МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1991

УДК 531.8

Б. В. АКСЕЛЬРОД

ОПИСАНИЕ ДИНАМИКИ МАНИПУЛЯТОРА НА ДВИЖУЩЕМСЯ ОСНОВАНИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ВИНТОВ

Выводятся уравнения Лагранжа второго рода в избыточных координатах для манипулятора с абсолютно твердыми звеньями, соединенными вращательными и поступательными парами. Допускается учет сосредоточенной упругости соединений. Предлагаемые уравнения являются обобщением уравнений [1] на случай манипулятора с произвольной кинематической цепью (в том числе с замкнутыми контурами) на движущемся основании. Кинетическая энергия вычисляется с использованием кинематических винтов, представляемых трехмерными векторами с дуальными координатами [2, 3].

1. **Введение.** Явная форма уравнений динамики манипуляционного робота служит основой для исследования его движения. В первую очередь это относится к построению асимптотических решений уравнений движения [4, 5], к исследованию влияния параметров на динамические характеристики робота [5] и многим другим подходам аналитического и полуаналитического характера. Среди таких уравнений для неветвящихся незамкнутых кинематических цепей наибольшее распространение получили уравнения Р. Пола на основе матриц преобразования координат размера 4×4 [6—8]. Использование этих уравнений при решении обратной задачи динамики для манипулятора с N кинематическими парами (по известному движению определяются соответствующие ему силы) без учета умножения на единицы и нули и сложения с нулями требует $3N^4+10{,}5N^3+89N^2+80{,}5N-108$ операций умножения и $3N^4+10N^3+67{,}5N^2+59{,}5N-81$ операций сложения. Учет симметрии уравнений позволяет сократить количество умножений до $1{,}5N^4+9{,}5N^3+90{,}5N^2+81{,}5N-108$, количество сложений — до $1{,}5N^4+9N^3+69N^2+60{,}5N-81$. Отметим, что эти значения меньше часто используемых данных работы [9], которые заведомо ошибочны, так как при некоторых значениях N дают дробное число операций (например, при $N=1$, 2). Использование уравнений, получаемых на основе кинематических винтов [1], дает возможность значительно сократить объем вычислений. Так же без учета умножения на единицы и нули и сложения с нулями уравнения [1] требуют $2{,}25N^4+5{,}5N^3+11{,}75N^2-44{,}5N+27$ $(2{,}25N^4+N^3+79{,}25N^2-215{,}5N+135)$ операций умножения и $2{,}25N^4+4N^3+6{,}75N^2-35N+21$ $(2{,}25N^4+0{,}5N^3+59{,}25N^2-168N+105)$ операций сложения, а с учетом симметрии уравнений — $2{,}25N^4+4{,}5N^3+11{,}75N^2-43{,}5N+27$ $(2{,}25N^4+79{,}25N^2-214{,}5N+135)$ умножений и $2{,}25N^4+3N^3+6{,}75N^2-34N+21$ $(2{,}25N^4-0{,}5N^3+59{,}25N^2-167N+105)$ сложений. В скобках даются значения при $N\geqslant13$, когда для промежуточных вычислений выгоднее определять матрицы преобразования T_{ki} [1] целиком, а не только их один столбец.

Таким образом, если симметрия уравнений не принимается во внимание, уравнения с применением винтов [1] уменьшают количество арифметических операций по сравнению с уравнениями Р. Пола [6—8] при любом числе звеньев (при $N=6$ — в 2,3 раза). Если же использовать симметрию уравнений, то уравнения на основе винтов [1] оказываются эффективнее уравнений Р. Пола при $N \leqslant 15$. При $N=3$ число арифметических операций в этом случае снижается в 4,4 раза, при $N=4$ — в 2,9 раза, при $N=5$ — в 2,25 раза, при $N=6$ — в 1,9 раза, при $N=7$ — в 1,6 раза, при $N=10$ — в 1,2 раза. В связи с высокой вычислительной эффективностью полученных с применением кинематических винтов уравнений [1] представляется целесообразным применить винты и в более общем случае манипулятора с произвольной кинематической цепью.

2. Постановка задачи. Рассматривается манипулятор с абсолютно твердыми звеньями, соединенными n вращательными и поступательными парами. Сосредоточенная упругость учитывается путем введения m фиктивных кинематических пар, соответствующих упругим деформациям. После введения фиктивных «упругих» кинематических пар их общее число становится $N=n+m$ и манипулятор состоит из M звеньев, $M \leqslant N$. Равенство имеет место при отсутствии замкнутых контуров. Робот движется под действием n управляющих сил (моментов) приводов, силы трения, силы тяжести, а также силы и момента, действующих на схват.

Линейная и угловая скорости движения основания $\mathbf{v}_0$ и $\boldsymbol{\omega}_0$ относительно неподвижной системы координат заданы как функции времени, $\dot{\mathbf{v}}_0=\mathbf{w}_0$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_0=\boldsymbol{\varepsilon}_0$. Заданы также соответствующий алгебраический вектор $\boldsymbol{\varphi}_0$, определяющий ориентацию основания (например, кватернион, или углы Эйлера и т. п.), и вектор линейных перемещений основания $\mathbf{R}_0$, $\dot{\mathbf{R}}_0=\mathbf{v}_0$.

Уравнения Лагранжа второго рода будем составлять с применением метода Жильбера, при котором кинетическая энергия вычисляется без учета поступательного движения основания манипулятора, а к действующим на манипулятор силам добавляются переносные силы инерции.

3. Описание кинематической цепи манипулятора. Для описания манипулятора с произвольной кинематикой необходимо ввести упорядоченность кинематических пар и звеньев. Пронумеруем все кинематические пары (включая «упругие»). Нумеруются также звенья (после введения «упругих» кинематических пар). В манипуляторе, звенья которого образуют одну разомкнутую неветвящуюся цепь [1], удобно нумеровать звенья и предшествующие им кинематические пары от 1 до N, считая от основания.

От кинематической пары, примыкающей к основанию в точке, где задана линейная скорость основания (а если основание совершает только поступательное движение — то от любой примыкающей к нему кинематической пары), к каждому звену проведем некоторый путь, проходящий через кинематические пары таким образом, что любые две последовательные кинематические пары примыкают к одному звену. Очевидно, что при наличии замкнутых контуров такой путь не единственный. При этом можно выбрать любой путь, однако удобнее брать тот, где проходится меньше кинематических пар.

Номера кинематических пар, лежащих на выбранном пути к i-му звену, образуют множество W_i, упорядоченное в соответствии с последовательностью их прохождения на рассматриваемом пути. В этом множестве могут быть выделены подмножество W_{ik}^+, состоящее из номеров тех кинематических пар, которые следуют после k-й кинематической пары, и подмножество W_{ik}^-, содержащее номера кинематических пар, предшествующих k-й кинематической паре ($W_i=W_{ik}^- \cup \{k\} \cup W_{ik}^+$).

Определим множество G_j, где j — номер некоторой кинематической пары, как совокупность всех тех номеров i звеньев, для которых $j \in W_i$. Для номеров двух кинематических пар j и k можно задать подмножество G_{jk} множеств G_j и G_k, состоящее из номеров тех звеньев, на пути к которым k-я кинематическая пара следует после j-й.

Рассмотрение частного случая, когда манипулятор имеет незамкнутую кинематическую цепь, упрощается за счет того, что порядок прохождения кинематических пар на пути от основания к любому звену не зависит от самого звена. Это позволяет задать множество номеров кинематических пар, предшествующих k-й кинематической паре R_k^-, и множество R_k^+, состоящее из номеров тех кинематических пар, которые следуют за ней. Тогда множества G_{jk} можно не определять, а для множеств W_{ij}^- и W_{ij}^+ имеет место $W_{ij}^-=R_j^-$, $W_{ij}^+=W_i \cap R_j^+$.

4. Вычисление коэффициентов уравнений Лагранжа робота. Введем правые декартовы системы координат, жестко связанные со звеньями и основанием манипулятора, а также неподвижную систему координат $x'y'z'$ с осью z', направленной вертикально вверх. Уравнения манипулятора, согласно методу Жильбера, будем записывать относительно системы $x_0'y_0'z_0'$ с началом координат, совпадающим с началом координат связанной с основанием системы $x_0y_0z_0$, и движущейся поступательно с ускорением $\mathbf{w}_0$ относительно неподвижной системы $x'y'z'$. При этом необходимо будет учесть переносные силы инерции. Система $x_0y_0z_0$ вращается относительно $x_0'y_0'z_0'$ с теми же угловыми скоростью $\boldsymbol{\omega}_0$ и ускорением $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, что и относительно неподвижной системы $x'y'z'$, так как $x_0'y_0'z_0'$ движется поступательно.

Каждому звену i ставится в соответствие одна основная связанная система координат $x_iy_iz_i$ с осью x_i, направленной по оси той кинематической пары, которая непосредственно предшествует i-му звену в соответствии с путем от основания к этому звену. Если через k-ю кинематическую пару, примыкающую к i-му звену, проходят пути к другим звеньям, то вводится также вспомогательная связанная с i-м звеном система координат $x_i^ky_i^kz_i^k$ с осью x_i^k, направленной по оси k-й кинематической пары. В частности, если $k \in W_i$, то системы координат $x_iy_iz_i$ и $x_i^ky_i^kz_i^k$ совпадают.

Напомним, что кинематический винт $\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\omega}+\varkappa\mathbf{v}$ и динамический винт $\mathbf{P}=\mathbf{F}+\varkappa\mathbf{M}$ определяются как дуальные векторы [2]. Здесь $\varkappa$ — оператор Клиффорда, $\varkappa^2=0$; $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{F}$ — векторы угловой скорости, линейной скорости, момента и силы соответственно. Векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{F}$ называются главными частями винтов, а $\mathbf{v}$ и $\mathbf{M}$ — моментными частями, обозначаемыми $\mathrm{mom}(\boldsymbol{\Omega})$ и $\mathrm{mom}(\mathbf{P})$.

Винт, описывающий движение i-го звена относительно системы координат $x_0'y_0'z_0'$, определяется [3] равенством

$$\boldsymbol{\Omega}_i=\boldsymbol{\Omega}_{0i}+\sum_{k\in W_i}\boldsymbol{\Omega}_{ki} \tag{4.1}$$

в котором $\boldsymbol{\Omega}_{0i}$ — винт, описывающий движение i-го звена вследствие вращения основания с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0$ (поступательное движение основания здесь не учитывается), $\boldsymbol{\Omega}_{ki}$ — винт, задающий движение i-го звена вследствие перемещения в k-й кинематической паре. Эти винты можно определить с помощью дуальных (3×3) матриц преобразования винтов от систем координат $x_0'y_0'z_0'$ и $x_l^ky_l^kz_l^k$ к системе $x_iy_iz_i$ [2]:

$$\boldsymbol{\Omega}_{0i}=T_{0i}\boldsymbol{\Omega}_{00}, \quad \boldsymbol{\Omega}_{ki}=T_{ki}\boldsymbol{\Omega}_{kl} \tag{4.2}$$

Здесь $\boldsymbol{\Omega}_{00}=\boldsymbol{\omega}_0$, причем $\boldsymbol{\omega}_0$ проектируется на оси системы $x_0y_0z_0$, $\boldsymbol{\Omega}_{kl}$ — винт, описывающий движение в k-й кинематической паре, спроектированный на оси системы следующего за ней l-го звена $x_l^ky_l^kz_l^k$. При выборе ориентации осей $x_0y_0z_0$ следует по возможности стремиться к тому, чтобы $\omega_{0y}=\omega_{0z}=0$ или хотя бы одна из проекций ω_{0y}, ω_{0z} была бы нулевой. Это позволило бы не вычислять столбцы матриц T_{0i}, соответствующие нулевым проекциям угловой скорости ω_0. В дальнейшем, однако, будем считать, что имеет место общий случай, т. е. все составляющие ω_0 отличны от нуля.

В качестве обобщенных координат манипулятора q_k выбираются углы относительного поворота вращательных пар и относительные перемещения поступательных пар. Тогда винт движения в k-й кинематической паре определяется одним из следующим двух соотношений:

$$\Omega_{kl}=(q_k^{\cdot}+\varkappa 0,\ 0+\varkappa 0,\ 0+\varkappa 0)^{\mathrm{T}}=(1,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}} q_k^{\cdot} \qquad (4.3)$$

$$\Omega_{kl}=(0+\varkappa q_k^{\cdot},\ 0+\varkappa 0,\ 0+\varkappa 0)^{\mathrm{T}}=(1,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}} \varkappa q_k^{\cdot} \qquad (4.4)$$

Если k-я кинематическая пара вращательная, то имеет место (4.3), а если она поступательная, то берется (4.4). Символ т здесь и далее обозначает транспонирование.

Выражение (4.2) с учетом возможного вида винтов (4.3), (4.4) позволяет записать

$$\Omega_{0i}=T_{0i}\omega_0,\quad \Omega_{ki}=\mathfrak{t}_{ki}q_k^{\cdot} \qquad (4.5)$$

где $\mathfrak{t}_{ki}=\mathbb{T}_{ki}^1$, если k-я пара вращательная, и $\mathfrak{t}_{ki}=\varkappa\mathbb{T}_{ki}^1$, если она поступательная. Винт $\mathbb{T}_{ki}^1$ определяется как первый столбец матрицы T_{ki}.

Матрица T_{ki} в случае, если кинематическая пара k не примыкает непосредственно к i-му звену, определяется равенством

$$T_{ki}=\prod_{m\in W_{ik}^{+}} T_m^l \qquad (4.6)$$

в котором T_m^l — матрица преобразования винта из системы координат, непосредственно предшествующей m-й кинематической паре, в следующую за ней на пути к i-му звену систему $x_l^m y_l^m z_l^m$. Индекс звена l необходимо указывать, так как в общем случае предлагаемый метод позволяет на путях к разным звеньям проходить одну и ту же кинематическую пару в разных направлениях (кроме кинематических пар, примыкающих к основанию). Впрочем, разнонаправленное прохождение через одну кинематическую пару увеличивает объем вычислений. В произведении (4.6) матрица, соответствующая последующей кинематической паре, записывается слева. Так как для выражения (4.5) требуется определить лишь первый столбец матрицы T_{ki}, то в произведении вычисляется только этот столбец (если k-я пара поступательная — только главная часть первого столбца). В случае, если k-я кинематическая пара непосредственно предшествует i-му звену (при этом $W_{ik}^{+}=0$), то T_{ki} — единичная матрица.

Матрица T_{0i} определяется соотношением $T_{0i}=T_{ai}T_a$, где a — кинематическая пара, примыкающая к основанию в точке, где задано движение основания. При $\omega_0=0$ в общем случае индекс a может принимать одно из нескольких значений.

Матрицу T_m^l можно определить в соответствии с [10]. Пусть координаты начала системы координат $x_l^m y_l^m z_l^m$ в системе, соответствующей кинематической паре, которая непосредственно предшествует m-й, равны $(b_{xm},\ b_{ym},\ b_{zm})$, а поворот задается матрицей R_m, позволяющей определить координаты точки в системе $x_l^m y_l^m z_l^m$ по ее координатам в предшествующей системе при совмещении начал координат. Тогда для вращательной пары $T_m^l=R_m(q_m)B_m$, а для поступательной пары $T_m^l=B_m(q_m)R_m$ или $T_m^l=R_mB_m(q_m)$, где

$$B_m=\begin{bmatrix} 1 & \varkappa b_{zm} & -\varkappa b_{ym} \\ -\varkappa b_{zm} & 1 & \varkappa b_{xm} \\ \varkappa b_{ym} & -\varkappa b_{xm} & 1 \end{bmatrix}$$

Если для поступательной пары воспользоваться первым из указанных для нее соотношений (поворот, затем параллельный перенос), то матрица B_m имеет более простой вид (лишь b_{xm} зависит от q_m). Преимущество же второго выражения состоит в том, что оно имеет такой же вид, что и выражение для вращательной пары (однако от q_m могут зависеть все три величины b_{xm}, b_{ym}, b_{zm}, а сами зависимости являются линейными функциями с коэффициентами при q_m, равными косинусам углов между соответствующими осями).

Отметим, что дуальные матрицы преобразований винтов являются, как и обычные матрицы поворота, ортогональными. Следовательно, матрица обратного преобразования получается простым транспонированием. Другим преимуществом использования дуального представления винтов по сравнению с шестикомпонентным [1] является его большая физическая наглядность, создающая удобства при анализе уравнений.

Кинетическую энергию M-звенного манипулятора можно записать следующим образом [3]:

$$T=\sum_{i=1}^{M} 1/2\,\mathrm{mom}\,(\mathbf{A}_i\cdot\mathbf{\Omega}_i,\ \mathbf{\Omega}_i) \tag{4.7}$$

В этом выражении используется относительный момент двух винтов, который является моментной частью их скалярного произведения: если винт $\mathbf{R}_1=R_1+\varkappa R_1^0$ и винт $\mathbf{R}_2=R_2+\varkappa R_2^0$ (R_1, R_2, R_1^0, R_2^0 — обычные векторы), то $\mathrm{mom}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)=R_1\cdot R_2^0+R_1^0\cdot R_2$; $\mathbf{A}_i=(A_i,\ A_i^*)$ — бинор инерции i-го звена: $\mathbf{A}_i\cdot\mathbf{R}_1=A_i\cdot R_1+A_i^*\cdot R_1^0$. Дуальные матрицы A_i и A_i^* имеют вид

$$A_i=\begin{bmatrix} \varkappa J_{xi} & S_{zi}-\varkappa D_{xyi} & -S_{yi}-\varkappa D_{xzi} \\ -S_{zi}-\varkappa D_{xyi} & \varkappa J_{yi} & S_{xi}-\varkappa D_{yzi} \\ S_{yi}-\varkappa D_{xzi} & -S_{xi}-\varkappa D_{yzi} & \varkappa J_{zi} \end{bmatrix}$$

$$A_i^*=\begin{bmatrix} m_i & -\varkappa S_{zi} & \varkappa S_{yi} \\ \varkappa S_{zi} & m_i & -\varkappa S_{xi} \\ -\varkappa S_{yi} & \varkappa S_{xi} & m_i \end{bmatrix}$$

где m_i — масса i-го звена, S_{xi}, S_{yi}, S_{zi} — координаты центра масс i-го звена, умноженные на m_i; J_{xi}, J_{yi}, J_{zi} — осевые моменты инерции, D_{yzi}, D_{xzi}, D_{xyi} — центробежные моменты инерции. Все эти характеристики задаются в связанной системе координат $x_iy_iz_i$.

Выражение кинетической энергии манипулятора (4.7) с учетом соотношений (4.1), (4.5) и свойств относительного момента двух винтов [1] преобразуется к следующему виду:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{k\in W_t}\sum_{l\in W_t} a_{kl}\dot q_k \dot q_l+\mathrm{mom}\left(\sum_{i=1}^{M}\sum_{k\in W_t} T_{0i}{}^{A}\cdot t_{ki}\dot q_k,\ \boldsymbol{\omega}_0\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\,\mathrm{mom}\left(\sum_{i=1}^{M} T_{0i}{}^{A}\cdot T_{0i}\boldsymbol{\omega}_0,\ \boldsymbol{\omega}_0\right) \tag{4.8}$$

где введены обозначения $a_{kl}=\mathrm{mom}\,(A_i\cdot t_{ki},\ t_{li})$, $T_{0i}{}^{A}=T_{0i}{}^{T}A_i$.

В общем случае манипулятор может содержать K независимых замкнутых контуров. Условия неразрывности замкнутых контуров означают, что винт, описывающий относительное движение системы $x_i^{m_k}y_i^{m_k}z_i^{m_k}$ вследствие перемещений во всех кинематических парах k-го контура, равен нулю. Это позволяет записать уравнения связей в винтовой форме

$\sum t_{n_k m_k} \dot{q}_{n_k} = 0$ (суммирование по номерам n_k всех кинематических пар, входящих в k-й контур; $k=1, \ldots, K$). Эти уравнения дают $6K$ скалярных линейных уравнений, получаемых из условия равенства нулю главной и моментной частей суммы винтов. Пусть из них L уравнений являются независимыми (плоский контур дает не более трех скалярных уравнений, пространственный — не более шести):

$$\sum_{j=1}^{N} \beta_{lj} \dot{q}_j = 0 \qquad (l=1, \ldots, L) \tag{4.9}$$

При этом координаты q_k не являются независимыми и не могут быть приняты за обобщенные координаты. Возможны два подхода. При первом подходе среди N координат q_k выбирается $N-L$ независимых координат, остальные L координат выражаются через них, что делает выражение кинетической энергии (4.8) и получаемые на его основе уравнения динамики еще более громоздкими. При втором подходе в соответствии с [11] относительные перемещения в кинематических парах q_k принимаются за избыточные обобщенные координаты. Левые части уравнений Лагранжа, а также все обобщенные силы записываются, как и при независимых координатах. В правых же частях появляются добавки $\sum \lambda_l \beta_{lj}$ (суммирование по l от 1 до L), учитывающие связи и имеющие физический смысл обобщенных реакций связей, обусловленных замкнутыми контурами. Кроме того, все координаты при этом входят в уравнения одинаково и не требуется заранее выделять «привилегированные» независимые координаты. Таким образом, второй подход, состоящий в введении избыточных координат, позволяет получить уравнения динамики в более компактном виде и с меньшими алгоритмическими трудностями, что особенно ценно при автоматизированном составлении уравнений с помощью ЭВМ. В дальнейшем в статье используется этот подход.

Необходимо также вычислить обобщенные силы по отношению к избыточным обобщенным координатам q_k. Потенциальная энергия манипулятора в поле переносной силы инерции вычисляется аналогично потенциальной энергии в поле силы тяжести [12]:

$$\Pi_w = \left\| \sum_{i=1}^{M} m_i \mathbf{r}_{ci} \right\|^{\mathrm{T}} \mathbf{w}_0 \tag{4.10}$$

где $\mathbf{r}_{ci}$ — вектор центра масс i-го звена относительно подвижного основания, определяемый как функция обобщенных координат q_k ($k \in W_i$) и $\boldsymbol{\varphi}_0$, $\mathbf{R}_0$ (линейная зависимость от $\mathbf{R}_0$ устраняется после дифференцирования по q_j) согласно [1, 6—8]. Манипулятор обладает также потенциальной энергией в поле силы тяжести Π_G, определяемой в соответствии с [1, 6—8], и потенциальной энергией сил сосредоточенной упругости Π_f. Из непотенциальных сил в j-й кинематической паре учитываются силы (моменты) привода (в n кинематических парах) и трения, создающие обобщенную силу Q_j [1, 8], и силовое воздействие на схват $\mathbf{P}_*$, дающее, согласно [11], обобщенную силу $Q_j^* = \mathrm{mom}(d\boldsymbol{\Omega}_*/d\dot{q}_j, \mathbf{P}_*)$. Здесь $\boldsymbol{\Omega}_*$ — кинематический винт схвата в точке приложения внешнего динамического винта $\mathbf{P}_*$. Использование (4.1) и (4.6) позволяет преобразовать это выражение к виду

$$Q_j = \mathrm{mom}(\mathbf{t}_{j*}, \mathbf{P}_*) \tag{4.11}$$

В этом выражении $\mathbf{t}_{j*}$ — умноженный на $\varkappa$, если j-пара является поступательной, первый столбец матрицы преобразования винта от j-й кинематической пары к системе координат схвата с началом координат в точке приложения силового воздействия.

5. Уравнения динамикиманипуляционного робота. Манипуляционный робот описывается кинематическими уравнениями связей (4.9) и получаемыми на основе (4.8), (4.10), (4.11) с учетом свойств относительного момента двух винтов [1] уравнениями Лагранжа второго рода, имеющими следующий вид:

$$\begin{gathered}\sum_{i\in G_j}\sum_{k\in W_i} a_{jk}\ddot{q}_k+\sum_{i\in G_j}\Big\{\sum_{\substack{k\in W_i\\ k\neq j}}\Big[\sum_{l\in W_{ij}^{+}} a_{(k)(jl)}\dot{q}_l+\sum_{\substack{l\in W_{ik}^{+}\\ l\neq j}} a_{(j)(kl)}\dot{q}_l-\\ -\sum_{l\in W_{ij}^{-}} a_{(k)(lj)}\dot{q}_l\Big]\dot{q}_k+2\Big[\sum_{l\in W_{ij}^{+}} a_{(j)(jl)}\dot{q}_l\Big]\dot{q}_j\Big\}+u_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}_0+\\ +\Big\{\sum_{i\in G_j}\Big[\operatorname{mom}\Big(\sum_{\substack{l\in W_i\\ l\neq j}} T_{0il}^{A}\cdot \mathfrak{t}_{ji}\Big)+\operatorname{mom}\Big(T_{0i}{}^{A}\cdot\Big(\sum_{l\in W_{ij}^{+}}\mathfrak{t}_{jil}\dot{q}_l-\sum_{k\in W_{ij}^{-}}\mathfrak{t}_{kij}\dot{q}_k\Big)\Big)-\\ -\operatorname{mom}\Big(T_{0ij}^{A}\cdot\Big(\sum_{\substack{k\in W_i\\ k\neq j}} t_{kij}\dot{q}_k\Big)\Big)\Big]\Big\}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_0-\boldsymbol{\omega}_0{}^{\mathrm{T}}u_{\omega\omega}\boldsymbol{\omega}_0=Q_j-\frac{\partial(\Pi_G+\Pi_f)}{\partial q_j}-u_w\mathbf{w}_0+Q_{j*}+\\ +\sum_{l=1}^{L}\lambda_l\beta_{lj}\quad (j=1,\ldots,N)\end{gathered}\tag{5.1}$$

В этих уравнениях $a_{(k)(jl)}=\operatorname{mom}(A_i\cdot\mathfrak{t}_{ki},\ \mathfrak{t}_{jil})$, $\mathfrak{t}_{kil}=\partial\mathfrak{t}_{ki}/\partial q_l$, $T_{0il}^{A}=(\partial T_{0i}/\partial q_l)^{\mathrm{T}}\cdot A_i$, $u_\varepsilon=\Big\|\sum\operatorname{mom}(T_{0il}^{A}\cdot\mathfrak{t}_{ji})\Big\|^{\mathrm{T}}$ и $u_{\omega\omega}=\sum\operatorname{mom}(T_{0i}{}^{A}\cdot T_{0ji})$ (суммирование по i из множества G_j), $u_w=\sum m_i(\partial\mathbf{r}_{ci}/\partial q_j)^{\mathrm{T}}$ (суммирование по i от 1 до M), векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, $\boldsymbol{\omega}_0$, $\mathbf{w}_0$ и $\mathbf{r}_{ci}$ рассматриваются как алгебраические, компоненты которых равны соответствующим проекциям на оси системы координат основания $x_0y_0z_0$.

Для манипулятора, звенья которого образуют незамкнутую кинематическую цепь, уравнения (5.1) имеют такой же вид. В них лишь следует учесть, что $W_{ij}^{-}=R_j^{-}$ и $W_{ij}^{+}=W_i\cap R_j^{+}$.

В левых частях уравнений (5.1) изменим порядок суммирования. Для незамкнутой кинематической цепи в связи с независимостью упорядоченности кинематических пар от рассматриваемого звена некоторые пределы изменения индексов имеют более простой вид, чем в общем случае. Такие пределы изменения индексов даются в скобках. Тогда уравнения динамики манипулятора принимают вид

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{N}\Big[\sum_{i\in G_j\cap G_k} a_{jk}\Big]\ddot{q}_k+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{N}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j\\ (l\in R_j^{+})}}^{N}\Big[\sum_{\substack{i\in G_k\cap G_{jl}\\ (i\in G_k\cap G_l)}} a_{(k)(jl)}\Big]\dot{q}_k\dot{q}_l+\\ +\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{N}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j\\ (l\in R_k^{+})}}^{N}\Big[\sum_{\substack{i\in G_j\cap G_{kl}\\ (i\in G_j\cap G_l)}} a_{(j)(kl)}\Big]\dot{q}_k\dot{q}_l-\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{N}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j\\ (l\in R_j^{-})}}^{N}\Big[\sum_{\substack{i\in G_k\cap G_{lj}\\ (i\in G_k\cap G_j)}} a_{(k)(lj)}\Big]\dot{q}_k\dot{q}_l+\end{gathered}\tag{5.2}$$

$$+2\sum_{\substack{l=1\\(l\in R_j^+)}}^{N}\Big[\sum_{\substack{i\in G_{jl}\\(i\in G_l)}} a_{(j)(jl)}\Big]\dot q_l\dot q_j+u_\varepsilon\varepsilon_0+\Big[\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}u_{\omega1}\dot q_k+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j\\G(k\in R_j^+)}}^{N}u_{\omega2}\dot q_k-$$

$$-\sum_{\substack{k=1\\k\neq j\\(k\in R_j^-)}}^{N}u_{\omega3}\dot q_k\Big]\omega_0-\omega_0^{\mathrm{T}}u_{\omega\omega}\omega_0=Q_j-\frac{\partial(\Pi_G+\Pi_f)}{\partial q_j}-u_W\mathrm{w}_0+Q_{j*}+\sum_{l=1}^{I}\lambda_l\beta_{lj}$$

$$(j=1,\ldots,N)$$

$$u_{\omega1}=\Big\|\sum_{i\in G_j\cap G_k}(\mathrm{mom}(T^A_{0ik}\cdot\mathfrak{t}_{ji})-\mathrm{mom}(T^A_{0ij}\cdot\mathfrak{t}_{ki}))\Big\|^{\mathrm{T}}$$

$$u_{\omega2}=\Big\|\sum_{i\in G_{jk}}\mathrm{mom}(T_{0i}{}^A\cdot\mathfrak{t}_{jik})\Big\|^{\mathrm{T}},\qquad u_{\omega3}=\Big\|\sum_{i\in G_{kj}}\mathrm{mom}(T_{0i}{}^A\cdot\mathfrak{t}_{kij})\Big\|^{\mathrm{T}}$$

Ускорения $\ddot q_j$ связаны K кинематическими уравнениями в винтовой форме, получаемыми дифференцированием уравнений связи в винтовой форме: $\sum \mathfrak{t}_{n_k m_k}\ddot q_{n_k}+\sum\sum \mathfrak{t}_{n_k m_k l_k}\dot q_{l_k}\dot q_{n_k}=0$, где внешнее суммирование — по номерам n_k всех кинематических пар k-го контура, а внутреннее — по номерам l_k всех кинематических пар, проходимых при движении по k-му замкнутому контуру от n_k-й кинематической пары к m_k-й. С учетом (4.9) эти уравнения дают L скалярных независимых уравнений

$$\sum_{j=1}^{N}\beta_{lj}\ddot q_j+\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{ljk}\dot q_k\dot q_j=0\qquad(l=1,\ldots,L)\tag{5.3}$$

Таким образом, при решении прямой задачи динамики λ_l и $\ddot q_j$ определяются путем совместного решения уравнений (5.2) и (5.3).

Отметим, что в общем случае в (5.2) и (5.3) входят все избыточные координаты и скорости. Одним из способов их определения является интегрирование только $N-L$ независимых координат и скоростей, а остальные определяются по ним на основе (4.9) и аналогичных, но уже нелинейных уравнений, связывающих избыточные координаты. Такие уравнения, определяемые из условия геометрического замыкания контуров, можно найти в ряде работ (например, [3]), однако они имеют достаточно сложный вид. Другой возможностью является непосредственное интегрирование всех координат и скоростей. При этом для избежания нарушения связей из-за погрешностей интегрирования следует уточнять получаемые значения на основе уравнений, выражающих условия замкнутости контуров [13].

Решение обратной задачи динамики при наличии замкнутых контуров неоднозначно. Силы Q_j могут быть определены после того, как будут заданы L из них, либо будет задано L соотношений между ними.

Предложенные выше уравнения динамики (5.2) удобно использовать для численного интегрирования, так как их составление аналогично случаю незамкнутой кинематической цепи. Однако применение их для аналитического исследования роботов и, в частности, для получения линеаризованных уравнений затрудняется наличием множителей Лагранжа (множителей связей) λ_l, а также тем, что избыточные координаты не являются независимыми. В связи с этим необходимо исключить из уравнений (5.2) λ_l и записать их относительно $N-L$ независимых обобщенных координат. В этом случае при нумерации кинематических пар удобно тем из них, которые описываются $N-L$ независимыми обобщенными координатами, давать номера от $L+1$ до N, а остальным — от 1 до L.

Избыточные координаты $q_1, \ldots, q_L$ при таком подходе являются функциями выбранных независимых обобщенных координат. Введем матрицы $\mathrm{B}_d=\|\beta_{lk}\|$ и $\mathrm{B}_g=\|\beta_{lj}\|$ (l, $k=1, \ldots, L$; $j=L+1, \ldots, N$). Тогда система уравнений (4.9) дает матричное уравнение

$$\mathbf{q}_d^{\cdot}=\Gamma \mathbf{q}_g^{\cdot} \quad (\Gamma=-\mathrm{B}_d^{-1}\mathrm{B}_g) \tag{5.4}$$

Здесь q_d — вектор зависимых координат q_k ($k=1, \ldots, L$), а q_g — вектор независимых обобщенных координат. Зависимые координаты следует вводить таким образом, чтобы $\det \mathrm{B}_d \neq 0$. Полученное соотношение означает, что

$$\partial \mathbf{q}_d/\partial \mathbf{q}_g=\partial \mathbf{q}_d^{\cdot}/\partial \mathbf{q}_g^{\cdot}=\Gamma \tag{5.5}$$

Дифференцирование соотношения (5.4) с учетом (5.5) дает выражение для зависимых ускорений

$$\mathbf{q}_d^{\cdot\cdot}=\Gamma \mathbf{q}_g^{\cdot\cdot}-\mathrm{B}_d^{-1}\left[\left(\frac{\partial \mathrm{B}_d}{\partial \mathbf{q}_d}\Gamma+\frac{\partial \mathrm{B}_d}{\partial \mathbf{q}_g}\right)\mathbf{q}_g^{\cdot}\Gamma+\left(\frac{\partial \mathrm{B}_g}{\partial \mathbf{q}_d}\Gamma+\frac{\partial \mathrm{B}_g}{\partial \mathbf{q}_g}\right)\mathbf{q}_g^{\cdot}\right]\mathbf{q}_g^{\cdot} \tag{5.6}$$

Выразим множители λ_l ($l=1, \ldots, L$) из первых L уравнений (5.2), соответствующих зависимым координатам $\mathbf{q}_d$, и подставим их в оставшиеся $N-L$ уравнений (5.2). Тогда, представив уравнения в матричной форме и используя (5.4)—(5.6) с учетом $\mathrm{B}_g^{\mathrm{T}}(\mathrm{B}_d^{\mathrm{T}})^{-1}=-\Gamma^{\mathrm{T}}$, можно получить следующее матричное уравнение:

$$\begin{gathered}A(\mathbf{q})\mathbf{q}_g^{\cdot\cdot}+\xi(\mathbf{q},\mathbf{q}^{\cdot})+\left[\frac{\partial(\Pi_G(\mathbf{q},\varphi_0)+\Pi_f(\mathbf{q}))}{\partial \mathbf{q}_g}+\right.\\ \left.+\frac{\partial(\Pi_G(\mathbf{q},\varphi_0)+\Pi_f(\mathbf{q}))}{\partial \mathbf{q}_d}\Gamma(\mathbf{q})\right]^{\mathrm{T}}=\mathbf{Q}_g-\Gamma^{\mathrm{T}}(\mathbf{q})\mathbf{Q}_d-h_w^{r}(\mathbf{q},\varphi_0)\mathbf{w}_0-h_\varepsilon^{r}(\mathbf{q},\varphi_0)\boldsymbol{\varepsilon}_0-\\ -h_\omega^{r}(\mathbf{q},\boldsymbol{\omega}_0,\varphi_0)-h_\omega^{c}(\mathbf{q},\mathbf{q}^{\cdot},\varphi_0)\boldsymbol{\omega}_0+T^{\mathrm{T}}(\mathbf{q})\mathbf{P}_*\end{gathered} \tag{5.7}$$

Здесь $\mathbf{q}=(\mathbf{q}_d, \mathbf{q}_g)$, A — матрица кинетической энергии размера $(N-L)\times$ $\times(N-L)$, $\mathbf{Q}_d=\|Q_l\|$ ($l=1, \ldots, L$), $\mathbf{Q}_g=\|Q_k\|$ ($k=L+1, \ldots, L$), винт $\mathbf{P}_*$ рассматривается как шестимерный алгебраический вектор, первые три компонента которого равны главной части (силе), а последние три — моментной (моменту). В этом уравнении присутствуют также $(N-L)$-мерные векторы ξ, h_ω^{r}, матрицы размера $(N-L)\times 3$ h_w^{r}, h_ε^{r}, h_ω^{c}, и матрица T размера $6\times(N-L)$, описывающая зависимость движения схвата от независимых обобщенных скоростей.

Полученные уравнения динамики (5.1), (5.2), (5.7) могут быть использованы в задачах исследования динамики манипуляционного робота с произвольной кинематической схемой и при моделировании его движения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аксельрод Б. В.* Описание динамики манипуляторов с применением теории винтов // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 79—84.
2. *Диментберг Ф. М.* Теория винтов и ее приложения. М.: Наука, 1978. 327 с.
3. *Диментберг Ф. М.* Теория пространственных шарнирных механизмов. М.: Наука, 1982. 335 с.
4. *Аксельрод Б. В., Вуйич Д., Вукобратович М., Градецкий В. Г., Черноусько Ф. Л.* Моделирование динамики манипуляторов при вибрациях основания // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 2. С. 59—65.
5. *Аксельрод Б. В.* Упругие колебания манипулятора при внешних возмущениях // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 32—42.

6. *Paul R.* Modelling, trajectory calculation and servoing of a computer controlled arm. Stanford: Stanford Univ., 1972. 89 p.
7. *Попов Е. П., Верещагин А. Ф., Зенкевич С. Л.* Манипуляционные роботы: динамика и алгоритмы. М.: Наука, 1978. 398 с.
8. Динамика управления роботами/Под ред. Е. Ю. Юревича. М.: Наука, 1984. 334 с.
9. *Hollerbach J. M.* A recursive Lagrangian formulation of manipulator dynamics and a comparative study of dynamics formulation complexity // IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernatics. 1980. Vol. 10. No. 11. P. 730–736.
10. *Bagci C.* Static force and torque analysis using 3×3 screw matrix, and transmission criteria for space mechanisms // Trans. ASME. Ser. B. J. Eng. for Industry. 1971. Vol. 93. No. 1.
11. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
12. *Appell P.* Traité de mécanique rationnelle. Paris: Gauthier – villars, 1953. T. 2.
13. *Woo L., Freudenstein F.* Application of line geometry to theoretic analysis of mechanical systems // J. Mech. 1970. Vol. 5. No. 3. P. 417–460.

Москва

Поступила в редакцию
9.VII.1988