МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1991

УДК 539.3 : 534.1

И. В. АНДРИАНОВ, Г. А. КРИЖЕВСКИЙ

ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГОВЫХ И СЕКТОРНЫХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

На основе уравнения Бергера и метода динамического краевого эффекта получены выражения частот и форм собственных колебаний круговых и секторных пластин, асимптотически приближающиеся к точным с ростом изменяемости функции прогиба по пространственным переменным. Сравнение результатов вычисления первой собственной частоты круговой пластины предложенным методом с данными решения уравнений Кармана методом конечных элементов показывает хорошее согласование характеристик. Исследовано влияние угла раствора сектора на характер скелетных кривых.

1. Динамический краевой эффект вблизи круговой границы. Метод динамического краевого эффекта (МДКЭ) [1] нашел широкое применение для расчета линейных колебаний прямоугольных пластин. В [2, 3] выполнено обобщение метода на случай нелинейных колебаний. Непосредственно применить МДКЭ к расчету круговых и секторных пластин с учетом геометрической нелинейности невозможно.

Ниже предложена модификация МДКЭ, позволяющая находить собственные частоты и формы колебаний секторных пластин при больших амплитудах.

При описании движения пластины будем исходить из упрощенного уравнения, предложенного в [4] и справедливого, как и решение МДКЭ, при большой изменяемости формы по пространственным переменным [5]:

$$\Delta^2 w - N\Delta w + \sigma^2 \partial^2 w/\partial t^2 = 0 \tag{1.1}$$

$$\Delta \equiv \partial^2/\partial r^2 + \partial/(r\partial r) + \partial^2/\partial\varphi^2$$

$$N = \frac{12}{\theta}\int_0^1\int_0^\theta\left[\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{r\partial\varphi}\right)^2\right] r\, dr\, d\varphi$$

r, φ — полярные координаты: $r\in[0, 1]$, $\varphi\in[0, \theta]$, R — радиус сектора, $w(r, \varphi, t)$ — функция прогиба в долях R, t — текущее время, $\sigma = R^2(\rho h/D)^{1/2}$, h — толщина, ρ — плотность материала, $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

На контуре пластины для определенности примем условия упругого защемления

$$w|_{\Gamma_1,\Gamma_2} = [u\partial w/\partial\varphi - (1-u)\partial^2 w/\partial\varphi^2]|_{\Gamma_1,\Gamma_2} = 0$$
$$w|_{\Gamma_3} = \{Q\partial w/\partial r - (1-Q)[\Delta w - (\nu-1)\partial w/(r\partial r)]\}|_{\Gamma_3} = 0 \tag{1.2}$$

$$|w_r^{(i)}(0, \varphi, t)| < \infty \quad (i=0, 1) \tag{1.3}$$

где Γ_1, Γ_2, Γ_3 — соответственно прямолинейная и круговая части контура; u и Q — приведенные параметры упругости заделки ($u, Q\in[0, 1]$).

Пусть начальные условия таковы

$$w(r,\ \varphi,\ 0)=\max w,\quad w_t'(r,\ \varphi,\ 0)=0 \tag{1.4}$$

Представим решение уравнения (1.1) в форме

$$w(r,\ \varphi,\ t)=Az(r,\ \varphi)\eta(t) \tag{1.5}$$

где A — амплитуда в долях h. Для функции $\eta(t)$ вначале выберем аппроксимацию, удовлетворяющую начальным условиям (1.4):

$$\eta(t)=\cos\omega t \tag{1.6}$$

Подставим выражения (1.5), (1.6) в (1.1) и разделим переменные приближенно методом Канторовича, интегрируя по времени на отрезке $[0,2\pi/\omega]$:

$$(\Delta^2-H\Delta-\lambda^2)z(r,\ \varphi)=0 \tag{1.7}$$

$$H=\frac{9A^2}{\theta}\int_0^1\int_0^{\theta}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{r\partial\varphi}\right)^2\right]r\,dr\,d\varphi,\quad \lambda=\sigma\omega \tag{1.8}$$

В дальнейшем будем предполагать, что λ велико. Представим решение уравнения (1.7) вдали от краев $\varphi=0,\ \theta$ в виде

$$z(r,\ \varphi)=W(r)\Psi_1(\varphi),\quad \Psi_1=\sin k(\varphi-\xi) \tag{1.9}$$

где $k,\ \xi$ — неизвестные волновое число и фаза. Подставляя (1.9) в (1.7), получим

$$(\Phi^2-H\Phi-\lambda^2)W=0,\quad \Phi\equiv d^2/dr^2+d/(r\,dr)-(k/r)^2 \tag{1.10}$$

Решение уравнения (1.10), удовлетворяющее условию ограниченности (1.3), имеет вид (J_k, I_k — функции Бесселя первого рода действительного и мнимого аргумента):

$$W(r)=C_1J_k(\alpha r)+C_2I_k(\beta r) \tag{1.11}$$

$$\alpha=\{-H/2+[(H/2)^2+\lambda^2]^{1/2}\}^{1/2},\quad \beta=\{H/2+[(H/2)^2+\lambda^2]^{1/2}\}^{1/2}$$

Из (1.11) с учетом представлений (1.5), (1.9) и граничных условий (1.2) получим трансцендентное уравнение

$$\alpha J_{k+1}(\alpha)/J_k(\alpha)+\beta I_{k+1}(\beta)/I_k(\beta)=P(\alpha^2+\beta^2) \tag{1.12}$$

$$P=(1-Q)/[1-\nu(1-Q)]$$

Первое слагаемое в выражении (1.11) отвечает основному состоянию, второе описывает динамический краевой эффект (ДКЭ) вблизи кругового края. Используя асимптотические формулы для функций Бесселя [6] (различные для случаев $k^2=o(\lambda)$ и $k^2=O(\lambda)$), можно показать, что энергетический вклад ДКЭ при $\lambda\to\infty$ стремится к нулю.

2. Динамический краевой эффект вблизи прямоугольных границ. Для отыскания решения типа ДКЭ у прямолинейных границ представим решение уравнения (1.7) в виде

$$z(r,\ \varphi)=W_1(r)\Psi(\varphi),\quad W_1=J_k(\alpha r) \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в (1.7), учитывая (1.10), уравнение Бесселя и сохраняя лишь члены порядка $O(\lambda^2)$, получим

$$(\partial^2/\partial\varphi^2+k^2)[\partial^2/\partial\varphi^2+k^2-r^2(2\alpha^2+H)]W_1\Psi=0 \tag{2.2}$$

Выражение для H, в котором удержан лишь член, отвечающий основному состоянию, и полученное с использованием второй формулы Грина, имеет вид

$$H = {}^9/_2 A^2 [J_k^2(\alpha) - J_{k-1}(\alpha) J_{k+1}(\alpha)] B\alpha^2 \qquad (2.3)$$

$$B=1 \text{ при } k=0, \quad B=[1-(\sin 2k\xi)/(k\theta)]/2 \text{ при } k\neq 0$$

Переменные в уравнении (2.2) точно не разделяются, поэтому применим метод Канторовича

$$(\partial^2/\partial\varphi^2+k^2)[\partial^2/\partial\varphi^2+k^2-s(\alpha^2+H)]\Psi=0 \qquad (2.4)$$

$$s=\int_0^1 W_1^2 r^3\,dr\left(\int_0^1 W_1^2 r\,dr\right)^{-1} \quad (s\to {}^2/_3 \text{ при } \lambda\to\infty \ k^2=o(\lambda))$$

Общее решение уравнения (2.4) имеет вид

$$\Psi(\varphi)=\Psi_1(\varphi)+\Psi_2(\varphi) \qquad (2.5)$$

$$\Psi_2=C_{11}\exp(g\varphi)+C_{21}\exp(-g\varphi) \qquad (2.6)$$

где Ψ_2 — решение типа ДКЭ у прямолинейных границ

$$g=[s(\alpha^2+H)-k^2]^{1/2} \qquad (2.7)$$

Из (2.1), (2.5), (2.6) и граничных условий (1.2) следует асимптотическое уравнение

$$k\theta=2k\xi+m\pi \quad (m=1, 2, \ldots) \qquad (2.8)$$

$$k\xi=\operatorname{arctg}\{uk/[ug+(1-u)(g^2+k^2)]\} \qquad (2.9)$$

Из (2.8), (2.9) следует, что при $\lambda\to 0$:

$$k\theta=m\pi \quad (m=1, 2, \ldots) \qquad (2.10)$$

Такой же результат можно было получить непосредственно из (2.2), считая r параметром. Это означает, что выражение (2.8) уточняется с ростом λ.

Получим решение типа ДКЭ у прямолинейных границ в предположении, что $k^2=O(\lambda)$. Подставляя выражение (2.1) в (1.7), исключая $\lambda^2 W_1$ при помощи уравнения (1.10) и сохраняя лишь члены, имеющие порядок $O(k^4)$, получим

$$(\partial^2/\partial\varphi^2+k^2)(\partial^2/\partial\varphi^2-k^2-Hr^2)W_1(r)\Psi(\varphi)=0 \qquad (2.11)$$

Разделяя при помощи метода Канторовича переменные в уравнении (2.11), аналогично предыдущему получим уравнение по внешнему виду совпадающее с (2.9), где g имеет вид

$$g=(k^2+sH)^{1/2} \qquad (2.12)$$

Решение типа ДКЭ выражается равенством (2.6).

При $k^2=o(\lambda)$ из уравнения (1.12), воспользовавшись асимптотическими представлениями для функций Бесселя, получим

$$\begin{aligned}\alpha&=\operatorname{arctg}(\gamma P-\beta/\alpha)+\pi(k/2+{}^1/_4+n)\\ \gamma&=\alpha+\beta^2/\alpha \quad (n=l, 1, 2, \ldots)\end{aligned} \qquad (2.13)$$

Величина l может принимать значения 0 либо 1 в зависимости от значения P. Например, $l=0$ при $P=1$, $l=1$ при $P=0$. Через величину α можно выразить β и λ: $\beta=(\alpha^2+H)^{1/2}$, $\lambda=\alpha\beta$.

Подставим теперь выражение (2.13) в (2.9) и, считая неизвестной постоянной, потребуем, чтобы равенства (2.7) и (2.12) совпадали, причем в выражении для α^2 удержим члены порядка $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}^2$. Тогда для $\mathbf{s}$ получим

$$\mathbf{s}=(8\mathbf{k}/\pi^2)\{\mathbf{k}+4\operatorname{arctg}(\gamma\mathbf{P}-\beta/\alpha)/\pi+4\mathbf{n}+1\}^{-1} \quad (2.14)$$

Из системы трансцендентных уравнений (1.12), (1.9) находятся неизвестные $\mathbf{k}$ и α, через которые далее выражаются постоянные C_i и C_{i1}. Уравнения, в которых $\mathbf{s}$ определено выражением (2.14), являются, по-видимому, наиболее предпочтительными, поскольку, не меняя сути асимптотического метода, приводят к существенному упрощению решения. Так, при $\mathbf{P}=0$, уравнения (1.12) и (1.9) становятся независимыми. Кроме того, отпадает необходимость вычисления интегралов в уравнении (2.4).

3. Определение временной составляющей решения. Для отыскания уточненного выражения функции $\eta(\mathbf{t})$ представим решение уравнения (1.1) в виде

$$\mathbf{w}(\mathbf{r},\ \varphi,\ \mathbf{t})=\mathbf{A}\mathbf{J}_{\mathbf{k}}(\alpha\mathbf{r})\sin\mathbf{k}(\varphi-\xi)\eta(\mathbf{t}) \quad (3.1)$$

где $\mathbf{k}$ и α определены выше.

Подставив представление (3.1) в уравнение (1.1) с учетом уравнения Бесселя, получим

$$\eta^{\cdot\cdot}+\omega_0^2(1+\omega\eta^2)=0,\quad \omega_0=\alpha^2/\sigma,\quad \varkappa=4\mathbf{H}/(3\alpha^2) \quad (3.2)$$

Начальные условия

$$\eta(0)=1,\quad \eta^{\cdot}(0)=0 \quad (3.3)$$

Решение уравнения (3.2), удовлетворяющее условиям (3.3), таково

$$\eta(\mathbf{t})=\mathrm{cn}\ (\sigma_1\mathbf{t},\ \mathbf{a}) \quad (3.4)$$

$$\sigma_1=\omega_0(1+\varkappa)^{1/2},\quad \mathbf{a}=\{\varkappa/[2(1+\varkappa)]\}^{1/2}$$

где период решения $\mathbf{T}=4\mathbf{K}(\mathbf{a})/\sigma_1$, $\mathbf{K}(\mathbf{a})$ — полный эллиптический интеграл первого рода; cn — эллиптическая косинус-функция Якоби.

Безразмерная циклическая частота собственных колебаний равна

$$\omega^*=2\pi\sigma_1/\mathbf{T} \quad (3.5)$$

Следует заметить, что последовательнее для аппроксимации временной функции при поиске решений типа ДКЭ использовать выражение (3.4), однако замена эллиптического косинуса обычным (первым членом разложения в ряд Фурье) в данном случае позволяет значительно упростить выкладки, не приводя к изменению сущности асимптотического метода.

Уравнение (3.2) можно решить приближенно методом Бубнова — Галеркина. Полученная таким образом безразмерная частота совпадает с найденной ранее постоянной λ.

Порядок процедур при нахождении ДКЭ можно изменять: вначале представить решение уравнения (1.1) в виде (3.1), где $\mathbf{k}$, ξ и α — неизвестные постоянные; найти $\eta(\mathbf{t})$ как функцию, зависящую от параметров $\mathbf{k}$ и α; затем описанным в пп. 1—2 способом определить ДКЭ.

При $\mathbf{u}=0$ $\theta=2\pi$ формула (3.5) дает асимптотические значения собственных частот круговой пластины, упруго опертой по контуру. Для круговой области при шарнирном опирании границы уравнение (1.1) не допускает точного решения (исключение представляет случай $\mathbf{A}=0$), в отличие от аналогично закрепленной прямоугольной пластины. Это связано с отмечавшейся ранее в [7] особенностью теории пластин, приводящей к неэквивалентности граничных условий для этих случаев (точное решение для круга можно получить лишь задавая искусственные условия на контуре, например, если в равенствах (1.2) положить $\mathbf{Q}=0$, $\nu=1$).

Таблица 1

A	$m_1=0$ $m_2=1$	0 2	0 3	1 1	1 2	1 3	2 1	2 2	2 3
0	10,22	39,77	89,10	21,26	60,83	120,1	34,88	84,58	153,8
0,5	10,67	41,16	91,47	21,73	61,78	121,5	35,57	85,78	155,5
1	11,87	44,98	98,12	23,06	64,52	125,7	37,53	89,22	160,4
1,5	13,56	50,57	108,1	25,02	68,77	132,3	40,48	94,59	168,2
2	15,61	57,39	120,6	27,45	74,20	141,0	44,12	101,5	178,4

Таблица 2

θ	A	$m_1=1$ $m_2=2$	1 2	1 3	2 1	2 2	2 3	3 1	3 2	3 3
π	0	26,22	67,85	128,6	41,59	94,08	165,4	59,24	122,5	204,3
	0,5	26,65	68,72	129,9	42,29	95,27	167,1	60,18	124,0	206,3
	1	27,87	71,22	133,8	44,25	98,70	172,0	62,83	128,2	212,1
	1,5	29,69	75,15	140,0	47,20	104,1	179,8	66,85	134,9	221,4
	2	31,95	80,24	148,2	50,86	111,0	190,1	71,85	143,5	233,5
$\frac{\pi}{2}$	0	49,18	104,8	178,4	89,57	167,5	262,8	139,2	239,6	356,1
		48,70*	105,1*	—	88,13*	165,3*	—	138,3*	—	—
	0,5	49,82	105,9	180,0	90,66	169,2	265,0	140,7	241,8	359,1
	1	51,62	109,0	184,4	93,80	173,9	271,2	145,1	248,0	367,0
	1,5	54,34	113,8	191,5	98,61	181,4	281,2	151,8	257,8	379,6
	2	57,72	120,1	200,8	104,7	191,0	294,4	160,4	270,6	396,3
$\frac{\pi}{3}$	0	77,95	148,6	236,0	152,7	257,6	378,1	248,0	387,9	541,4
	0,5	78,78	149,8	237,7	154,1	259,6	380,7	250,0	390,6	544,8
	1	81,14	153,5	242,8	158,3	265,6	388,3	255,8	398,7	554,6
	1,5	84,75	159,4	250,8	164,9	275,1	400,4	265,1	411,4	570,4
	2	89,28	166,9	261,4	173,3	287,5	416,4	277,1	428,3	591,4

Точность вычисления частот может быть повышена, если в выражении для H учесть члены, соответствующие ДКЭ. Так, в численном примере, приведенном ниже учтен ДКЭ у круговой границы.

Ниже приведены результаты вычисления отношения ω_N^*/ω_L^* для защемленной по контуру круговой пластины; ω_N^*, ω_L^* — первые собственные частоты соответственно линейных и нелинейных колебаний, найденные асимптотическим методом (первая строка) и методом конечных элементов (вторая строка) [8].

$A=0,2$	$A=0,4$	$A=0,6$	$A=0,8$	$A=1,0$
1,0074	1,0291	1,0634	1,1083	1,1621
1,0072	1,0284	1,0624	1,1075	1,1619

В табл. 1 и 2 приведены соответственно значения безразмерных собственных частот ω^* защемленных по контуру круговой пластины и кругового сектора; m_1 — число полуволн по окружности, m_2 — вдоль радиуса. В обоих случаях с ростом частоты наблюдается увеличение значений производной $d\omega^*/dA$, причем более существенное в случае, когда первый происходит при увеличении номера m_2 (m_1 — фиксирован). Для секторных пластин анализ показывает снижение влияния нелинейности с уменьшением угла θ. Для пластин с углом $\theta=\pi/2$ при $A=0$ в табл. 1 приведены также данные [9] (обозначены звездочкой), где собственные частоты найдены методом интегральных уравнений. Сравнение показывает удовлетворительное согласование результатов вычисления первых пяти частот. Максимальное различие не превышает 2%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 335 с.
2. *Андрианов И. В., Холод Е. Г.* Собственные нелинейные колебания пологих оболочек // Строительная механика и расчет сооружений. 1985. № 4. С. 51–54.
3. *Жинжер Н. И., Хроматов В. Е.* Асимптотический метод в задачах исследования нелинейных колебаний прямоугольных слабоортотропных пластин // Прикл. механика. 1984. Т. 20. № 8. С. 73–78.
4. *Berger H. M.* A new approach to the analysis of large deflections of plates // J. Appl. Mech. 1955. V. 22. No. 4. P. 465–472.
5. *Андрианов И. В., Лесничая В. А., Маневич Л. И.* Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. М.: Наука, 1985. 221 с.
6. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами)/Под ред. Абрамовица/М.: Наука, 1979. 830 с.
7. *Пановко Я. Г.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1985. 287 с.
8. *Decha-Umphai Kamolphan, Chun Mei.* Finite element method for forced non-linear vibrations of circular plates // Int. J. Meth. Eng. 1986. V. 23. No. 9. P. 1715–1726.
9. *Srinivasan R. S., Thiruvenkatachari V.* Free vibration of annular sektor plates by an integral equation of technique // J. Sound Vibrat. 1983. V. 89. No. 3. P. 425–432.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
24.VIII.1989