда действующая на нее нагрузка меняется по закону $\cos 2\varphi$ в окружном направлении. Аналогичные результаты получаются в случае действия нагрузок, меняющихся по закону $\cos 3\varphi, \cos 4\varphi$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев С. Л. Пример корректной краевой задачи для уравнений колебаний струны с данными по всей границе // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109. № 4. С. 707—709.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.VI.1989