УДК 624.07:534.1

Л. П. ЛЕБЕДЕВ

К ТЕРМОДИНАМИКЕ И УСТОЙЧИВОСТИ ФЕРМЫ МИЗЕСА

Показано, что критические нагрузки и характер устойчивости точек равновесия фермы Мизеса зависят от термодинамических условий нагружения и могут меняться в различных условиях. Обсуждается соответствие между понятием устойчивости равновесия по Ляпунову и статическими критериями Гиббса для различных процессов нагружения. Вводится понятие термодинамически грубой системы.

Рассматривается термодинамический аспект вопроса устойчивости состояния равновесия фермы Мизеса [1] – конструкции, состоящей из двух одинаковых линейно-упругих стержней, соединенных центральным шарниром (ключом), внешние концы стержней также закреплены шарнирно. Ферма Мизеса – наглядная и удобная модель для изучения качественной стороны проблемы устойчивости геометрически нелинейных конструкций.

Изотермическая связь между приложенной в ключе вертикально вниз нагрузкой P и вертикальным перемещением ключа v дается соотношением [1]:

$$P=2EF\left(1-\frac{v}{a}\operatorname{tg}\alpha_0\right)\left[\frac{1}{(\operatorname{tg}^2\alpha_0+(1-v/a\operatorname{tg}\alpha_0)^2)^{1/2}}-\cos\alpha_0\right] \tag{1}$$

где E – изотермический модуль Юнга, F – площадь сечения стержня, $2a$ – расстояние между шарнирами крепления и α_0 – начальный угол отклонения стержня от вертикали.

Часть кривой нагружения $P-v$ [1] для $v>0$ близка по форме к кубической параболе. Проходя через точку (0, 0), кривая сначала возрастает (по вертикальной оси P) до значения P_T (участок *1*), затем убывает (участок *2*), а далее возрастает неограниченно (участок *3*). На участках возрастания *1* и *3*, как известно [1], равновесие формы устойчиво, а на участке *2* – неустойчиво. Это показывается с помощью принципа минимума потенциальной энергии, но может быть доказано и в рамках динамики. А именно, все равновесные точки участков *1* и *3* оказываются устойчивыми по Ляпунову. Чтобы реализовать динамический подход, вся масса фермы m считается [2] сосредоточенной в ключе. Уравнение динамики получается из уравнения (1) путем замены P на $P-md^2v/dt^2$. Для данного уравнения ($P=\mathrm{const}$) имеет место закон сохранения полной энергии системы

$$\Pi+K=EFl\left[1-\cos\alpha_0\left(\operatorname{tg}^2\alpha_0+\left(1-\frac{v}{a}\operatorname{tg}\alpha_0\right)^2\right)^{1/2}\right]^2-Pv+m(dv/dt)^2,\quad K=m(dv/dt)^2 \tag{2}$$

по времени (здесь l – длина стержня). Любая внутренняя точка (P, v) участков *1* и *3* есть точка строгого минимума полной потенциальной энергии Π, а одновременно и формы (2). Поэтому достаточно малые отклонения от положения равновесия с малыми же начальными скоростями остаются малыми во все время движения. Т. е. происходят малые колебания фермы относительно состояния равновесия. И следовательно, данное состояние устойчиво по Ляпунову.

Здесь следует также отметить, что в данной задаче понятия устойчивости положения равновесия по Ляпунову и статической устойчивости по Гиббсу для изотермического процесса эквивалентны.

До сих пор рассматривалось изотермическое нагружение при температуре T_0 фермы Мизеса. Соответствующая кривая нагружения поэтому будет называться далее изотермой. Она получается при весьма медленном процессе нагружения. Но можно рассмотреть другой крайний вариант – адиабатическое нагружение – нагружение без теплообмена с окружающей средой. В этом случае [3] условие постоянства энтропии S системы дает связь между мгновенной температурой и деформацией $T=T_0\exp(-E\beta e/c_e)$, где β – коэффициент теплового линейного расширения, а c_e – теплоемкость при постоянной деформации e. Закон Гука при этом заменяется соотношением $N=EF(e-\beta T_0\exp(-E\beta e/c_e)$ с учетом которого уравнение равновесия принимает вид

$$P=2EF(e-\beta T_0\exp(-E\beta e/c_e))\cos\alpha \tag{3}$$

В первом приближении, при T мало отличающемся от T_0, уравнение (3) принимает форму уравнения (1) с той лишь разницей, что изотермический модуль E заменяется на адиабатический $E(1-E\beta^2T_0/c_e)$, отличающийся от изотермического не более, чем на 1–2% [3]. Таким образом, адиабатическая кривая нагружения в первом приближении получается из изотермы путем ее растяжения в $(1+E\beta^2T_0/c_e)$ раз вдоль оси P. Качественно свойства точек этой кривой (адиабаты) ничем не отличаются от соответствующих свойств точек изотермы. Как и выше, на участках *1* и *3* равновесие устойчиво, а на участке *2* – неустойчиво.

Для исследования устойчивости здесь, как известно, требуется привлечь функцию состояния H – энтальпию системы, которая принимает минимальное значение на адиабатически устойчивых состояниях равновесия и максимальное – на неустойчивых. В данном случае ей эквивалентная функция имеет вид $\Pi_1=\Pi+2T_0Fc_e \exp\times \times(E\beta e/c_e)/l$. С ее помощью строится функция Ляпунова Π_1+K для динамического адиабатического деформирования фермы Мизеса. После чего все сказанное выше переносится почти дословно на случай адиабаты. В том числе и эквивалентность понятия динамической устойчивости по Ляпунову статической устойчивости по Гиббсу в адиабатических процессах.

Возникает вопрос: являются ли устойчивые изотермически положения равновесия фермы Мизеса устойчивыми при адиабатических возмущениях? И наоборот. Непосредственно проверяется, что изотермически устойчивые состояния равновесия являются устойчивыми адиабатически. Обратное неверно. Прямой счет показывает, что имеется окрестность точки максимума адиабаты $P_S(P>P_T)$, где устойчивые адиабатически состояния равновесия являются неустойчивыми при изотермических возмущениях.

Последнее свойство есть следствие того факта, что в данной модели материала сжатие стержня сопровождается его нагреванием. Однако имеются материалы [3], где ситуация противоположна, т. е. сжатый стержень охлаждается. Естественно, что при этом меняется и характер взаимной устойчивости. Все точки равновесия, устойчивые адиабатически, будут устойчивы изотермически, но не наоборот.

Реальные процессы не бывают ни строго адиабатическими, ни строго изотермическими. Пусть скорость теплообмена фермы с внешней средой пропорциональна $T-T_0$, где T_0 есть одновременно и начальная температура фермы и температура окружающей среды. Соответствующее уравнение теплообмена получается из закона сохранения энергии с учетом уравнения движения и здесь не приводится. Легко видеть, что в рассматриваемом случае при $P>P_T$ все точки участка *1* адиабаты являются неустойчивыми, если рассматривать модель фермы с теплообменом. Действительно, в данной модели происходит теплообмен с внешней средой, и температура фермы, вследствие рассеяния тепла, должна в среднем при малых колебаниях приближаться к T_0. Т. е. колебания через какое-то время должны происходить относительно точки равновесия, лежащей сколь угодно близко от изотермы. Но поскольку при $P>P_T$ в окрестности вершины изотермы точек притяжения (равновесия) нет, то ферма обязательно перескочит в состояние, соответствующее колебаниям относительно равновесных точек участка 3 изотермы, т. е. неустойчивость в смысле Ляпунова здесь доказана.

Таким образом, точное верхнее критическое значение нагрузки зависит от условий термодинамического нагружения. Адиабатическое и изотермическое нагружение – это два крайних случая. По аналогии с теорией [4] можно ввести понятие термодинамически грубой устойчивости системы – устойчивости, имеющей место при всех адиабатических и изотермических возмущениях системы, может быть, включая и другие типы возмущений.

Интересно рассмотреть случай несимметричного деформирования фермы Мизеса. Он возможен [2] лишь для достаточно подъемистой фермы. Несимметричные формы равновесия ответвляются от неустойчивого участка 2 диаграммы, как и выше, при разных, хотя и мало относительно отличающихся значениях нагрузки при адиабатическом и изотермическом нагружении.

Таким образом, ферма Мизеса не меняет качественно характер процесса деформирования в различных термодинамических условиях, т. е. является в некотором роде термодинамически грубой системой в смысле А. А. Андронова.

Итак, различные критические характеристики процесса деформирования фермы Мизеса и характер устойчивости точек равновесия зависят от термодинамического характера нагружения. Очевидно, что это утверждение имеет отношение и более сложным системам – пластинам и оболочкам.

Автор благодарит И. И. Воровича за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384 с.
2. *Ворович И. И., Минакова Н. И., Шепелева В. Г.* Некоторые вопросы устойчивости вязкоупругих и вязкопластических систем на примере фермы Мизеса // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4. С. 120–132.
3. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
4. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
29.VIII.1990