

УДК 539.3:534.1

© 1991 г.

А. С. ЮДИН, М. Н. ЯЦЕНКО

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ ЖЕСТКОСТНЫМИ И МАССОВЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Математическое моделирование сложных конструкций подкрепленными оболочками вращения позволяет разрабатывать и использовать эффективные методы и алгоритмы [1–3]. Осевая симметрия модели дает возможность отделять окружную координату с помощью тригонометрических рядов Фурье и сводить исходную двумерную краевую задачу к ряду одномерных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно невысокого порядка.

Разнообразие современных конструкций не позволяет ограничиваться осесимметричными моделями. Актуально развитие методов расчета для моделей более общего вида. Достаточно универсальным средством здесь могут быть методы типа конечных элементов [4]. Вместе с тем для неосесимметричных конструкций целесообразно развитие методов на алгоритмической базе решения задач для моделей с осевой симметрией, сохраняющих возможность модального анализа. Основная проблема обобщения и возрастающие вычислительные трудности здесь связаны с нераспадеием квазиодномерной системы на ряд независимых подсистем невысокого порядка. В принципе, система бесконечна, а порядок решаемой урезанной системы может составлять несколько десятков для обеспечения удовлетворительной сходимости. Одновременно возрастает громоздкость операторов разрешающей системы.

В настоящей работе реализован подход, основанный на построении связанной квазиодномерной системы ОДУ методом типа Л. В. Канторовича с последующим решением краевой задачи алгоритмом дифференциальной прогонки с ортогонализацией комплексных векторов-решений задач Коши. Реализованы меры по эффективной вычислимости операторов основных уравнений.

1. Рассматривается задача о вынужденных стационарных гармонических колебаниях оболочечной конструкции, составленной из набора конструктивно-анизотропных секций с геометрией оболочек вращения. Секции состыкованы через упругие кольца и имеют усиливающие подкрепляющие элементы или массы в пределах областей, ограничиваемых координатными линиями отсчетной поверхности. Усиления могут быть типа слоя (утолщение), типа балки (стрингер) и распределены перегулярно. Конструкция может контактировать с внешней средой, характеризуемой локальным импедансом¹. После перехода к безразмерным величинам [5] и введения основных функций

$$\begin{aligned}y_1 &= S + \varepsilon_1 k_2 H, & y_2 &= M_{11}, & y_3 &= T_{11} \\ y_4 &= Q_{11} + \varepsilon_1 H', & y_5 &= v, & y_6 &= \vartheta_1 \\ y_7 &= \dot{u}, & y_8 &= w\end{aligned}$$

исходные соотношения теории линейных гармонических колебаний конструктивно-анизотропных оболочек преобразуются к системе восьми

¹ См. Шепелева В. Г., Юдин А. С., Емельянова Л. А. Собственные и вынужденные колебания составных оболочек вращения с дискретными кольцевыми ребрами. Ростов-на-Дону, 1987. 19 с. — Ден. в ВИНТИ 16.10.87, № 7319-B87.

дифференциальных уравнений в частных производных относительно амплитуд

$$\begin{aligned}
 y_1' &= -2\psi y_1 - T_{22} - k_2 \varepsilon_1 M_{22} + \psi \varepsilon_1 (k_1 - k_2) H - \Omega^2 \rho_1 y_5 - q_2 \\
 y_2' &= -\psi y_2 + \psi M_{22} - 2H' + y_4 / \varepsilon_1 \\
 y_3' &= -y_1 - \psi y_3 - k_1 y_4 + \psi T_{22} + \varepsilon_1 (k_1 + k_2) H - \Omega^2 \rho_1 y_7 - q_1 \\
 y_4' &= k_1 y_3 - \psi y_4 - 2\psi \varepsilon_1 H' + k_2 T_{22} - \varepsilon_1 M_{22} - \Omega^2 \rho_1 y_8 + p - q_3 \\
 y_5' &= E_{12} + \psi y_5 - y_7', \quad y_6' = K_{11} / \varepsilon_1 \\
 y_7' &= E_{11} - k_1 y_8, \quad y_8' = -y_6 + k_1 y_7
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $p = Z y_8$ — нормальная реакция динамического давления среды

$$\begin{aligned}
 (\dots)' &= (\dots), \alpha_1 / A_1, \quad (\dots)' = (\dots), \alpha_2 / A_2 \\
 E_{12} &= y_1 / b_1 + b_2 \psi (k_1 - k_2) y_5 - 2b_2 y_6' + b_2 (k_1 + k_2) y_7' - 2\psi b_2 y_8' \\
 E_{11} &= -b_5 y_2 + b_4 y_3 + (b_{12} + \varepsilon_1 k_2 b_{13}) y_5 + \psi \varepsilon_1 b_{13} y_6 + \psi b_{12} y_7 + k_2 b_{12} y_8 - \varepsilon_1 b_{13} y_8' \\
 K_{11} &= b_6 y_2 - b_5 y_3 + (b_{14} - \varepsilon_1 k_2 b_{11}) y_5 - \psi \varepsilon_1 b_{11} y_6 + \psi b_{14} y_7 + k_2 b_{14} y_8 + \varepsilon_1 b_{11} y_8' \\
 T_{22} &= -b_{14} y_2 + b_{11} y_3 + (b_7 + \varepsilon_1 k_2 b_8) y_5 + \psi \varepsilon_1 b_8 y_6 + \psi b_7 y_7 + k_2 b_7 y_8 - \varepsilon_1 b_8 y_8' \\
 M_{22} &= b_{11} y_2 - b_{13} y_3 + (b_9 + \varepsilon_1 k_2 b_{10}) y_5 + \psi \varepsilon_1 b_{10} y_6 + \psi b_9 y_7 + k_2 b_9 y_8 - \varepsilon_1 b_{10} y_8' \\
 H &= b_2 y_1 / \varepsilon_1 + \psi (k_1 - k_2) b_3 y_5 - 2b_3 y_6' + b_3 (k_1 + k_2) y_7' - 2b_3 \psi y_8'
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= B_{33} + 2\varepsilon_1 k_2 A_{33} + \varepsilon_1^2 k_2^2 D_{33}, \quad b_2 = \varepsilon_1 (A_{33} + \varepsilon_1 k_2 D_{33}) / b_1 \\
 b_3 &= \varepsilon_1 (A_{33}^2 - B_{33} D_{33}) / b_1, \quad b = B_{11} D_{11} - A_{11}^2 \\
 b_4 &= D_{11} / b, \quad b_5 = A_{11} / b, \quad b_6 = B_{11} / b \\
 b_7 &= B_{22} + A_{12} b_{14} + B_{12} b_{12}, \quad b_8 = A_{22} + A_{12} b_{15} + B_{12} b_{13} \\
 b_9 &= A_{22} + A_{12} b_{12} + D_{12} b_{14}, \quad b_{10} = D_{22} + A_{12} b_{13} + D_{12} b_{15} \\
 b_{11} &= D_{12} b_6 - A_{12} b_5, \quad b_{12} = A_{12} b_5 - B_{12} b_4, \quad b_{13} = D_{12} b_5 - A_{12} b_4 \\
 b_{14} &= B_{12} b_5 - A_{12} b_6, \quad b_{15} = A_{12} b_5 - D_{12} b_6
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь для кручения принято выражение $K_{12} = \varepsilon_1 (\tau_1 + \tau_2) / 2$ (в обозначениях [1]); $\varepsilon_1 = h_* / R_*$ — параметр тонкостенности.

Входящие в (1.1), (1.2) компоненты напряженно-деформированного состояния представим тригонометрическими рядами Фурье по α_2 , ограничившись пока вариантом симметрии решения относительно плоскости, проходящей через ось вращения отчетной поверхности и начало координат по α_2 . Тогда y_1, y_5, E_{12}, H разлагаются в ряд по синусам, $y_2, y_3, y_6, y_8, E_{11}, K_{11}, T_{22}, M_{22}$ — по косинусам. После подстановки рядов в (1.1), (1.2), домножения на базовые функции $\pi^{-1} \sin n\alpha_2$ и $\pi^{-1} \cos n\alpha_2$, интегрирования по области определения α_2 (от 0 до 2π) и перегруппировки слагаемых приходим к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Блок из восьми уравнений, соответствующий n -й окружной моде для производных по α_1 от коэффициентов Фурье основных функций, имеет вид:

$$\begin{aligned}
 (y_1^{(n)})' &= -2\psi y_1^{(n)} + n (T_{22}^{(n)} + k_2 \varepsilon_1 M_{22}^{(n)}) / A_2 + \psi \varepsilon_1 (k_1 - k_2) H^{(n)} - \Omega^2 (\rho_1 y_5)^{(n)} - q_2^{(n)} \\
 (y_2^{(n)})' &= -\psi y_2^{(n)} + \psi M_{22}^{(n)} - 2n H^{(n)} / A_2 + y_4^{(n)} / \varepsilon_1 \\
 (y_3^{(n)})' &= -n y_1^{(n)} / A_2 - \psi y_3^{(n)} - k_1 y_4^{(n)} + \psi T_{22}^{(n)} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon_1(k_1+k_2)nII^{(n)}/A_2-\Omega^2(\rho_1y_7)^{(n)}-q_1^{(n)} \\
& (y_4^{(n)})'=k_1y_3^{(n)}-\psi y_4^{(n)}-2\psi\varepsilon_1nII^{(n)}/A_2+k_2T_{22}^{(n)}+ \\
& +\varepsilon_1n^2M_{22}^{(n)}/A_2^2-\Omega^2(\rho_1y_8)^{(n)}-q_3^{(n)}+Z^{(n)}y_8^{(n)} \\
& (y_5^{(n)})'=E_{12}^{(n)}+\psi y_5^{(n)}+ny_7^{(n)}/A_2, \quad (y_6^{(n)})'=K_{11}^{(n)}/\varepsilon_1
\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}
& (y_7^{(n)})'=E_{11}^{(n)}-k_1y_8^{(n)}, \quad (y_8^{(n)})'=-y_6^{(n)}+k_1y_7^{(n)} \\
& E_{12}^{(n)}=\pi^{-1}\sum_k\{(b_1^{-1})_s y_1^{(k)}-(b_2)_s[\psi(k_1-k_2)y_5^{(k)}+2ky_6^{(k)}/A_2- \\
& -k(k_1+k_2)y_7^{(k)}/A_2+2\psi y_8^{(k)}]\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_{11}^{(n)}=\pi^{-1}\sum_k\{-(b_5)_c y_5^{(k)}+(b_4)_c y_3^{(k)}+k[(b_{12})_c+ \\
& +\varepsilon_1k_2(b_{13})_c]y_5^{(k)}/A_2+\psi\varepsilon_1(b_{13})_c y_6^{(k)}+\psi(b_{12})_c y_7^{(k)}+ \\
& +[k_2(b_{12})_c+\varepsilon_1k^2(b_{13})_c/A_2^2]y_8^{(k)}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& K_{11}^{(n)}=\pi^{-1}\sum_k\{(b_6)_c y_2^{(k)}-(b_3)_c y_3^{(k)}+k[(b_{14})_c- \\
& -\varepsilon_1k_2(b_{11})_c]y_5^{(k)}/A_2-\psi\varepsilon_1(b_{11})_c y_6^{(k)}+\psi(b_{14})_c y_7^{(k)}+ \\
& +[k_2(b_{14})_c-\varepsilon_1k^2(b_{11})_c/A_2^2]y_8^{(k)}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& T_{22}^{(n)}=\pi^{-1}\sum_k\{-(b_{14})_c y_2^{(k)}+(b_{11})_c y_3^{(k)}+k[(b_7)_c+ \\
& +\varepsilon_1k_2(b_8)_c]y_5^{(k)}/A_2+\psi\varepsilon_1(b_8)_c y_6^{(k)}+\psi(b_7)_c y_7^{(k)}+ \\
& +[k_2(b_7)_c+\varepsilon_1k^2(b_8)_c/A_2^2]y_8^{(k)}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& H^{(n)}=\pi^{-1}\sum_k\{(b_2)_s y_1^{(k)}/\varepsilon_1-\psi(k_1-k_2)(b_3)_s y_5^{(k)}+ \\
& +2k(b_3)_s y_6^{(k)}/A_2-k(k_1+k_2)(b_3)_s y_7^{(k)}/A_2+ \\
& +2\psi k(b_3)_s y_8^{(k)}/A_2\}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}
& M_{22}^{(n)}=\pi^{-1}\sum_k\{(b_{11})_c y_2^{(k)}-(b_{13})_c y_3^{(k)}+k[(b_9)_c+ \\
& +\varepsilon_1k_2(b_{10})_c]y_5^{(k)}/A_2+\psi\varepsilon_1(b_{10})_c y_6^{(k)}+\psi(b_9)_c y_7^{(k)}+ \\
& +[k_2(b_9)_c+\varepsilon_1k^2(b_{10})_c/A_2^2]y_8^{(k)}\}
\end{aligned}$$

$$(\rho_1y_7)^{(n)}=\pi^{-1}\sum_k\{(\rho_1)_c y_7^{(k)}\}$$

$$\begin{aligned}
(\rho_1 y_s)^{(n)} &= \pi^{-1} \sum_k \{(\rho_1)_s y_s^{(k)}\}, & (\rho_1 y_s)^{(n)} &= \pi^{-1} \sum_k \{(\rho_1)_c y_s^{(k)}\} \\
\{(b_j)_s, (b_1^{-1})_s, (\rho_1)_s\} &= \{(b_j)_{ss}^{(nh)}, (b_1^{-1})_{ss}^{(nh)}, (\rho_1)_{ss}^{(nh)}\} = \\
&= \int_0^{2\pi} \{b_j, b_1^{-1}, \rho_1\} \sin n\alpha_2 \sin k\alpha_2 d\alpha_2 \\
\{(b_j)_c, (\rho_1)_c\} &= \{(b_j)_{cc}^{(nh)}, (\rho_1)_{cc}^{(nh)}\} = \\
&= \int_0^{2\pi} \{b_j, \rho_1\} \cos n\alpha_2 \cos k\alpha_2 d\alpha_2, \quad j=1, \dots, 15
\end{aligned} \tag{1.6}$$

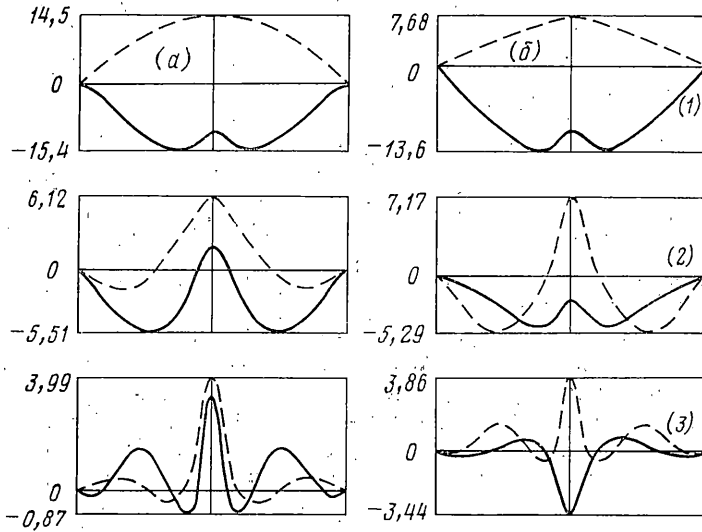
При усечении рядов до конечных сумм с $N+1$ членами ($n=0, \dots, N$) задача сводится к краевой для системы 8 $(N+1)$ -порядка. Отказ от условий симметрии (антисимметрии) разрешающих функций увеличивает порядок системы вдвое. Соответствующее обобщение осуществляется по представленной схеме. Аналогично могут быть записаны и использованы условия сопряжения для кольцевых ребер с жесткостными и массовыми параметрами, зависящими от окружной координаты. К основным уравнениям присоединяются краевые условия.

2. Решение краевых задач для связанной системы можно получить методом дифференциальной прогонки с ортогонализацией в промежуточных точках [1, 2], обобщенным на поле комплексных векторов. Для надежной устойчивости счета целесообразно применять двойную ортогонализацию. Комплекс программ на Фортране-77 для ЭВМ ЕС, использующий оптимизирующий транслятор $VS(3)$, реализован применительно к задачам вынужденных гармонических колебаний. Для эффективного вычисления правых частей разрешающей системы интегралы берутся в аналитической форме. Это легко выполняется при кусочнопостоянной зависимости жесткостных и массовых параметров оболочки от координат. Тогда предвременно заполняется матрица значений интегралов (1.6) с привязкой по участкам. Для цилиндрических участков заготавливаются элементы матриц системы (1.4), (1.5). В составных конструкциях, включающих участки полной осевой симметрии, учитывается вырождение сумм в правых частях (1.5) в одно слагаемое с номером n . Предварительная структурная сортировка коэффициентов разрешающей системы на постоянные и переменные составляющие позволяет экономить машинное время.

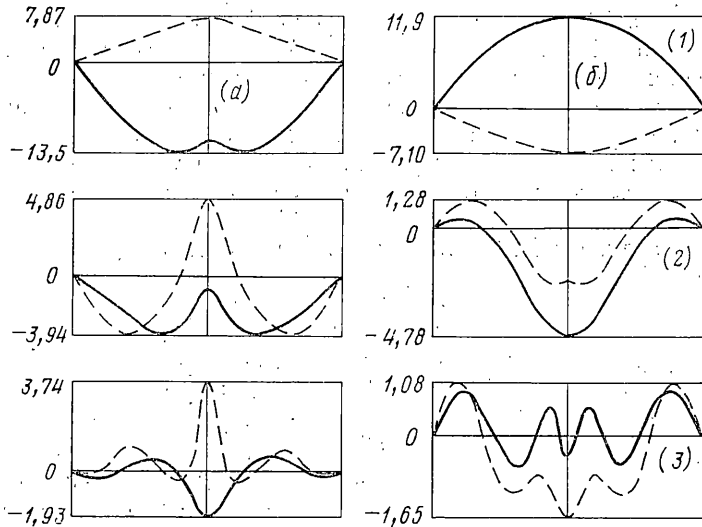
В качестве тестовых задач рассматривались вынужденные колебания оболочек с локализованной массой и с одним продольным ребром, решения которых сравнивались с решениями, полученными другими методами.

Пусть к конструктивно-анизотропной цилиндрической оболочке с общей массой M_0 присоединена масса $M_r=0.05M_0$, распределенная по площадке, локализованной в середине пролета на боковой поверхности. В системе безразмерных величин (индекс U):

$$\begin{aligned}
\{r, L, l, \delta_1\}_U &= \{\dots\}_D/R^*, & \{E\}_U &= \{E\}_D/E^* \\
\{\rho, \rho_c\}_U &= \{\dots\}_D/\rho^*, & \{u, v, w, h\}_U &= \{\dots\}_D/h^* \\
\{M_0, M_r\}_U &= \{\dots\}_D/M^*, & \{\rho_1\}_U &= \{\rho_1\}_D/(\rho^*h^*) \\
\{Q_j\}_U &= \{Q_j\}_D/A^*, & \{q_j\}_U &= \{q_j\}_D R^{*2}/A^* \\
\{A_{ji}\}_U &= \{A_{ji}\}_D/A^*, & \{B_{ji}\}_U &= \{B_{ji}\}_D/B^* \\
\{D_{ji}\}_U &= \{D_{ji}\}_D/D^*, & \{c\}_U &= \{c_D\}/c^*, \quad j, i=1, 2, 3
\end{aligned}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где $B_* = E_* h_* / (1 - \nu_*^2)$, $A_* = B_* h_*$, $D_* = A_* h_*$, $M_* = 2\pi R_*^2 h_* \rho_*$, $c_* = \{E_* / [\rho_* (1 - \nu_*^2)]\}^{1/2}$, $\varepsilon_1 = h_* / R_*$, с нормировкой $E_* = E$, $\nu_* = 0,3$, $R_* = 0,724r$, $h_* = 0,816h$, $\rho_* = \rho$ безразмерные параметры конструкции задавались следующими: $r = 1,381$, $L = 3,5$, $l = 0,25$, $\delta_1 = 0,729$, $E = 1$, $M_0 = 8,937$, $M_T = 0,447$, $h = 1,225$, $\varepsilon_1 = 0,01$, $A_{11} = A_{12} = A_{33} = 0$, $A_{22} = 5,203$, $B_{11} = 1,225$, $B_{12} = 0,368$, $B_{22} = 1,792$, $B_{33} = 0,429$, $D_{11} = 0,153$, $D_{12} = 0,046$, $D_{22} = 56,603$, $\rho_1 = 1,849$, $\Delta\rho_1 = 15,41$.

Здесь r — радиус, L — длина, M_0 — масса, ρ — плотность материала, E — модуль Юнга, h — толщина, A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} — приведенные жесткости, ρ_1 , $\Delta\rho_1$ — удельная основная и дополнительная масса оболочки; M_T — присоединенная масса, распределенная по площадке $l \times \delta_1$: $\Delta\rho_1 = 2\pi M_T / (l\delta_1)$; u , v , w — амплитуды перемещений; Q_i — сосредоточенные силы, q_j — распределенные по поверхности нагрузки. Задавалась нормальная нагрузка на площадке

$l \times \delta_1$, эквивалентная единичной безразмерной силе Q_3 . Коэффициент потерь в оболочке полагался равным 0,05, безразмерные плотность ρ_* и скорость звука внешней среды c , соответственно, 0,128 и 0,28. Безразмерный параметр частоты $\Omega = \omega R_*/c_*$, где ω — круговая частота.

Массу M_T можно рассмотреть также как точечную с координатами $\alpha_1 = L/2$, $\alpha_2 = 0$, и воспользоваться методом податливостей. Переходная функция для усиления Q_3 на оболочку, передаваемого силой P_3 через массу M_T , имеет вид

$$\varphi = (1 - 2\pi w_0 \Omega^2 M_T)^{-1}, \quad Q_3 = \varphi P_3$$

где w_0 — динамическая податливость от единичной безразмерной силы в точке крепления массы.

На фиг. 1 показаны формы колебаний — реальные (сплошные кривые) и мнимые (штриховые) части комплексных амплитуд по нормали перемещения w , полученные методом податливостей. По вертикали: а) без массы M_T , б) с массой M_T . По горизонтали: 1) $\Omega = 0,1$, 2) $\Omega = 0,2$, 3) $\Omega = 0,3$. Меридиан $\alpha_2 = 0$. Фиг. 2 представляет результаты по общему методу: а) на меридиане $\alpha_2 = 0$, б) на меридиане $\alpha_2 = \pi$ при наличии массы M_T для тех же частот. Аналогичные кривые фиг. 1, б и фиг. 2, а хорошо согласуются по форме для всех частот и по амплитудам для низких частот. Расхождение по амплитудам с ростом частоты связано с проявлением различия моделей. Сходимость решения обеспечивалась семью окружными модами, время работы процессора ЭВМ ЕС-1055М для одной частоты — 28 мин.

Для изотропной оболочки с $L/r = 2,4$, $h/r = 0,01$, усиленной ребром квадратного сечения со стороной $10h$, результаты сравнивались с [6] при коэффициенте потерь $\eta = 0,01$, длине ребра $b = 0,8L$ и частотах Ω , равных 0,06, 0,12 и 0,234. Получено хорошее согласование форм колебаний (реальной части комплексных амплитуд w) с представленными на рис. 4.7 из [6] в одинаковых нормировках безразмерных величин. Количество окружных мод — 7—9.

Авторы благодарят И. И. Воровича за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций/А. В. Кармишин, В. А. Лясковец, В. И. Мяченков, А. Н. Фролов. М.: Машиностроение, 1975. 374 с.
2. Мяченков В. И., Григорьев И. В. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ: Справочник. М.: Машиностроение, 1981. 212 с.
3. Гончар Г. В., Юдин А. С., Яценко М. Н. Экономические алгоритмы расчета собственных и вынужденных колебаний многосвязных подкрепленных оболочек вращения // Механика сплошной среды. Ростов н/Д: Изд-во Гос. ун-та, 1988. С. 63—67.
4. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: Справочник/Под общей ред. В. И. Мяченкова. М.: Машиностроение, 1989. 520 с.
5. Шенелева В. Г., Юдин А. С. Вынужденные колебания подкрепленной оболочки вращения под действием несимметричной нагрузки // Тр. XII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1980. Т. 3. С. 276—280.
6. Авербух А. З., Вейцман Р. И., Генкин М. Д. Колебания элементов конструкций в жидкости. М.: Наука, 1987. 158 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
10.VII.1990