

УДК 624.072.4

© 1991 г.

В. В. ЕЛИСЕЕВ

### ЗАДАЧА СЕН-ВЕНАНА И УПРУГИЕ МОДУЛИ ДЛЯ СТЕРЖНЕЙ С КРИВИЗНОЙ И КРУЧЕНИЕМ

Рассматривается равновесие линейно-упругого стержня с малыми кривизной и кручением при нагрузке на торцах. Решение трехмерной задачи теории упругости в напряжениях строится асимптотическим методом, определены первые три члена разложения. Получено выражение энергии деформации на единицу длины, и по его виду определены упругие модули одномерной модели стержня. Обсуждается роль поправок в модулях от кривизны и кручения.

1. Постановка задачи. В одномерной модели равновесие линейно-упругого стержня описывается уравнениями [1, 2]:

$$\begin{aligned} Q' + q = 0, \quad M' + t \times Q + m = 0, \quad \theta' = \partial \Pi_1 / \partial M \\ u' - \theta \times t = \partial \Pi_1 / \partial Q, \quad 2\Pi_1 = M \cdot A \cdot M + Q \cdot B \cdot Q + 2M \cdot C \cdot Q \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $Q$  и  $M$  — сила и момент в сечении,  $q$  и  $m$  — распределенные силовая и моментная нагрузки,  $t$  — орт касательной,  $\theta$  — вектор малого поворота,  $u$  — перемещение,  $\Pi_1$  — плотность энергии деформации,  $A$ ,  $B$  и  $C$  — тензоры упругих модулей; штрих означает дифференцирование по дуговой координате. В [2] определены модули призматического стержня из однородного изотропного материала, для чего использовано равенство энергий деформации в одномерной и трехмерной моделях стержня в задаче Сен-Венана. Ниже рассматривается обобщение [2] на случай кривизны и кручения.

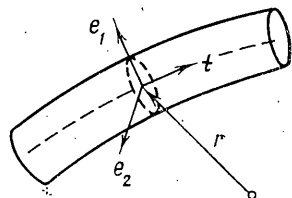
Задача Сен-Венана для прямолинейного закрученного стержня рассматривалась многими авторами [3, 4]. Стержням с кривизной и кручением посвящены работы [5, 6].

Обратимся к трехмерной модели стержня. Зависимостью радиус-вектора от дуговой координаты  $r(s)$  задается ось стержня — произвольная гладкая пространственная кривая. В каждой точке оси имеем нормальное сечение — плоскую фигуру с центром тяжести на оси. Вводятся орты  $e_\alpha$  ( $\alpha=1, 2$ ) главных осей инерции сечения, после чего радиус-вектор произвольной точки в объеме стержня (фигура) можно представить в виде  $R(s, x_\alpha) = r(s) + x_\alpha e_\alpha(s)$ . Соотношения  $dr/ds = t = e_3$ ,  $de_k/ds = \omega \times e_k$  ( $k=1, 2, 3$ ) определяют орт касательной  $t$  и вектор кривизны-кручения стержня  $\omega$ .

Декартовы координаты в сечении  $x_\alpha$  вместе с  $s$  образуют систему неортогональных криволинейных координат в объеме. Ей соответствует выражение оператора Гамильтона

$$\nabla_s = \nabla + v^{-1}(t\partial/\partial s - \omega \cdot x \times \nabla) \quad (1.2)$$

где  $\nabla = e_\alpha \partial / \partial x_\alpha$  — оператор в плоскости сечения,  $x = x_\alpha e_\alpha$ ,  $v = 1 + t \cdot \omega \times x$  — элементарный объем,  $\omega_t = \omega \cdot t$  — кручение стержня.



В плоскости сечения его контур задается уравнением  $f(x_\alpha)=0$ . Это же уравнение определяет и боковую поверхность стержня; независимость от  $s$  означает здесь, что рассматривается стержень постоянного сечения. Орт нормали к боковой поверхности равен ( $\mathbf{n}=\nabla f/|\nabla f|$  — нормаль к контуру сечения в его плоскости):

$$\mathbf{N}=\nabla_3 f/|\nabla_3 f|=(\mathbf{n}-\nu^{-1}\omega_i \mathbf{x}\times\mathbf{n})(1+|\nu^{-1}\omega_i \mathbf{x}\times\mathbf{n}|^2)^{-1/2} \quad (1.3)$$

Тензор напряжений  $\mathbf{T}$  должен удовлетворять уравнениям [7]

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{T}=0, \quad \Delta_3 \mathbf{T} + \frac{1}{1+\nu} \nabla_3 \nabla_3 \sigma = 0 \quad (1.4)$$

в объеме стержня и граничному условию  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{T}=0$  на боковой поверхности. Обозначено:  $\Delta_3$  — оператор Лапласа,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\sigma = \text{tr } \mathbf{T}$  — след тензора напряжений. В представлении

$$\mathbf{T}=\mathbf{T}_\perp + \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{t} + \sigma_i \boldsymbol{t}\boldsymbol{t} \quad (1.5)$$

тензор  $\mathbf{T}_\perp = T_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$  определяет напряжения на плоскостях, параллельных оси стержня, вектор  $\boldsymbol{\tau} = T_{3\alpha} \mathbf{e}_\alpha$  задает касательное напряжение в сечении, скаляр  $\sigma_i = T_{33}$  является осевым напряжением.

Вводятся следующие интегралы по сечению

$$\mathbf{Q}(s) = \int (\boldsymbol{\tau} + \sigma_i \boldsymbol{t}) dF, \quad \mathbf{M}(s) = \int \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\tau} + \sigma_i \boldsymbol{t}) dF \quad (1.6)$$

представляющие собой силы и моменты в одномерной модели стержня. В задаче Сен-Венана

$$d\mathbf{Q}/ds=0, \quad d\mathbf{M}/ds=\mathbf{Q}\times\boldsymbol{t} \quad (1.7)$$

Предстоит найти решение уравнений (1.4), удовлетворяющее условиям на боковой поверхности и интегральным условиям (по силе и моменту) на торцах. По этому решению далее будут вычислены модули  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  для уравнений (1.4).

**2. Асимптотический анализ напряжений.** Будем считать, что вдоль оси стержня упругое поле меняется гораздо медленнее, чем в поперечных направлениях. Введем малый параметр  $\varepsilon$  (относительная толщина) и сжатую дуговую координату  $s_\varepsilon = \varepsilon s$  так, чтобы изменяемость решения по  $s_\varepsilon$  и  $x_\alpha$  была одинаковой. Полагая также, что стержень в целом мало отличается от призматического, примем  $\boldsymbol{\omega} = \varepsilon^2 \boldsymbol{\omega}_\varepsilon$ . Однако далее, до п. 6, вместо  $s_\varepsilon$  и  $\boldsymbol{\omega}_\varepsilon$  будем писать  $s$  и  $\boldsymbol{\omega}$ . При этих допущениях набла-оператор (1.2) и орт нормали (1.3) можно представить следующими рядами по степеням  $\varepsilon$ :

$$\nabla_3 = \nabla + \varepsilon \boldsymbol{t} \partial / \partial s - \varepsilon^3 \omega_i \mathbf{x} \times \nabla + \dots, \quad \mathbf{N} = \mathbf{n} - \varepsilon^2 \omega_i \mathbf{x} \times \mathbf{n} + \dots$$

Тогда уравнения в напряжениях (1.4) и граничные условия на боковой поверхности  $\partial F$  примут вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T}_\perp + \varepsilon \boldsymbol{\tau}' + \varepsilon^2 [\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\omega}_\perp \times \mathbf{T}_\perp - \omega_i (\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{t} + \boldsymbol{t} \cdot \mathbf{x} \times \nabla \boldsymbol{\tau}) - \sigma_i \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\omega}_\perp] + \dots = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \varepsilon \sigma_i' + \varepsilon^2 (2\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\omega}_\perp \times \boldsymbol{\tau} - \omega_i \boldsymbol{t} \cdot \mathbf{x} \times \nabla \sigma_i) + \dots = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\Delta \mathbf{T}_\perp + \frac{1}{1+\nu} \nabla \nabla \sigma + \varepsilon^2 (\mathbf{T}_\perp'' + \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\omega}_\perp \times \nabla \mathbf{T}_\perp) + \dots = 0$$

$$\Delta \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{1+\nu} [\varepsilon \nabla \sigma' + \varepsilon^2 \omega_i [\nabla \nabla \sigma \times \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{t} + \boldsymbol{t} \times \nabla \sigma]] + \varepsilon^2 (\boldsymbol{\tau}'' + \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\omega}_\perp \times \nabla \boldsymbol{\tau}) + \dots = 0$$

$$\Delta \sigma_i + \varepsilon^2 [\sigma_i'' + \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\omega}_\perp \times \nabla \sigma_i + \frac{1}{1+\nu} (\sigma'' + \boldsymbol{\omega}_\perp \times \nabla \sigma \cdot \boldsymbol{t})] + \dots = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{T}_\perp - \varepsilon^2 \omega_i \boldsymbol{t} \times \mathbf{x} \boldsymbol{\tau} + \dots) |_{\partial F} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} - \varepsilon^2 \omega_i \boldsymbol{t} \times \mathbf{x} \sigma_i + \dots) |_{\partial F} = 0$$

Здесь  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$  — оператор Лапласа в плоскости сечения,  $(\dots)^{\cdot}$  — символ дифференцирования по дуговой координате во вращающейся системе отсчета: для скаляра  $\dot{\varphi} = \partial\varphi/\partial s$ , для вектора  $\dot{\tau} = \partial\tau/\partial s - \omega \times \tau$ , для тензора второго ранга  $\dot{T} = \partial T/\partial s - \omega \times T + T \times \omega$ ,  $\omega_{\perp} = \omega - \omega_t t$ .

Искомый тензор напряжений (1.5) представим разложением  $T = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \varepsilon^2 T^{(2)} + \dots$ . Подставив его в уравнения (2.1) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим последовательность задач. Первая из них относится к главному члену  $T^{(0)}$ :

$$\nabla \cdot T_{\perp}^{(0)} = 0, \quad \nabla \cdot \tau^{(0)} = 0, \quad \Delta T_{\perp}^{(0)} + (1+\nu)^{-1} \nabla \nabla \sigma^{(0)} = 0$$

$$\Delta \tau^{(0)} = 0, \quad \Delta \sigma_i^{(0)} = 0; \quad n \cdot T_{\perp}^{(0)}|_{\partial F} = 0, \quad n \cdot \tau^{(0)}|_{\partial F} = 0$$

Решение этой задачи таково

$$T_{\perp}^{(0)} = 0, \quad \tau^{(0)} = \mu \alpha^{(0)} \nabla \Phi \times t, \quad \sigma_i^{(0)} = a^{(0)} + g^{(0)} \cdot x \quad (2.2)$$

где  $\Phi$  — известная функция напряжений при кручении ( $\Delta \Phi = -2$ ,  $\Phi|_{\partial F} = 0$  — рассматриваем односвязное сечение),  $\mu$  — модуль сдвига, скаляры  $\alpha^{(0)}$  и  $a^{(0)}$  и вектор  $g^{(0)}$  зависят от  $s$  и определяются продольной силой  $Q_t$ , изгибающим  $M_{\perp}$  и крутящим  $M_t$  моментами:

$$\int \sigma_i^{(0)} dF = Q_i^{(0)} = a^{(0)} F, \quad \int x \sigma_i^{(0)} dF \times t = M_{\perp}^{(0)} = g^{(0)} \cdot J \times t \quad \left( J = \int x x dF \right) \\ \int x \times \tau^{(0)} \cdot t dF = M_t^{(0)} = \mu \alpha^{(0)} C \quad \left( C = 2 \int \Phi dF \right) \quad (2.3)$$

Введены площадь сечения  $F$ , тензор моментов инерции  $J$ , геометрическая жесткость на кручение  $C$ . Учтено, что  $\int x dF = 0$  (ось стержня проходит через центры тяжести сечений).

Силы и моменты представлены в виде  $Q = Q_t t + Q_{\perp}$ ,  $M = M_t t + M_{\perp}$ . В соответствии с условиями (1.7) имеем

$$Q_i^{\cdot} = \varepsilon Q_{\perp} \times \omega_{\perp} \cdot t, \quad Q_{\perp}^{\cdot} = \varepsilon (\omega_t Q_{\perp} - \omega_{\perp} Q_t) \times t \quad (2.4)$$

$$M_t^{\cdot} = \varepsilon M_{\perp} \times \omega_{\perp} \cdot t, \quad \varepsilon M_{\perp}^{\cdot} = [Q_{\perp} + \varepsilon^2 (\omega_t M_{\perp} - \omega_{\perp} M_t)] \times t$$

Разложив решения этой системы в ряды по степеням  $\varepsilon$ , обнаружим, что  $Q_{\perp}^{(0)} = 0$ , а  $Q_t^{(0)}$ ,  $M_t^{(0)}$  и  $Q_i^{(1)}$  постоянны. Ниже будут использованы и другие следствия (2.4).

Рассмотрим далее члены порядка  $\varepsilon$  в уравнениях (2.1). Учитывая свойства  $T^{(0)}$ , для компонент  $T^{(1)}$  получим следующие задачи:

$$\nabla \cdot T_{\perp}^{(1)} = 0, \quad \Delta T_{\perp}^{(1)} + (1+\nu)^{-1} \nabla \nabla \sigma^{(1)} = 0, \quad \Delta \sigma_i^{(1)} = 0; \quad n \cdot T_{\perp}^{(1)}|_{\partial F} = 0 \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \tau^{(1)} + g^{(0)} \cdot x = 0, \quad \Delta \tau^{(1)} + (1+\nu)^{-1} g^{(0)} = 0; \quad n \cdot \tau^{(1)}|_{\partial F} = 0 \quad (2.6)$$

Решение задачи (2.5) легко находится

$$T_{\perp}^{(1)} = 0, \quad \sigma_i^{(1)} = a^{(1)} + g^{(1)} \cdot x, \quad a^{(1)} = Q_t^{(1)} F^{-1}, \quad g^{(1)} = J^{-1} \times t \cdot M_{\perp}^{(1)} \quad (2.7)$$

Для решения (2.6) введем представление  $\tau^{(1)} = \nabla \varphi^{(1)} + \nabla \psi^{(1)} \times t$ . Тогда из (2.6) получим следующие две задачи

$$\Delta \varphi^{(1)} = -g^{(0)} \cdot x, \quad \partial_n \varphi^{(1)}|_{\partial F} = 0 \quad (\partial_n \equiv n \cdot \nabla)$$

$$\Delta \psi^{(1)} = -\frac{\nu}{1+\nu} g^{(0)} \cdot x \times t \cdot x - 2\mu \alpha^{(1)}, \quad \psi^{(1)}|_{\partial F} = 0$$

Вектор  $\mathbf{g}^{(0)*}$  может быть определен с помощью равенств (2.3) и (2.4):  $\mathbf{g}^{(0)*} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_{\perp}^{(1)}$ . Скаляр  $\alpha^{(1)}$  находится по крутящему моменту

$$M_i^{(1)} = \int \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \mathbf{t} dF = \varphi \alpha^{(1)} C - \mathbf{Q}_{\perp}^{(1)} \cdot (\mathbf{e} + \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2.8)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \int \mathbf{x} W dF, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\nu}{1+\nu} \mathbf{J}^{-1} \cdot \int \mathbf{x} \Phi dF \times \mathbf{t}$$

где  $W$  — функция деформации при кручении ( $\Delta W = 0$ ,  $\partial_n W = \mathbf{n} \times \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}$ ). Формула (2.8) известна [7]. Вывод ее с использованием функций  $\varphi^{(1)}$  и  $\psi^{(1)}$  изложен в [2].

Вектор  $\boldsymbol{\tau}^{(1)}$  можно представить в виде

$$\boldsymbol{\tau}^{(1)} = - \left( \nabla \varphi + \frac{\nu}{1+\nu} \mathbf{t} \times \nabla \psi \times \mathbf{t} \right) \cdot \mathbf{g}^{(0)*} + \mu \alpha^{(1)} \nabla \Phi \times \mathbf{t} \quad (2.9)$$

если ввести векторные функции  $\varphi$  и  $\psi$ :

$$\Delta \varphi = \Delta \psi = \mathbf{x}, \quad \partial_n \varphi|_{\partial F} = \psi|_{\partial F} = 0 \quad (2.10)$$

**3. Члены порядка  $\varepsilon^2$ .** С этих членов начинается влияние кривизны и кручения стержня. Из системы (2.1) для компонент  $\mathbf{T}^{(2)}$  получим следующие задачи

$$\nabla \cdot \mathbf{T}_{\perp}^{(2)} = \left( \nabla \varphi + \frac{\nu}{1+\nu} \mathbf{t} \times \nabla \psi \times \mathbf{t} \right) \cdot \mathbf{g}^{(0)*} - \mu \alpha^{(1)} \nabla \Phi \times \mathbf{t} + \quad (3.1)$$

$$+ \omega_i (\boldsymbol{\tau}^{(0)} \times \mathbf{t} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau}^{(0)}) + \sigma_i^{(0)} \mathbf{t} \times \boldsymbol{\omega}_{\perp}, \quad \Delta \mathbf{T}_{\perp}^{(2)} + \frac{1}{1+\nu} \nabla \nabla \sigma^{(2)} = 0$$

$$\Delta \sigma_i^{(2)} + \frac{2+\nu}{1+\nu} (\mathbf{g}^{(0)*} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\perp} \times \mathbf{g}^{(0)}) = 0, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{T}_{\perp}^{(2)} - \omega_i \mathbf{t} \times \mathbf{x} \boldsymbol{\tau}^{(0)})|_{\partial F} = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)} = -\mathbf{g}^{(1)*} \cdot \mathbf{x} + 2\mu \alpha^{(0)} \boldsymbol{\omega}_{\perp} \cdot \nabla \Phi + \omega_i \mathbf{t} \cdot \mathbf{x} \times \mathbf{g}^{(0)} \quad (3.2)$$

$$\Delta \boldsymbol{\tau}^{(2)} = \boldsymbol{\omega}_{\perp} \cdot \mathbf{t} \times \nabla \boldsymbol{\tau}^{(0)} - \frac{1}{1+\nu} (\mathbf{g}^{(1)*} + \omega_i \mathbf{t} \times \mathbf{g}^{(0)}), \quad \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau}^{(2)} - \omega_i \mathbf{t} \times \mathbf{x} \boldsymbol{\sigma}_i^{(0)})|_{\partial F} = 0$$

где благодаря (2.3), (2.4) и (2.7) можно положить

$$\mathbf{g}^{(0)*} = \mathbf{Q}_i^{(0)} \mathbf{J}^{-1} \times \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\perp}, \quad \mu \alpha^{(1)*} = C^{-1} \boldsymbol{\omega}_{\perp} \times \mathbf{t} \cdot [\mathbf{M}_{\perp}^{(0)} - \mathbf{Q}_i^{(0)} (\mathbf{e} + \boldsymbol{\varepsilon})] \quad (3.3)$$

$$\mathbf{g}^{(1)*} = \mathbf{J}^{-1} \cdot (\mathbf{Q}_{\perp}^{(2)} + \omega_i \mathbf{M}_{\perp}^{(0)} - \boldsymbol{\omega}_{\perp} M_i^{(0)})$$

Рассмотрим задачу (3.1). Общим решением первого уравнения может служить

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\perp}^{(2)} = & [(\mathbf{t} \times \mathbf{x}) (2\omega_i \boldsymbol{\tau}^{(0)-1/2} (\mu \alpha^{(1)*} - 1/2 \boldsymbol{\omega}_{\perp} \cdot \mathbf{g}^{(0)}) \mathbf{x}) - 1/2 x^2 \boldsymbol{\omega}_{\perp} \times \mathbf{t} \mathbf{g}^{(0)}]^s + \\ & + \frac{\nu}{1+\nu} (\mathbf{g}^{(0)*} \cdot \psi - \psi \mathbf{g}^{(0)*}) + (2\omega_i \mu \alpha^{(0)} \Phi - \varphi \cdot \mathbf{g}^{(0)*} + \mu \alpha^{(1)*} W + \\ & + \alpha^{(0)} \boldsymbol{\omega}_{\perp} \cdot \mathbf{t} \times \mathbf{x}) \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{t} \times \nabla (\nabla \chi - \nabla U \times \mathbf{t}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $(\dots)^s$  — символ симметрирования,  $x = |\mathbf{x}|$ ,  $\mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{e}_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}$  — единичный тензор в плоскости сечения,  $\chi$  — какое-либо частное решение уравнения

$$\Delta \chi = \frac{2\nu}{1+\nu} \mathbf{t} \times \mathbf{g}^{(0)*} \cdot \psi \quad (3.5)$$

Функция  $U$  пока произвольна. Взяв от второго уравнения (3.1) след и использовав (3.4) и третье уравнение (3.1), получим

$$\Delta\Delta U = -16\omega_i\mu\alpha^{(0)} + \frac{1+2\nu}{1+\nu}(\omega_{\perp}\cdot\mathbf{t}\times\mathbf{g}^{(0)} - \mathbf{g}^{(0)\prime\prime}\cdot\mathbf{x}) \quad (3.6)$$

граничные условия для  $U$  выводятся из граничного условия в (3.1), которое можно представить в виде

$$\begin{aligned} \partial_t\nabla U|_{\partial F} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}\times\mathbf{t}, \quad \mathbf{D} = (\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{g}^{(0)\prime\prime} - \mu\alpha^{(1)\prime}\mathbf{W} + a^{(0)}\omega_{\perp}\cdot\mathbf{x}\times\mathbf{t})\mathbf{E}_{\perp} - \\ - \frac{1}{2}[x^2\omega_{\perp}\times\mathbf{t}\mathbf{g}^{(0)} + (\mu\alpha^{(1)\prime} - \frac{1}{2}\omega_{\perp}\cdot\mathbf{g}^{(0)})\mathbf{t}\times\mathbf{x}\mathbf{x}]^s + \mathbf{t}\times\nabla\nabla\chi \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $\partial_t = \mathbf{t}\times\mathbf{n}\cdot\nabla$  — оператор дифференцирования по дуговой координате на контуре сечения. Из (3.7) можно получить выражения  $U$  и  $\partial_n U$  на  $\partial F$ .

Определив  $\mathbf{T}_{\perp}^{(2)}$ , найдем из второго уравнения (3.1) выражение  $\nabla\nabla\sigma_i^{(2)}$ , по которому можно вычислить и  $\sigma_{\perp}^{(2)}$ . Константы интегрирования можно связать с  $Q_i^{(2)}$  и  $\mathbf{M}_{\perp}^{(2)}$ .

Обратимся к задаче (3.2). Ее решение можно записать в форме

$$\boldsymbol{\tau}^{(2)} = \omega_i\mathbf{t}\times\mathbf{x}\sigma_i^{(0)} + \nabla\varphi^{(2)} + \nabla\psi^{(2)}\times\mathbf{t} \quad (3.8)$$

$$\Delta\varphi^{(2)} = -\mathbf{g}^{(1)\prime}\cdot\mathbf{x} + 2\mu\alpha^{(0)}\omega_{\perp}\cdot\nabla\Phi, \quad \partial_n\varphi^{(2)}|_{\partial F} = 0$$

$$\Delta\psi^{(2)} = \left[ \frac{3+2\nu}{1+\nu}\omega_i\mathbf{g}^{(0)} - \left( \frac{\nu}{1+\nu}\mathbf{g}^{(1)\prime} + 4\mu\alpha^{(0)}\omega_{\perp} \right)\times\mathbf{t} \right]\cdot\mathbf{x} +$$

$$+ \mu\alpha^{(0)}\omega_{\perp}\cdot\nabla\Phi\times\mathbf{t} - 2\mu\alpha^{(2)}, \quad \psi^{(2)}|_{\partial F} = 0$$

Для определения  $\alpha^{(2)}$  служит выражение крутящего момента

$$\begin{aligned} M_i^{(2)} = \int \mathbf{x}\times\boldsymbol{\tau}^{(2)}\cdot\mathbf{t} dF = \omega_i(a^{(0)}J + \mathbf{g}^{(0)}\cdot\mathbf{H}) - \mathbf{g}^{(1)\prime}\cdot\mathbf{J}\cdot(\mathbf{e} + \boldsymbol{\varepsilon}) - \\ - i\cdot\left(\frac{3+2\nu}{1+\nu}\omega_i\mathbf{g}^{(0)} - 6\mu\alpha^{(0)}\omega_{\perp}\times\mathbf{t}\right) + \mu\alpha^{(2)}C \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{H} = \int x^2\mathbf{x} dF, \quad \mathbf{i} = \int \mathbf{x}\Phi dF, \quad J = \text{tr } \mathbf{J}$$

**4. Энергия деформации.** Отнесенная к единице длины стержня энергия деформации  $\Pi_1$  представляется в виде

$$\Pi_1 = \int \Pi_3 v dF \quad (4.1)$$

$$\Pi_3 = \frac{1}{2E}\sigma_i^2 + \frac{1}{2\mu}\tau^2 - \frac{\nu}{E}\sigma_{\perp}\sigma_i + \frac{1}{4\mu}\left(\mathbf{T}_{\perp}\cdot\mathbf{T}_{\perp} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_{\perp}^2\right)$$

Здесь  $\Pi_3$  — энергия на единицу объема,  $E$  — модуль Юнга,  $\tau = |\boldsymbol{\tau}|$ ,  $\sigma_{\perp} = \text{tr } \mathbf{T}_{\perp}$ .

Поскольку напряжения представлены рядами по степеням  $\varepsilon$ , то для энергии получим

$$\Pi_1 = \Pi_1^{(0)} + \varepsilon\Pi_1^{(1)} + \varepsilon^2\Pi_1^{(2)} + \dots \quad (4.2)$$

$$\Pi_1^{(0)} = \int \Pi_3^{(0)} dF, \quad \Pi_1^{(1)} = \int \Pi_3^{(1)} dF, \quad \Pi_1^{(2)} = \int (\Pi_3^{(2)} - \omega_{\perp}\mathbf{t}\times\mathbf{x}\Pi_3^{(0)}) dF$$

где  $\Pi_3^{(k)}$  — коэффициенты асимптотического разложения  $\Pi_3$  в (4.1).

Главные члены в энергии таковы

$$\begin{aligned} \Pi_3^{(0)} &= \frac{1}{2E} \sigma_i^{(0)2} + \frac{1}{2\mu} \tau^{(0)2} \\ \Pi_i^{(0)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{EF} Q_i^{(0)2} + \mathbf{M}_\perp^{(0)} \cdot (EI)^{-1} \cdot \mathbf{M}_\perp^{(0)} + \frac{1}{\mu C} M_i^{(0)2} \right) \quad (\mathbf{I} = -\mathbf{t} \times \mathbf{J} \times \mathbf{t}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Члены порядка  $\varepsilon$  имеют вид (подробности вычисления изложены в [2]):

$$\begin{aligned} \Pi_3^{(1)} &= \frac{1}{E} \sigma_i^{(0)} \sigma_i^{(1)} + \frac{1}{\mu} \tau^{(0)} \cdot \tau^{(1)} \\ \Pi_i^{(1)} &= \frac{1}{EF} Q_i^{(0)} Q_i^{(1)} + \mathbf{M}_\perp^{(0)} \cdot (EI)^{-1} \cdot \mathbf{M}_\perp^{(1)} + \frac{1}{\mu C} M_i^{(0)} (M_i^{(1)} + \mathbf{Q}_\perp^{(1)} \cdot \mathbf{e}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Для членов порядка  $\varepsilon^2$  получим

$$\begin{aligned} \Pi_3^{(2)} &= \frac{1}{2E} (\sigma_i^{(1)2} + 2\sigma_i^{(0)} \sigma_i^{(2)}) + \frac{1}{2\mu} (\tau^{(1)2} + 2\tau^{(0)} \cdot \tau^{(2)}) - \frac{\nu}{E} \sigma_i^{(0)} \sigma_\perp^{(2)} \\ &\int \sigma_i^{(1)2} dF = F^{-1} Q_i^{(1)2} + \mathbf{M}_\perp^{(1)} \cdot \mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{M}_\perp^{(1)}, \\ &\int \sigma_i^{(0)} \sigma_i^{(2)} dF = F^{-1} Q_i^{(0)} Q_i^{(2)} + \mathbf{M}_\perp^{(0)} \cdot \mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{M}_\perp^{(2)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

При выводе последнего равенства не понадобилось выражение  $\sigma_i^{(2)}$ . Интегрируя третье слагаемое в  $\Pi_3^{(2)}$ , получим [2]:

$$\begin{aligned} \int \tau^{(1)2} dF &= C^{-1} (M_i^{(1)2} + 2M_i^{(1)} \mathbf{Q}_\perp^{(1)} \cdot \mathbf{e}) + \mathbf{Q}_\perp^{(1)} \cdot (FK)^{-1} \cdot \mathbf{Q}_\perp^{(1)} \\ (FK)^{-1} &= \mathbf{J}^{-1} \cdot \left( -\int \boldsymbol{\varphi} \mathbf{x} dF + \left( \frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 \mathbf{t} \times \int \boldsymbol{\psi} \mathbf{x} dF \times \mathbf{t} \right) \cdot \mathbf{J}^{-1} + C^{-1} (\mathbf{e}\mathbf{e} - \varepsilon\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Тензор  $\mathbf{K}$  называется тензором коэффициентов сдвига.

Четвертое слагаемое в  $\Pi_3^{(2)}$  интегрируется следующим образом

$$\begin{aligned} \int \tau^{(0)} \cdot \tau^{(2)} dF &= M_i^{(0)} C^{-1} \int \Phi \nabla \times \tau^{(2)} \cdot \mathbf{t} dF = M_i^{(0)} C^{-1} [\omega_i Q_i^{(0)} F^{-1} (C - \mathbf{J}) + \\ &+ \omega_i \mathbf{M}_\perp^{(0)} \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{J}^{-1} \cdot (\mathbf{H} - 3\mathbf{i}) + \mathbf{e}) - \omega_\perp M_i^{(0)} \cdot (2C^{-1} \mathbf{t} \times \mathbf{i} + \mathbf{e}) + M_i^{(2)} + \mathbf{Q}_\perp^{(2)} \cdot \mathbf{e}] \end{aligned} \quad (4.7)$$

Трудоемким является интегрирование последнего слагаемого в  $\Pi_3^{(2)}$  поскольку  $\sigma_\perp^{(2)}$  содержит слагаемое  $\Delta U$ . Согласно формуле Грина, с учетом вида  $\sigma_i^{(0)}$  и граничного условия (3.7), получим

$$\int \sigma_i^{(0)} \Delta U dF = \oint_{\partial F} (\sigma_i^{(0)} \partial_n U - \mathbf{n} \cdot \mathbf{g}^{(0)} U) dl = \int_{\partial F} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \left( \frac{1}{2} x^2 \mathbf{g}^{(0)} - \sigma_i^{(0)} \mathbf{x} \right) dl \quad (4.8)$$

Применим теперь теорему о дивергенции. От присутствующей в  $\mathbf{D}$  функции  $\chi$  останется лишь ее лапласиан (3.5). Используя формулы

$$\begin{aligned} \int \nabla W \cdot \mathbf{x} dF &= 0, \quad \int \nabla W \cdot (\frac{1}{2} x^2 \mathbf{g}^{(0)} - \mathbf{x} \mathbf{x} \cdot \mathbf{g}^{(0)}) dF = (\frac{1}{2} \mathbf{H} - 2\mathbf{i}) \times \mathbf{t} \cdot \mathbf{g}^{(0)}, \\ \int \mathbf{x} \cdot \nabla \Phi dF &= \frac{1}{2} \mathbf{H} \end{aligned}$$

при последующих преобразованиях (4.8), придем к равенству

$$\begin{aligned} \int \sigma_i^{(0)} \sigma_{\perp}^{(2)} dF = & -2\omega_i M_i^{(0)} M_{\perp}^{(0)} \cdot t \times (CJ)^{-1} \cdot i^{-1/2} Q_i^{(0)2} \omega_{\perp} \cdot t \times (FJ)^{-1} \cdot H + \\ & + Q_i^{(0)} M_{\perp}^{(0)} \cdot \left[ \frac{1}{2} J \omega_{\perp} \cdot (FI)^{-1} - 2\omega_{\perp} F^{-1} - t \times J^{-1} \cdot \int (\frac{1}{2} x^2 E_{\perp} - xx) \cdot \nabla \varphi dF \cdot J^{-1} \times t \cdot \omega_{\perp} - \right. \\ & \left. - 2(CI)^{-1} \cdot i(e+\varepsilon) \times t \cdot \omega_{\perp} + \frac{2\nu}{1+\nu} \omega_{\perp} \cdot I^{-1} \cdot \int \psi x dF \cdot I^{-1} \right] + \\ & + M_{\perp}^{(0)} \cdot [(CI)^{-1} \cdot it \times \omega_{\perp} + t \times J^{-1} \cdot (\frac{1}{4} \omega_{\perp} \times t \cdot HE_{\perp}^{-1/2} t \times (\omega_{\perp} H)^s - \\ & - \omega_{\perp} \times t \cdot {}^3H) \cdot J^{-1} \times t] \cdot M_{\perp}^{(0)} \quad \left( {}^3H = \int xxx dF \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

При вычислении  $\Pi_1^{(2)}$  в (4.2) понадобится также выражение

$$\begin{aligned} \int t \times \omega_{\perp} \cdot x \Pi_3^{(0)} dF = & \frac{1}{EF} Q_i^{(0)} M_{\perp}^{(0)} \cdot \omega_{\perp} - \frac{1}{2E} M_{\perp}^{(0)} \cdot t \times J^{-1} \cdot (t \cdot \omega_{\perp} \times {}^3H) \cdot J^{-1} \times \\ & \times t \cdot M_{\perp}^{(0)} + \frac{1}{\mu C^2} M_i^{(0)2} i \times t \cdot \omega_{\perp} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Набор формул (4.5)–(4.7), (4.9) и (4.10) дает искомое выражение  $\Pi_1^{(2)}$ . Важность этих членов второго порядка обусловлена тем, что лишь в них проявляется зависимость энергии от кривизны и кручения стержня.

**5. Упругие модули стержня.** Для определения тензоров жесткости **A**, **B**, **C** в одномерной модели стержня постулируем тождество выражений плотности энергии  $\Pi_1$  в (4.1) и в (4.4).

Представим искомые модули в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_{\perp} + \mathbf{a}t + t\mathbf{a} + A_i t t = \mathbf{A}^{(0)} + \varepsilon^2 \mathbf{A}^{(2)} + \dots \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_{\perp} + \mathbf{b}t + t\mathbf{b} + B_i t t = \mathbf{B}^{(0)} + \varepsilon^2 \mathbf{B}^{(2)} + \dots \\ \mathbf{C} &= \mathbf{C}_{\perp} + \mathbf{c}_1 t + t\mathbf{c}_2 + C_i t t = \mathbf{C}^{(0)} + \varepsilon^2 \mathbf{C}^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (5.1)$$

Малыми буквами обозначены соответствующие векторы в плоскости сечения. Разложение ведется по степеням  $\varepsilon^2$ , поскольку такого порядка малости приняты кривизна и кручение стержня.

Выражение  $\Pi_1$  из (4.1) перепишем в форме

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & \frac{1}{2} (M_{\perp} \cdot \mathbf{A}_{\perp} \cdot M_{\perp} + A_i M_i^2 + 2M_{\perp} \cdot \mathbf{a} M_i + Q_{\perp} \cdot \mathbf{B}_{\perp} \cdot Q_{\perp} + B_i Q_i^2 + 2Q_{\perp} \cdot \mathbf{b} Q_i) + \\ & + M_{\perp} \cdot \mathbf{C}_{\perp} \cdot Q_{\perp} + C_i M_i Q_i + M_{\perp} \cdot \mathbf{c}_1 Q_i + M_i \mathbf{c}_2 \cdot Q_{\perp} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Представив **M**, **Q** и модули рядами по степеням  $\varepsilon$ , получим разложение плотности энергии  $\Pi_1$ . Оно должно иметь те же коэффициенты, что и разложение (4.2). По виду главного члена  $\Pi_1^{(0)}$  (4.3) находим

$$\mathbf{A}_{\perp}^{(0)} = (EI)^{-1}, \quad A_i^{(0)} = (\mu C)^{-1}, \quad \mathbf{a}^{(0)} = 0, \quad B_i^{(0)} = (EF)^{-1}, \quad C_i^{(0)} = 0, \quad \mathbf{c}_1^{(0)} = 0$$

Здесь — обычные выражения жесткостей на изгиб, кручение и растяжение. Из формулы (4.4) для  $\Pi_1^{(1)}$  далее получим

$$\mathbf{b}^{(0)} = 0, \quad \mathbf{c}_1^{(0)} = 0, \quad \mathbf{c}_2^{(0)} = (\mu C)^{-1} \mathbf{e} \quad (5.4)$$

Вектор  $\mathbf{c}_2^{(0)}$  связывает изгиб и кручение в призматическом стержне. Он определяет положение центра изгиба [2].

Анализ рассмотренного в п. 4 выражения  $\Pi_1^{(2)}$  приводит к следующему:

$$\mathbf{B}_\perp^{(0)} = (\mu \mathbf{F} \mathbf{K})^{-1}, \quad C_i^{(2)} = \omega_i (\mu F)^{-1} (1 - J C^{-1}), \quad c_1^{(2)} = (1 + 2\nu) (EF)^{-1} \omega_\perp - \quad (5.5)$$

$$- \nu E^{-1} \omega_\perp \cdot \left[ \frac{1}{2} J (F I)^{-1} - t \times J^{-1} \cdot \int (1/2 x^2 \mathbf{E}_\perp - \mathbf{x} \mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi dF \cdot J^{-1} \times t - \right. \\ \left. - 2 (C I)^{-1} \cdot \mathbf{i} (\mathbf{e} + \varepsilon) \times t + \frac{2\nu}{1 + \nu} I^{-1} \cdot \int \psi \mathbf{x} dF \cdot I^{-1} \right],$$

$$\mathbf{a}^{(2)} = \omega_i (\mu C)^{-1} \left[ t \times J^{-1} \cdot \left( \mathbf{H} - \frac{3 + 2\nu}{1 + \nu} \mathbf{i} \right) + \mathbf{e} \right]$$

$$\mathbf{A}_\perp^{(2)} = 4\nu (\mathbf{i} \cdot (E C I)^{-1} \omega_\perp \times t)^s - t \times (E J)^{-1} \cdot [1/2 \nu (\omega_\perp \times t \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}_\perp + \\ + (\omega_\perp \times t \mathbf{H} + \mathbf{H} \times t \omega_\perp)^s] - (1 + 2\nu) \omega_\perp \times t \cdot {}^3 \mathbf{H} \cdot J^{-1} \times t$$

$$A_i^{(2)} = -2 (\mu C)^{-1} \omega_\perp \cdot (3 C^{-1} t \times \mathbf{i} + \mathbf{e}), \quad B_i^{(2)} = -\nu \mathbf{H} \cdot (E F J)^{-1} \times t \cdot \omega_\perp$$

Здесь  $\mathbf{B}_\perp^{(0)}$  — тензор жесткости на сдвиг призматического стержня. Скаляр  $C_i^{(2)}$  определяет перекрестную связь между растяжением и кручением, характерную для естественно закрученных ( $\omega_i \neq 0$ ) стержней. Вектор  $c_i^{(2)}$  обусловлен кривизной стержня ( $\omega_\perp$ ) и связывает растяжение с изгибом. Выражение вектора  $\mathbf{a}^{(2)}$  говорит о моментной связи между изгибом и кручением в естественно закрученных стержнях. Величины  $\mathbf{A}_\perp^{(2)}$ ,  $A_i^{(2)}$  и  $B_i^{(2)}$  характеризуют обусловленные кривизной и кручением добавки в жесткостях на изгиб, кручение и растяжение.

Сводя (5.3) — (5.5) в (5.1), получим искомые модули стержня. Точность, с которой они вычислены, определяется их местом в плотности энергии:  $\mathbf{A}^{(2)}$  построен полностью,  $\mathbf{C}^{(2)}$  — частично,  $\mathbf{B}_\perp^{(2)}$  остался неизвестным, ибо содержится в малых высшего порядка.

Заметим, что для расчета модулей нужно решить лишь три краевые задачи в сечении — для функций  $\Phi$ ,  $\varphi$  и  $\psi$ .

В качестве примера рассмотрим прямоугольное сечение  $|x_1| \leq a$ ,  $|x_2| \leq b$ . Компоненты векторов  $\varphi$  и  $\psi$  таковы

$$\varphi_1 = \frac{1}{6} (x_1^3 - 3a^2 x_1),$$

$$\psi_1 = \frac{16b^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \left( a \frac{\text{sh}(k+1)/2b\pi x_1}{\text{sh}(2k+1)/2b\pi a} - x_1 \right) \cos \frac{2k+1}{2b} \pi x_2$$

(другие получаются соответствующей заменой). Вычисляем компоненты тензоров

$$\mathbf{V} = \int (1/2 x^2 \mathbf{E}_\perp - \mathbf{x} \mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi dF, \quad \mathbf{S} = \int \psi \mathbf{x} dF, \quad V_{11} = 2/3 b a^3 (1/5 a^2 - 1/3 b^2)$$

$$S_{11} = 256 \pi^{-5} a^2 b^4 \sum_{k=1,3,\dots} k^{-5} \text{cth} \frac{k\pi a}{2b} - \frac{8}{15} a b^5 - \frac{4}{9} a^3 b^3$$

Определив также  $J_{11} = 2/3 b a^3$ ,  $\mathbf{i} = \mathbf{e} = \varepsilon = \mathbf{H} = 0$ ,  ${}^3 \mathbf{H} = 0$ , получим

$$A_i^{(2)} = B_i^{(2)} = 0, \quad c_2^{(0)} = \mathbf{a}^{(2)} = 0, \quad \mathbf{A}_\perp^{(2)} = 0$$

$$c_1^{(2)} = \frac{1 + 2\nu}{EF} \omega_\perp - \frac{\nu}{E} \omega_\perp \cdot \left[ \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \left( \frac{J}{2FJ_{22}} + \frac{V_{22}}{J_{22}^2} + \frac{2\nu}{1 + \nu} \frac{S_{11}}{J_{22}^2} \right) + \right.$$



$$+e_2 e_2 \left( \frac{J}{2FJ_{11}} + \frac{V_{11}}{J_{11}^2} + \frac{2\nu}{1+\nu} \frac{S_{22}}{J_{11}^2} \right) \Bigg]$$

В случае  $a \gg b$ ,  $\omega = ke_2$  (круговое кольцо, приближающееся к пластинке) будем иметь

$$c_1^{(2)} = \frac{k}{Eab} e_2 \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{10} \nu + O\left(\frac{b^4}{a^4}\right) \right)$$

Именно такой результат получается, если всю задачу рассмотреть заново как плоскую.

**6. Роль добавок в упругих модулях.** От кривизны и кручения возникают малые добавки в тензорах  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ . Чтобы выяснить, сколь необходимо их удержание, обратимся к уравнениям (1.1). Они интегрируются в квадратурах:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 - \int_0^s \mathbf{q} ds, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{Q}_0 \times \mathbf{r} - \int_0^s [(\mathbf{r}(\sigma) - \mathbf{r}(s)) \times \mathbf{q}(\sigma) + \mathbf{m}(\sigma)] d\sigma$$

Константы  $\mathbf{Q}_0$  и  $\mathbf{M}_0$  можно определить из уравнений, получающихся при интегрировании соотношений упругости в (1.1):

$$\theta|_0^L = \int_0^L (\mathbf{A} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}) ds, \quad (\mathbf{u} - \theta \times \mathbf{r})|_0^L = \int_0^L [\mathbf{r} \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{C}] ds \quad (6.1)$$

Будем считать, что на концах стержня ( $s=0$ ,  $s=L$ ) заданы перемещения и повороты. Тогда левые части в (6.1) будут известны, и мы получим следующую систему уравнений для  $\mathbf{Q}_0$  и  $\mathbf{M}_0$ :

$$\lambda \cdot \mathbf{M}_0 + \nu \cdot \mathbf{Q}_0 = \Theta, \quad \mathbf{M}_0 \cdot \nu + \mu \cdot \mathbf{Q}_0 = \mathbf{U} \quad (6.2)$$

$$\lambda = \int_0^L \mathbf{A} ds, \quad \nu = \int_0^L (\mathbf{C} - \mathbf{A} \times \mathbf{r}) ds, \quad \mu = \int_0^L [\mathbf{B} - \mathbf{r} \times \mathbf{A} \times \mathbf{r} + 2(\mathbf{r} \times \mathbf{C})^s] ds$$

Правые части  $\Theta$  и  $\mathbf{U}$  определяются нагрузками и условиями на концах. Опираясь на положительную определенность  $\Pi_1$  в (1.1), можно доказать следующие утверждения:

1°. Тензоры  $\lambda$  и  $\mu$  положительно определены и потому обратимы.

2°. Система (6.2) при любых правых частях имеет единственное решение.

Из (6.2) получим

$$\mathbf{M}_0 = \lambda^{-1} \cdot (\Theta - \nu \cdot \mathbf{Q}_0), \quad \mathbf{Q}_0 = \Lambda^{-1} \cdot (\mathbf{U} - \nu^T \cdot \lambda^{-1} \cdot \Theta) \quad (6.3)$$

$$\Lambda = \mu - \nu^T \cdot \lambda^{-1} \cdot \nu$$

Рассмотрим структуру тензора  $\Lambda$ . Положим  $\mathbf{r} = L\mathbf{r}^\circ$ ,  $\mathbf{C} = h_C \mathbf{C}^\circ$ ,  $\mathbf{B} = h_B \mathbf{B}^\circ$ ; тензоры  $\mathbf{C}^\circ$ ,  $\mathbf{B}^\circ$  и  $\mathbf{A}$  — одной размерности. Малыми параметрами будут  $\varepsilon_B = h_B L^{-1}$  и  $\varepsilon_C = h_C L^{-1}$ . Теперь

$$\nu = L(\nu_0 + \varepsilon_C \nu_1), \quad \mu = L^2(\mu_0 + \varepsilon_C \mu_1 + \varepsilon_B^2 \mu_2) \quad (6.4)$$

$$\Lambda = L^2(\Lambda_0 + \varepsilon_C \Lambda_1 + \varepsilon_C^2 \Lambda_2 + \varepsilon_B^2 \mu_2)$$

$$\nu_0 = - \int \mathbf{A} \times \mathbf{r}^\circ ds, \quad \nu_1 = \int \mathbf{C}^\circ ds$$

$$\mu_0 = - \int \mathbf{r}^\circ \times \mathbf{A} \times \mathbf{r}^\circ ds, \quad \mu_1 = 2 \int (\mathbf{r}^\circ \times \mathbf{C}^\circ)^s ds, \quad \mu_2 = \int \mathbf{B}^\circ ds$$

$$\Lambda_0 = \mu_0 - \nu_0^T \cdot \lambda^{-1} \cdot \nu_0, \quad \Lambda_1 = \mu_1 - 2(\nu_0^T \cdot \lambda^{-1} \cdot \nu_1)^s, \quad \Lambda_2 = \nu_1^T \cdot \lambda^{-1} \cdot \nu_1$$

В тензоре  $\Lambda$  (6.4) видим малые добавки, обусловленные тензорами  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ . Удержание этих добавок необходимо, если тензор  $\Lambda_0$  близок к вырождению.

*Утверждение 3°.* Условие  $\det \Lambda_0 \neq 0$  может быть нарушено лишь для прямолинейного стержня.

*Доказательство.* Если  $\det \Lambda_0 = 0$ , то система  $\lambda \cdot \mathbf{M}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{Q}_0 = 0$ ,  $\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + \mu_0 \cdot \mathbf{Q}_0 = 0$  имеет нетривиальное решение. Следовательно, для некоторых  $\mathbf{M}_0$  и  $\mathbf{Q}_0$  будет  $\mathbf{M}_0 \cdot \lambda \cdot \mathbf{M}_0 + \mathbf{Q}_0 \cdot \mu_0 \cdot \mathbf{Q}_0 + 2\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{Q}_0 = 0$ , что равносильно

$$\int \mathbf{M} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{M} ds = 0, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{Q}_0 \times \mathbf{r}$$

Но тензор  $\mathbf{A}$  положительно определен, и потому должно быть  $\mathbf{M} = 0$ . Дифференцируя это тождество, получим  $\mathbf{Q}_0 \times \mathbf{r}' = 0$ , что возможно лишь для прямолинейного стержня.

Таким образом, малые добавки в  $\Lambda$  необходимы для стержней, близких к прямолинейным. Именно для такой формы стержня мы и определили выше упругие модули. Добавки в  $\Lambda$  возникли от учета растяжения и сдвига (тензоры  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ ), а также от зависимости модулей от кривизны и кручения. Можно указать конкретные задачи, где учет поправок приобретает первостепенную важность.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Елисеев В. В. К нелинейной динамике упругих стержней // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 635–641.
2. Елисеев В. В. Определяющие уравнения для упругих призматических стержней // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 70–75.
3. Лурье А. И., Джанелидзе Г. Ю. Задача Сен-Венана для естественно скрученных стержней // Докл. АН СССР. 1939. Т. 24. № 1. С. 23–26.; № 3. С. 226–228; № 4. С. 325–326.
4. Бердичевский В. Л., Старосельский Л. А. Изгиб, растяжение и кручение естественно закрученных стержней // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 978–991.
5. Бердичевский В. Л., Старосельский Л. А. К теории криволинейных стержней типа Тимошенко // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 6. С. 1015–1024.
6. Whitman A. B., Cohen H. Constitutive equations for curved and twisted, initially stressed elastic rods // Acta mech. 1978. V. 30. № 3–4. P. 237–257.
7. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.

Ленинград

Поступила в редакцию  
15.V.1989