

УДК 539.3:534.1

© 1991 г.

О. В. ХОЛОСТОВА

О БЫСТРЫХ ВРАЩЕНИЯХ УПРУГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Рассматривается движение упругой тонкой замкнутой сферической оболочки в центральном ньютоновском гравитационном поле. Предполагается, что оболочка обладает внутренней вязкостью, моделируемой при помощи функции Рэлея. Считается, что оболочка достаточно жесткая, а диссипативные силы малы по сравнению с упругими силами. Составлена система дифференциальных уравнений движения оболочки в квазистатическом режиме, которая исследуется при помощи метода усреднения. Показано, что вектор кинетического момента оболочки стремится с течением времени расположиться в плоскости орбиты. В предположении, что вектор кинетического момента лежит в плоскости орбиты, найдены положения относительно равновесия оболочки и исследована их устойчивость. В области изменения двух параметров задачи, зависящих от коэффициента Пуассона оболочки и ее относительной толщины, выделено четыре подобласти, в каждой из которых характер движения различен.

1. Системы координат и собственные формы колебаний. Рассматривается движение тела, представляющего собой упругую тонкую замкнутую сферическую оболочку, в центральном ньютоновском гравитационном поле. Будем пренебрегать влиянием движения тела относительно центра масс на движение самого центра масс. Орбиту центра масс тела предполагаем круговой.

Оболочку считаем однородной плотности η ; обозначим через R радиус срединной поверхности оболочки и через h — ее толщину, $h/R \ll 1$ (оболочка тонкая).

Введем связанную систему координат $Oxyz$ с началом в центре масс недеформированной оболочки, оси Ox , Oy , Oz которой направлены произвольным, но фиксированным образом, и являются главными центральными осями инерции недеформированной оболочки. Введем также сферическую систему координат (θ, φ, ρ) .

Положение произвольной частицы dm недеформированной оболочки в системе координат $Oxyz$ определяется радиус-вектором

$$\xi = (\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \quad (1.1)$$

Если оболочка совершает упругие колебания, то радиус-вектор r частицы dm получает приращение s ($r = \xi + s$). Компоненты вектора упругого смещения s в принятой в теории оболочек локальной системе координат обозначим через u , v , w , где u — смещение по направлению касательной к меридиану в сторону возрастания угла θ , v — смещение по направлению касательной к параллели в сторону возрастания угла φ , w — смещение по направлению внешней нормали к поверхности оболочки. Представим упругие смещения в виде рядов по собственным формам свободных колебаний оболочки

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (q_{nk1} U^{(nk1)} + q_{nk2} U^{(nk2)}) \quad (1.2)$$

Здесь q_{nh1} и q_{nh2} — нормальные координаты упругих колебаний оболочки, $U^{(nh1)}$ и $U^{(nh2)}$ — собственные формы, компоненты u, v, w которых суть [1]:

$$U^{(nh1)} = (\alpha^{nh})^{-1/2} \begin{vmatrix} A_n dP_n^k/d\theta \cos k\varphi \\ -A_n k \sin^{-1} \theta P_n^k \sin k\varphi \\ P_n^k \cos k\varphi \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

$$U^{(nh2)} = (\alpha^{nh})^{-1/2} \begin{vmatrix} A_n dP_n^k/d\theta \sin k\varphi \\ A_n k \sin^{-1} \theta P_n^k \cos k\varphi \\ P_n^k \sin k\varphi \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

где P_n^k — присоединенные функции Лежандра, удовлетворяющие дифференциальному уравнению [2]:

$$d^2 P_n^k/d\theta^2 + \operatorname{ctg} \theta dP_n^k/d\theta + [n(n+1) - k^2/\sin^2 \theta] P_n^k = 0 \quad (1.5)$$

коэффициенты A_n определяются соотношением

$$A_n = -[(1+\sigma) + h_0^2 n(n+1)]^{1/2} (1-\sigma) \omega_n^2 - n(n+1) + (1-\sigma) \quad (1.6)$$

зависящим от коэффициента Пуассона σ , частоты колебаний ω_n и величины $h_0^2 = h^2/(12R^2)$. Частота колебаний ω_n удовлетворяет уравнению [1]:

$$(1-\sigma) \omega_n^4 - 2\omega_n^2 [1 + 3\sigma + n(n+1) + h_0^2 n^2(n+1)^2] + 4(1+\sigma) \times \quad (1.7)$$

$$\times \{n^2 + n - 2 + h_0^2 n(n+1) [n^2(n+1)^2 - 4n(n+1) + 4]\} = 0$$

В соотношениях (1.3) и (1.4) $(\alpha^{nh})^{-1/2}$ — нормировочные коэффициенты (m_0 — масса оболочки):

$$\alpha^{nh} = \begin{cases} (m_0 a_n)/2, & k=0 \\ 1/4 m_0 a_n (n+k)!/(n-k)!, & k \neq 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

$$a_n = 2[1 + n(n+1)A_n^2]/(2n+1), \quad m_0 = 4/3 \pi \eta h (3R^2 + h^2/4)$$

В (1.2)–(1.8) числа n и k означают соответственно число волн по меридиану и окружное волновое число. Собственной форме (1.3) или (1.4) при фиксированных n и k отвечает колебание, при котором на поверхности средней оболочки появляется «сетка» узловых линий, состоящая из n пар «широтных» линий, расположенных симметрично относительно «экватора» (на них отсутствуют радиальное и «меридиональное» растяжения), и k окружностей, проходящих через северный и южный «полюса» («меридиональных» окружностей, на которых отсутствуют радиальное и «широтное» растяжения). При $n=0$ имеем осесимметричные чисто радиальные колебания.

Отметим, что из соотношений (1.6) и (1.7) следует независимость коэффициентов A_n в формах (1.3) и (1.4), а также частоты колебаний ω_n от окружного волнового числа.

В дальнейших исследованиях собственные формы (1.3) и (1.4) рассматриваются в проекциях на оси связанной системы координат $Oxyz$, переход к которой от координат u, v, w осуществляется при помощи замены

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix} \quad (1.9)$$

Собственные формы $U^{(nh2)}$ (1.3) и (1.4), а следовательно, и формы, получаемые при переходе (1.9), удовлетворяют условиям ортонормирован-

$$\int_V U^{(nkl)} U^{(pLi)} dm = \delta_{np} \delta_{kl} \delta_{ji} \quad (4.10)$$

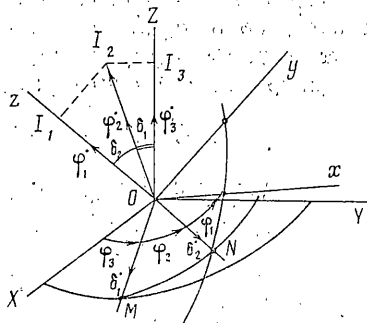
($\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера; $n, p=0, 1, 2, \dots$; $k, l=0, 1, 2, \dots$; $j, i=1, 2$). В (4.10) интегрирование производится по всей недеформированной оболочке.

Можно показать, что система координат $Oxyz$ является «средней» [3, 4], т. е. центры масс недеформированной и деформированной оболочки совпадают и выполняется соотношение

$$\int_V \xi \times s dm = 0 \quad (4.11)$$

Указанные два условия означают отсутствие в среднем перемещений и поворотов оболочки относительно $Oxyz$ как абсолютно твердого тела.

Равенство (4.11) равносильно совокупности соотношений $H_{ij}^{(nkl)} = H_{ji}^{(nkl)}$ ($n, k=0, 1, 2, \dots$; $l=1, 2$; $i, j=1, 2, 3$), где $H_{ij}^{(nkl)} = \int_V x_i U_j^{(nkl)} dm$, x_i — i -я компонента



Фиг. 1

вектора ξ (4.1), $U_j^{(nkl)}$ — j -я компонента вектора $U^{(nkl)}$, а интегрирование, как и в (4.10), проводится по всей недеформированной оболочке. Расчеты показывают, что

$$H_{11}^{(001)} = H_{22}^{(001)} = H_{33}^{(001)} = \sqrt[4]{\frac{1}{3} \pi \eta R h m_0}^{-1/2} (R^2 + h^2/4)$$

$$H_{11}^{(201)} = H_{22}^{(201)} = -\sqrt[4]{\frac{1}{15} \pi \eta R h} (\alpha^{20})^{-1/2} (R^2 + h^2/4) (3A_2 + 1)$$

$$H_{33}^{(201)} = \sqrt[8]{\frac{1}{15} \pi \eta R h} (\alpha^{20})^{-1/2} (R^2 + h^2/4) (3A_2 + 1)$$

$$H_{11}^{(221)} = -H_{22}^{(221)} = \sqrt[8]{\frac{1}{5} \pi \eta R h} (\alpha^{22})^{-1/2} (R^2 + h^2/4) (3A_2 + 1)$$

(4.12)

$$H_{13}^{(n11)} = H_{31}^{(n11)} = H_{23}^{(n12)} = H_{32}^{(n12)} = -\sqrt[4]{\frac{1}{4} \pi^2 \eta R h} (\alpha^{n1})^{-1/2} (R^2 + h^2/4) (3A_n + 1) \times \\ \times \Gamma(2+n) [\Gamma(n) \Gamma(2-n/2) \Gamma(5/2+n/2)]^{-1}, \quad n=1, 3, 5, \dots$$

$$H_{12}^{(222)} = H_{21}^{(222)} = \sqrt[8]{\frac{1}{5} \pi \eta R h} (\alpha^{22})^{-1/2} (R^2 + h^2/4) (1 - 2A_2)$$

$$H_{12}^{(n22)} = H_{21}^{(n22)} = -\pi \eta R h (\alpha^{n2})^{-1/2} (R^2 + h^2/4) A_n \Gamma(n+3) \times \\ \times [3\Gamma(n-1)]^{-1} {}_3F_2((3+n)/2, (2-n)/2, 2; 3, 5/2; 1), \quad n=4, 6, 8, \dots$$

где $\Gamma(\lambda)$ — гамма-функция, ${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; z)$ — обобщенный гипергеометрический ряд [2]. Все невыписанные в (4.12) величины $H_{ij}^{(nkl)}$ равны нулю.

2. Уравнения движения оболочки. Уравнения движения сферической оболочки относительно центра масс составим в форме уравнений Рауса [5]. Пусть $OXYZ$ — кенигова система координат, ось OZ которой перпендикулярна плоскости орбиты, а оси OX и OY имеют в плоскости орбиты неизменные направления. За гамильтонову часть переменных Рауса при-

мем переменные Андуйе φ_i , I_i , $i=1, 2, 3$ [6] (фиг. 1). На фиг. 1 I_2 — вектор кинетического момента оболочки относительно центра масс O , плоскость OMN ему перпендикулярна. Переменная I_2 — модуль кинетического момента, переменные I_1 и I_3 — его проекция на оси Oz и OZ соответственно. Смысл переменных φ_1 , φ_2 , φ_3 ясен из фигуры. Углы δ_1 и δ_2 , указанные на фиг. 1, равны

$$\cos \delta_1 = I_3/I_2, \quad \cos \delta_2 = I_1/I_2 \quad (2.1)$$

За лагранжеву часть переменных Рауса примем нормальные координаты q_{nkj} ($n, k=0, 1, 2, \dots; j=1, 2$).

Введем единичный вектор γ , направленный вдоль радиус-вектора центра масс оболочки относительно притягивающего центра. В системе координат $Oxyz$ вектор γ имеет следующие компоненты (ω_0 — среднее движение центра масс по орбите):

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= a_1 \sin \varphi_1 + b_1 \cos \varphi_1, & \gamma_2 &= a_1 \cos \varphi_1 - b_1 \sin \varphi_1 \\ \gamma_3 &= (\cos \beta \sin \varphi_2 + \sin \beta \cos \varphi_2 \cos \delta_1) \sin \delta_2 + \sin \beta \sin \delta_1 \cos \delta_2 \\ a_1 &= -(\cos \beta \sin \varphi_2 + \sin \beta \cos \varphi_2 \cos \delta_1) \cos \delta_2 + \sin \beta \sin \delta_1 \sin \delta_2 \\ b_1 &= \cos \beta \cos \varphi_2 - \sin \beta \sin \varphi_2 \cos \delta_1, & \beta &= \varphi_3 - \omega_0 t \end{aligned} \quad (2.2)$$

Функция Рауса системы имеет вид [7]:

$$R = H^{(0)} - T + \Pi - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (q_{nk1} Q_{nk1} + q_{nk2} Q_{nk2}) + R_*$$

где $H^{(0)} = I_2^2 / (2A)$, $A = \frac{8}{15} \pi \eta h [5R^4 + \frac{5}{2} R^2 h^2 + (h/2)^4]$ — момент инерции недеформированной сферической оболочки относительно произвольной оси, проходящей через ее центр; величины T и Π кинетической и потенциальной энергии упругих деформаций равны соответственно

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (q_{nk1}^2 + q_{nk2}^2), \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \omega_n^2 (q_{nk1}^2 + q_{nk2}^2)$$

где R_* — линейная по q_{nkj} квадратичная форма относительно q_{nkj} , q^{nj} с коэффициентами-функциями переменных Андуйе и времени; ее явный вид не потребуется. Величины Q_{nkj} равны

$$\begin{aligned} Q_{001} &= 2H_{11}^{(001)} I_2^2 / A^2 \\ Q_{201} &= \omega_0^2 (H_{33}^{(201)} - H_{11}^{(201)}) (3\gamma_3^2 - 1) + [I_1^2 (H_{11}^{(201)} - H_{33}^{(201)}) + \\ &\quad + I_2^2 (H_{11}^{(201)} + H_{33}^{(201)})] / A^2 \\ Q_{221} &= 3\omega_0^2 H_{11}^{(221)} (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) + H_{11}^{(221)} (I_2^2 - I_1^2) \cos 2\varphi_1 / A^2 \\ Q_{n11} &= 2H_{13}^{(n11)} [3\omega_0^2 \gamma_1 \gamma_3 - I_1 (I_2^2 - I_1^2)^{1/2} \sin \varphi_1 / A^2] \quad (n=1, 3, 5, \dots) \\ Q_{n12} &= 2H_{23}^{(n12)} [3\omega_0^2 \gamma_2 \gamma_3 - I_1 (I_2^2 - I_1^2)^{1/2} \cos \varphi_1 / A^2] \quad (n=1, 3, 5, \dots) \\ Q_{n22} &= H_{12}^{(n22)} [6\omega_0^2 \gamma_1 \gamma_2 - (I_2^2 - I_1^2) \sin 2\varphi_1 / A^2] \quad (n=2, 4, 6, \dots) \end{aligned}$$

Невыписанные величины Q_{nkj} равны нулю.

Будем предполагать, что оболочка обладает внутренней вязкостью, а соответствующие диссипативные силы описываются при помощи функции Релея [8]:

$$\Psi = \chi b \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \omega_n^2 (q_{nk1}^2 + q_{nk2}^2)$$

где χ — безразмерный параметр и b — положительная постоянная.

Дифференциальные уравнения движения сферической оболочки запишутся в виде

$$\varphi_i \dot{=} \partial R / \partial I_i, \quad I_i \dot{=} -\partial R / \partial \varphi_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.3)$$

$$-d(\partial R / \partial q_{nkj}) / dt + \partial R / \partial q_{nkj} = -\partial \Psi / \partial q_{nkj}, \quad (n, k=0, 1, 2, \dots; j=1, 2).$$

3. Квазистатический режим. Усредненные уравнения. Пусть выполняются следующие предположения: угловая скорость вращения оболочки как целого относительно центра масс велика по сравнению со средним движением центра масс по орбите, но мала по сравнению с величиной ω наименьшей из частот упругих колебаний оболочки; диссипативные силы малы по сравнению с упругими силами. Если ввести малые параметры $\mu = A\omega_0 / I_{20}$, $\varepsilon = I_{20} / (A\omega)$ (I_{20} — начальное значение величины кинетического момента), то введенные предположения могут быть записаны в виде соотношений $\chi \ll \varepsilon \ll 1 \ll \mu^{-1}$ ($\chi \sim \varepsilon^\delta$, $1 < \delta < 2$) или $T_3 \ll T_2 \ll T_1 \ll T$, где $T_3 = 2\pi / \omega$ — характерный период свободных упругих колебаний при отсутствии затухания, $T_1 = 2\pi A / I_{20}$ и T_2 — характерные времена для движения оболочки как целого относительно центра масс и для затухания ее собственных колебаний, $T = 2\pi / \omega_0$ — период движения центра масс по орбите. Будем считать $T_1 \sim 1$.

Положим $\omega_n = \varepsilon^{-1} \lambda_n$, тогда уравнения (2.3) являются дифференциальными уравнениями с малым параметром при старших производных. Такие уравнения можно исследовать при помощи теории сингулярных возмущений [9]. Будем рассматривать квазистатический режим движения, когда упругие колебания оболочки являются вынужденными под действием гравитационных сил и сил инерции и составляют регулярную часть асимптотического решения преобразованных уравнений (2.3) (на интервалах времени, превосходящих T_1 , частью решения типа пограничного слоя пренебрегаем).

Вывод уравнений, описывающих квазистатический режим движения упругого тела как целого, дан в [7]. Приведем систему дифференциальных уравнений, описывающих движение сферической оболочки в квазистатическом режиме (при выводе уравнений предполагалось, что $\varepsilon \sim \mu^6$, $\chi \sim \mu^7$):

$$\begin{aligned} I_1 \dot{=} & \varepsilon^2 [\kappa_2 - (H_{11}^{(221)})^2 / \lambda_2^2] (I_2^2 - I_1^2)^2 \sin 4\varphi_1 / A^4 + 6\varepsilon^2 \omega_0^2 \times \\ & \times \{1/2 (H_{11}^{(221)})^2 / \lambda_2^2 (I_2^2 - I_1^2) / A^2 \partial(\tau_1 \cos 2\varphi_1) / \partial \varphi_1 - \\ & - 2\kappa_1 I_1 (I_2^2 - I_1^2)^{1/2} / A^2 [\partial(\tau_3 \sin \varphi_1) / \partial \varphi_1 + \partial(\tau_4 \cos \varphi_1) / \partial \varphi_1] - \\ & - \kappa_2 (I_2^2 - I_1^2) / A^2 \partial(\tau_2 \sin 2\varphi_1) / \partial \varphi_1\} + 18\varepsilon^2 \omega_0^4 \{1/4 (H_{11}^{(221)})^2 / \lambda_2^2 \partial \tau_1^2 / \partial \varphi_1 + \\ & + \kappa_1 \partial(\tau_3^2 + \tau_4^2) / \partial \varphi_1 + \kappa_2 \partial \tau_2^2 / \partial \varphi_1\} + 12\chi \varepsilon^2 b \omega_0^4 I_2 \{ (H_{11}^{(221)})^2 (I_2^2 - I_1^2) \times \\ & \times (\partial \tau_1 / \partial \varphi_2) \sin 2\varphi_1 / (A^2 \lambda_2^2) + 2\kappa_1 I_1 (I_2^2 - I_1^2)^{1/2} [(\partial \tau_3 / \partial \varphi_2) \cos \varphi_1 - \\ & - (\partial \tau_4 / \partial \varphi_2) \sin \varphi_1] / A^2 + 2\kappa_2 (I_2^2 - I_1^2) (\partial \tau_2 / \partial \varphi_2) \cos 2\varphi_1 / A^2 \} / A - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -12\chi\varepsilon^2 b\omega_0^3 \{ (H_{11}^{(221)})^2 (I_2^2 - I_1^2) (\partial\tau_4/\partial\beta) \sin 2\varphi_1/A^2 + 2\kappa_1 I_1 (I_1^2 - I_1^2)^{1/2} \times \\
& \quad \times [(\partial\tau_3/\partial\beta) \cos \varphi_1 - (\partial\tau_4/\partial\beta) \sin \varphi_1]/A^2 + 2\kappa_2 (I_2^2 - I_1^2) \times \\
& \times (\partial\tau_2/\partial\beta) \cos 2\varphi_1/A^2 \} - 72\chi\varepsilon^2 b\omega_0^4 I_2 \{ 1/4 [(H_{11}^{(221)})^2 (\partial\tau_1/\partial\varphi_1) (\partial\tau_1/\partial\varphi_2)]/\lambda_2^2 + \\
& \quad + \kappa_1 [(\partial\tau_3/\partial\varphi_1) (\partial\tau_3/\partial\varphi_2) + (\partial\tau_4/\partial\varphi_1) (\partial\tau_4/\partial\varphi_2)] + \\
& \quad + \kappa_2 (\partial\tau_2/\partial\varphi_1) (\partial\tau_2/\partial\varphi_2) \} /A + O(\mu^{24}) \\
I_2^* &= 6\varepsilon^2 \omega_0^2 \{ 1/2 (H_{33}^{(201)} - H_{11}^{(201)}) (\partial\gamma_3^2/\partial\varphi_2) [I_1^2 (H_{11}^{(201)} - H_{33}^{(201)}) + \\
& + I_2^2 (H_{11}^{(201)} + H_{33}^{(201)})]/\lambda_2^2 + 1/2 (H_{11}^{(221)})^2 (I_2^2 - I_1^2) (\partial\tau_1/\partial\varphi_2) \cos 2\varphi_1/\lambda_2^2 - \\
& \quad - 2\kappa_1 I_1 (I_2^2 - I_1^2)^{1/2} [(\partial\tau_3/\partial\varphi_2) \sin \varphi_1 + (\partial\tau_4/\partial\varphi_2) \cos \varphi_1] - \\
& \quad - \kappa_2 (I_2^2 - I_1^2) (\partial\tau_2/\partial\varphi_2) \sin 2\varphi_1 \} A^2 + 6\varepsilon^2 \omega_0^4 \{ 1/2 (H_{33}^{(201)} - H_{11}^{(201)})^2 \times \\
& \quad \times (\partial\gamma_3^2/\partial\varphi_2) (3\gamma_3^2 - 1)/\lambda_2^2 + 3/4 [(H_{11}^{(221)})^2 \partial\tau_1^2/\partial\varphi_2]/\lambda_2^2 +
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
& + 3\kappa_1 \partial(\tau_3^2 + \tau_4^2)/\partial\varphi_2 + 3\kappa_2 \partial\tau_2^2/\partial\varphi_2 \} - 72\chi\varepsilon^2 b\omega_0^4 I_2 \{ 1/4 (H_{33}^{(201)} - H_{11}^{(201)})^2 \times \\
& \quad \times (\partial\gamma_3^2/\partial\varphi_2)^2/\lambda_2^2 + 1/4 (H_{11}^{(221)})^2 (\partial\tau_1/\partial\varphi_2)^2/\lambda_2^2 + \kappa_1 [(\partial\tau_3/\partial\varphi_2)^2 + \\
& \quad + (\partial\tau_4/\partial\varphi_2)^2] + \kappa_2 (\partial\tau_2/\partial\varphi_2)^2 \} /A + O(\mu^{24})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3^* &= 6\varepsilon^2 \omega_0^2 \{ 1/2 (H_{33}^{(201)} - H_{11}^{(201)}) (\partial\gamma_3^2/\partial\beta) [I_1^2 (H_{11}^{(201)} - H_{33}^{(201)}) + \\
& + I_2^2 (H_{11}^{(201)} + H_{33}^{(201)})]/\lambda_2^2 + 1/2 (H_{11}^{(221)})^2 (I_2^2 - I_1^2) (\partial\tau_1/\partial\beta) \cos 2\varphi_1/\lambda_2^2 - \\
& \quad - 2\kappa_1 I_1 (I_2^2 - I_1^2)^{1/2} [(\partial\tau_3/\partial\beta) \sin \varphi_1 + (\partial\tau_4/\partial\beta) \cos \varphi_1] - \\
& \quad - \kappa_2 (I_2^2 - I_1^2) (\partial\tau_2/\partial\beta) \sin 2\varphi_1 \} /A^2 + 6\varepsilon^2 \omega_0^4 \{ 1/2 (H_{33}^{(201)} - H_{11}^{(201)})^2 \times \\
& \quad \times (\partial\gamma_3^2/\partial\beta) (3\gamma_3^2 - 1)/\lambda_2^2 + 3/4 [(H_{11}^{(221)})^2 \partial\tau_1^2/\partial\beta]/\lambda_2^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3\kappa_1 \partial(\tau_3^2 + \tau_4^2)/\partial\beta + 3\kappa_2 \partial\tau_2^2/\partial\beta \} - 72\chi\varepsilon^2 b\omega_0^4 I_2 \{ 1/4 (H_{33}^{(201)} - H_{11}^{(201)})^2 \times \\
& \quad \times (\partial\gamma_3^2/\partial\varphi_2) (\partial\gamma_3^2/\partial\beta)]/\lambda_2^2 + 1/4 [(H_{11}^{(221)})^2 (\partial\tau_1/\partial\varphi_2) (\partial\tau_1/\partial\beta)]/\lambda_2^2 + \\
& \quad + \kappa_1 [(\partial\tau_3/\partial\varphi_2) (\partial\tau_3/\partial\beta) + (\partial\tau_4/\partial\varphi_2) (\partial\tau_4/\partial\beta)] + \\
& \quad + \kappa_2 (\partial\tau_2/\partial\varphi_2) (\partial\tau_2/\partial\beta) \} /A + O(\mu^{24})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1^* &= -2\varepsilon^2 I_1/A^4 \{ (H_{11}^{(201)} - H_{33}^{(201)}) [I_1^2 (H_{11}^{(201)} - H_{33}^{(201)}) + I_2^2 (H_{11}^{(201)} + H_{33}^{(201)})] - \\
& \quad - (H_{11}^{(221)})^2/\lambda_2^2 (I_2^2 - I_1^2) \cos^2 2\varphi_1 + 2\kappa_1 (I_2^2 - 2I_1^2) - \\
& \quad - \kappa_2 (I_2^2 - I_1^2) \sin^2 2\varphi_1 \} + O(\mu^{14})
\end{aligned}$$

$$\varphi_2^* = I_2/A + O(\mu^{12}), \quad \beta^* = -\omega_0 + O(\mu^{12})$$

В системе (3.1) вместо угла φ_3 введена переменная β , определенная в (2.2), и использованы обозначения

$$\kappa_1 = \sum_{n=1,3,5,\dots} (H_{13}^{(n11)})^2/\lambda_n^2 = \sum_{n=1,3,5,\dots} (H_{23}^{(n12)})^2/\lambda_n^2, \quad \kappa_2 = \sum_{n=2,4,6,\dots} (H_{12}^{(n22)})^2/\lambda_n^2$$

$$\tau_1 = \gamma_1^2 - \gamma_2^2, \quad \tau_2 = \gamma_1 \gamma_2, \quad \tau_3 = \gamma_1 \gamma_3, \quad \tau_4 = \gamma_2 \gamma_3$$

Из уравнений (3.1) видно, что на эволюцию оболочки как целого не оказывают влияния колебания, соответствующие $k \geq 3$.

Если оболочка — абсолютно твердое тело ($\varepsilon=0$), то система уравнений (3.1) описывает такое движение оболочки, когда она равномерно вращается вокруг вектора кинетического момента, составляющего постоянный угол с нормалью к плоскости орбиты.

Из уравнений (3.1) следует, что скорость изменения переменных I_1, I_2, I_3, φ_1 имеет порядок $\mu^{12}, \mu^{14}, \mu^{14}, \mu^{12}$ соответственно, а скорость изменения φ_2 и β — порядка 1 и μ . Проведем усреднение системы (3.1) по «быстрым» переменным φ_2 и β . Решения усредненной системы аппроксимируют решения системы (3.1) с погрешностью порядка μ на интервале времени $\tau_1 \sim (\varepsilon^2)^{-1}$ (или, что то же, $\tau_1 \sim \mu^{-12}$)¹.

Выпишем усредненные уравнения, перейдя в них с помощью (2.1) к переменным δ_1, δ_2 :

$$\begin{aligned} \delta_1^* = & 18\chi\varepsilon^2 b\omega_0^4 \sin \delta_1 \cos \delta_1 \{ (H_{33}^{(201)} - H_{11}^{(201)})^2 \sin^2 \delta_2 \times \\ & \times ({}^{1/16} \sin^2 \delta_2 + {}^{3/16} \cos^2 \delta_1 \sin^2 \delta_2 + {}^{3/4} \sin^2 \delta_1 \cos^2 \delta_2) / \lambda_2^2 + \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & + [\kappa_2 \sin^2 2\varphi_1 + (H_{11}^{(221)})^2 \cos^2 2\varphi_1 / \lambda_2^2] [{}^{1/6} (1 + \cos^2 \delta_2)^2 (1 + 3 \cos^2 \delta_1) + \\ & + {}^{3/4} \sin^2 \delta_1 \sin^2 \delta_2 \cos^2 \delta_2] + [\kappa_2 \cos^2 2\varphi_1 + (H_{11}^{(221)})^2 \sin^2 2\varphi_1 / \lambda_2^2] [{}^{1/4} \cos^2 \delta_2 + \\ & + {}^{3/4} \cos^2 \delta_1 \cos^2 \delta_2 + {}^{3/4} \sin^2 \delta_1 \sin^2 \delta_2] + \kappa_1 [{}^{1/4} \sin^2 \delta_2 \cos^2 \delta_2 + \\ & + {}^{3/4} \sin^2 \delta_2 \cos^2 \delta_2 \cos^2 \delta_1 + {}^{3/4} \sin^2 \delta_1 \cos^2 2\delta_2 + \\ & + {}^{1/4} \sin^2 \delta_2 + {}^{3/4} \cos^2 \delta_1 \sin^2 \delta_2 + {}^{3/4} \sin^2 \delta_1 \cos^2 \delta_2] \} / A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_2^* = & -[\kappa_2 - (H_{11}^{(221)})^2 / \lambda_2^2] \varepsilon^2 I_2^3 \sin^3 \delta_2 [1/A^4 + 3\omega_0^2 \times \\ & \times (3 \cos^2 \delta_1 - 1) / (2A^2 I_2^2) + 9\omega_0^4 ({}^{9/64} + {}^{9/64} \cos^4 \delta_1 + {}^{3/32} \cos^2 \delta_1 - \\ & - {}^{3/2} \sin^2 \delta_1 \cos^2 \delta_1) / I_2^4] \sin 4\varphi_1 - 18\chi\varepsilon^2 b\omega_0^4 \sin \delta_2 \cos \delta_2 \{ (H_{33}^{(201)} - H_{11}^{(201)})^2 \times \\ & \times ({}^{3/16} \sin^2 \delta_2 + {}^{3/16} \cos^4 \delta_1 \sin^2 \delta_2 + {}^{1/8} \cos^2 \delta_1 \sin^2 \delta_2 + \\ & + {}^{1/4} \sin^2 \delta_1 \cos^2 \delta_2 + {}^{3/4} \sin^2 \delta_1 \cos^2 \delta_1 \cos^2 \delta_2) / \lambda_2^2 - \\ & - [(H_{11}^{(221)})^2 \cos^2 2\varphi_1 / \lambda_2^2 + \kappa_2 \sin^2 2\varphi_1] [({}^{3/16} + {}^{1/8} \cos^2 \delta_1 + {}^{3/16} \cos^4 \delta_1) \times \\ & \times (1 + \cos^2 \delta_2) + {}^{1/4} \sin^2 \delta_1 (1 + \sin^2 \delta_2) (1 + 3 \cos^2 \delta_1)] - \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & - [(H_{11}^{(221)})^2 \sin^2 2\varphi_1 / \lambda_2^2 + \kappa_2 \cos^2 2\varphi_1] [{}^{3/8} + {}^{1/4} \cos^2 \delta_1 + \\ & + {}^{3/8} \cos^4 \delta_1 + {}^{1/4} \sin^2 \delta_1 (1 + 3 \cos^2 \delta_1)] + \kappa_1 [{}^{3/4} \cos^2 \delta_2 + {}^{1/2} \cos^2 \delta_1 \cos^2 \delta_2 + \\ & + {}^{3/4} \cos^4 \delta_1 \cos^2 \delta_2 + {}^{1/4} \sin^2 \delta_1 (3 \sin^2 \delta_2 - \cos^2 \delta_2) (1 + 3 \cos^2 \delta_1)] \} / A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1^* = & -2\varepsilon^2 I_2^3 \cos \delta_2 \{ (H_{11}^{(201)} - H_{33}^{(201)}) [\cos^2 \delta_2 (H_{11}^{(201)} - H_{33}^{(201)}) + \\ & + (H_{11}^{(201)} + H_{33}^{(201)})] / \lambda_2^2 + 2\kappa_1 (1 - 2 \cos^2 \delta_2) - \sin^2 \delta_2 \times \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\times [(H_{11}^{(221)})^2 \cos^2 2\varphi_1 / \lambda_2^2 + \kappa_2 \sin^2 2\varphi_1] \} / A^4 + \cos \delta_2 O(\mu^{14})$$

$$I_2^* = -18\chi\varepsilon^2 b\omega_0^4 I_2 \{ (H_{33}^{(201)} - H_{11}^{(201)})^2 \sin^2 \delta_2 ({}^{3/16} \sin^2 \delta_2 +$$

¹ Сидоренко В. В. Эволюция быстрых вращений упругого кольца в гравитационном поле: Препринт № 93. М.: Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1987.

$$\begin{aligned}
& + \sqrt[3]{16} \cos^4 \delta_1 \sin^2 \delta_2 + \sqrt[3]{8} \cos^2 \delta_1 \sin^2 \delta_2 + \sqrt[4]{1} \sin^2 \delta_1 \cos^2 \delta_2 + \\
& + \sqrt[3]{4} \sin^2 \delta_1 \cos^2 \delta_1 \cos^2 \delta_2) / \lambda_2^2 + 4\kappa_1 [(\sqrt[3]{16} \sin^2 \delta_2 \cos^2 \delta_2 + \\
& + \sqrt[3]{8} \cos^2 \delta_1 \sin^2 \delta_2 \cos^2 \delta_2 + \sqrt[4]{16} \sin^2 \delta_1 \cos^4 \delta_2 + \\
& + \sqrt[3]{16} \cos^4 \delta_1 \sin^2 \delta_2 \cos^2 \delta_2 + \sqrt[3]{16} \sin^2 \delta_1 \cos^2 \delta_1 \cos^4 \delta_2 + \\
& + \sqrt[4]{16} \sin^2 \delta_1 \sin^4 \delta_2 + \sqrt[3]{16} \sin^2 \delta_1 \cos^2 \delta_1 \sin^4 \delta_2 - \\
& - \sqrt[3]{8} \sin^2 \delta_1 \sin^2 \delta_2 \cos^2 \delta_2 - \sqrt[3]{8} \sin^2 \delta_1 \cos^2 \delta_1 \sin^2 \delta_2 \cos^2 \delta_2) + \\
& + (\sqrt[3]{16} \sin^2 \delta_2 + \sqrt[3]{8} \cos^2 \delta_1 \sin^2 \delta_2 + \sqrt[4]{16} \sin^2 \delta_1 \cos^2 \delta_2 + \\
& + \sqrt[3]{16} \cos^4 \delta_1 \sin^2 \delta_2 + \sqrt[3]{16} \sin^2 \delta_1 \cos^2 \delta_1 \cos^2 \delta_2)] + \\
& + [(H_{11}^{(221)})^2 \cos^2 2\varphi_1 / \lambda_2^2 + \kappa_2 \sin^2 2\varphi_1] (\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{16} \cos^4 \delta_1 + \\
& + \sqrt[3]{8} \cos^2 \delta_1 + \sqrt[3]{16} \cos^4 \delta_2 + \sqrt[3]{16} \cos^4 \delta_1 \cos^4 \delta_2 + \sqrt[3]{8} \cos^2 \delta_1 \cos^4 \delta_2 + \\
& + \sqrt[4]{1} \sin^2 \delta_1 \sin^2 \delta_2 \cos^2 \delta_2 + \sqrt[3]{4} \sin^2 \delta_1 \cos^2 \delta_1 \sin^2 \delta_2 \cos^2 \delta_2 + \\
& + \sqrt[3]{8} \cos^2 \delta_2 + \sqrt[4]{1} \cos^2 \delta_1 \cos^2 \delta_2 + \sqrt[3]{8} \cos^4 \delta_1 \cos^2 \delta_2) + \\
& + [(H_{11}^{(221)})^2 \sin^2 2\varphi_1 / \lambda_2^2 + \kappa_2 \cos^2 2\varphi_1] (\sqrt[3]{4} \cos^2 \delta_2 + \sqrt[4]{1} \cos^2 \delta_1 \cos^2 \delta_2 + \\
& + \sqrt[4]{1} \sin^2 \delta_1 \sin^2 \delta_2 + \sqrt[3]{4} \cos^4 \delta_1 \cos^2 \delta_2 + \sqrt[3]{4} \sin^2 \delta_1 \cos^2 \delta_1 \sin^2 \delta_2) \} / A
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Отметим, что в пределах рассматриваемой точности усредненное уравнений (3.4) для φ_1 не содержит диссипативных членов.

Из уравнения (3.5) имеем

$$I_2 = I_{20} \exp \left\{ -18\chi\varepsilon^2 b \omega_0^4 / A \int_0^\tau f(\delta_1, \delta_2, \varphi_1) d\tau \right\} \tag{3.6}$$

где функция $f(\delta_1, \delta_2, \varphi_1)$ зависит от движений системы, положительна и ограничена сверху. На интервале времени $\tau_1 \sim \mu^{-12}$ показатель экспоненты в (3.6) имеет порядок не менее μ^{11} , поэтому полагаем приближенно

$$I_2 = I_{20} \left(1 - 18\chi\varepsilon^2 b \omega_0^4 / A \int_0^\tau f(\delta_1, \delta_2, \varphi_1) d\tau \right) \tag{3.7}$$

Уменьшив интервал времени, на котором исследуется движение оболочки, на один порядок и полагая его равным $\tau_2 \sim \mu^{-11}$, получим, что второе слагаемое в (3.7) дает в уравнениях (3.2)–(3.4) члены порядка μ^{24} и выше. Следовательно, на интервале времени τ_2 в пределах рассматриваемой точности можно в уравнениях (3.2)–(3.4) полагать $I_2 = I_{20} = \text{const} > 0$. Задача сводится к исследованию системы трех уравнений (3.2)–(3.4).

Уравнение (3.2) для δ_1 дает следующие три стационарные значения угла δ_1 : $\delta_1 = 0, \pi/2, \pi$. Так как стоящая в фигурных скобках в (3.2) функция неотрицательна, то нетрудно проверить, что первое и третье стационарные значения угла δ_1 ($\delta_1 = 0$ или $\delta_1 = \pi$ – вектор кинетического момента перпендикулярен плоскости орбиты) неустойчивы: характеристическое уравнение имеет положительный действительный корень. Значение $\delta_1 = \pi/2$ (вектор кинетического момента лежит в плоскости орбиты) дает отрицательный действительный корень. Поэтому все устойчивые стационарные решения системы (3.2)–(3.4) лежат в плоскости $\delta_1 = \pi/2$, которая для траекторий системы является «притягивающей» плоскостью (все траектории системы попадают на плоскость $\delta_1 = \pi/2$ и остаются на ней).

Так как траектории системы (3.2)–(3.4) в трехмерном пространстве переменных $(\delta_1, \delta_2, \varphi_1)$ достаточно сложны, ограничим исследование системы (3.2)–(3.4) нахождением ее стационарных решений, определен-

ем условий их устойчивости и рассмотрением фазовых портретов системы в притягивающей плоскости $\delta_1 = \pi/2$.

Всюду далее в уравнениях движения будут использоваться обезразмеренные параметры κ_1' и κ_2' , определяемые при помощи соотношений $\kappa_1 = f\kappa_1'$, $\kappa_2 = f\kappa_2'$, $f = [4\pi\eta R h (R^2 + h^2/4) (3A_2 + 1)]^2 [25\lambda_2^2 \alpha^{20}]^{-1}$, и являющиеся функциями двух величин: коэффициента Пуассона σ и величины $h_0^2 = h^2/(12R^2)$. Параметры κ_1' и κ_2' ограничены снизу величинами κ_{10}' и κ_{20}' , причем можно дать следующую (весьма грубую) оценку

$$\kappa_1' \geq \kappa_{10}' > 1, \quad \kappa_2' \geq \kappa_{20}' > 4 \quad (3.8)$$

Оценка диапазона изменения величин κ_1' и κ_2' не проводилась.

4. Движения в «притягивающей» плоскости. Пусть $\delta_1 = \pi/2$. Система (3.3)–(3.4) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \delta_2^* = & -[\kappa_2'^{-1/3}] f \varepsilon^2 I_{20}^3 \sin^3 \delta_2 [1/A^4 - 3\omega_0^2/(2A^2 I_{20}^2) + 81\omega_0^4/(64I_{20}^4)] \sin 4\varphi_1 - \\ & - 18\chi \varepsilon^2 b \omega_0^4 f \sin \delta_2 \cos \delta_2 \{^{1/24} + ^{1/2} \kappa_1'^{-5/8} \kappa_2'^{1/8} + \\ & + \sin^2 \delta_2 [^{-1/16} + ^{1/4} \kappa_1'^{-1/16} (\kappa_2' \sin^2 2\varphi_1 + ^{1/3} \cos^2 2\varphi_1)]\} / A \quad (4.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1^* = & -2\varepsilon^2 I_{20}^3 \cos \delta_2 f \{ \sin^2 \delta_2 [4\kappa_1' - 1 - (\kappa_2' \sin^2 2\varphi_1 + ^{1/3} \cos^2 2\varphi_1)] - \\ & - 2(\kappa_1'^{-1/3}) \} / A^4 + \cos \delta_2 \cdot O(\mu^{14}) \quad (4.2) \end{aligned}$$

Система (4.1)–(4.2) имеет следующие стационарные решения

$$\delta_2^* = \pi/2, \quad \varphi_1^* = 0, \pi/4, \pi/2, \dots \quad (4.3)$$

$$\delta_2^* = 0, \pi, \quad \varphi_1^* = \pm 4\varepsilon^2 I_{20}^3 f (\kappa_1'^{-1/3}) / A^4 + O(\mu^{14}) = \text{const} \quad (4.4)$$

(верхний знак соответствует $\delta_2^* = 0$, нижний знак $\delta_2^* = \pi$):

$$\delta_2^* = \pi/4, \quad 3\pi/4$$

$$\begin{aligned} \varphi_1^* = & -45\chi \omega_0^4 b f A^3 \cos \delta_2^* (\kappa_1' - \kappa_2') [8I_{20}^3 (\kappa_2' - 1/3)]^{-1} + \\ & + \pi k/2 + O(\mu^{13}) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \delta_2^* = & 2(1/3 - \kappa_1') (\kappa_2' - 4\kappa_1' + 1)^{-1} \\ \varphi_1^* = & \pi/4 + 45\chi \omega_0^4 b f A^3 \cos \delta_2^* (\kappa_1' - \kappa_2') [16I_{20}^3 \sin^2 \delta_2^* (\kappa_2' - 1/3)]^{-1} + \\ & + \pi k/2 + O(\mu^{13}) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4.6) \end{aligned}$$

Решению (4.3) соответствует такое движение оболочки, когда ось Oz перпендикулярна вектору кинетического момента, плоскости (OI_2, ON) и Oxy совпадают, а угол между осями ON и Ox кратен $\pi/4$.

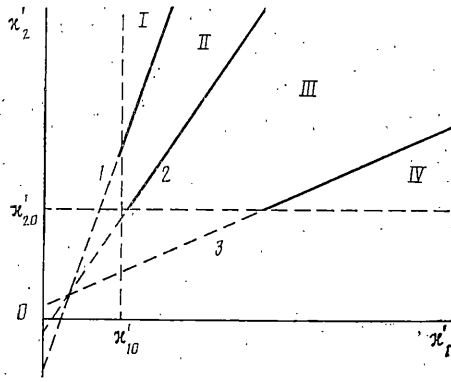
Решению (4.4) соответствует такое движение оболочки, когда ось Oz совпадает с осью OI_2 вектора кинетического момента и оболочка равномерно вращается вокруг этой оси (лежащей в плоскости орбиты).

В решениях (4.5) и (4.6) ось оболочки составляет фиксированный угол δ_2^* с вектором кинетического момента, а стационарные значения угла φ_1 близки соответственно к 0 и $\pi/4$ (а также к отличающимся от указанных на число, кратное $\pi/2$).

Область существования решения (4.6) определяется из естественного ограничения на величину $\sin^2 \delta_2^*$ и записывается в виде неравенства (с учетом оценки (3.8)):

$$\kappa_2' - 2\kappa_1' + 1/3 < 0 \quad (4.7)$$

Остальные стационарные решения существуют при любых значениях параметров κ_1' и κ_2' (в области (3.8)).



Фиг. 2

Приведем результаты исследования устойчивости решений (4.3)–(4.6). Решение (4.3) при $\varphi_1^* = 0, \pi/2, \dots$ является асимптотически устойчивым при выполнении соотношения

$$6\kappa_1' - 5\kappa_2'^* - 1/3 < 0 \quad (4.8)$$

(при достаточно малых значениях μ характеристическое уравнение соответствующей линеаризованной системы имеет комплексные корни с отрицательными вещественными частями; соответствующей точке фазовой плоскости переменных (δ_2, φ_1) отвечает устойчивый фокус). При нарушении условия (4.8) имеем неустойчивый фокус (комплексные корни с положительными вещественными частями).

Решение (4.3) при $\varphi_1^* = \pi/4, 3/4\pi, \dots$ является асимптотически устойчивым (устойчивый фокус) при выполнении следующих условий

$$12\kappa_1' - 11\kappa_2' - 1/3 < 0, \quad 2\kappa_1' - \kappa_2' - 1/3 < 0 \quad (4.9)$$

При изменении знака хотя бы одного из неравенств (4.9) имеем неустойчивость, причем соответствующая точка фазовой плоскости является неустойчивым фокусом при нарушении первого и сохранении второго условия (4.9) и седлом при нарушении второго условия.

Решение (4.4) асимптотически устойчиво по отношению к переменной δ_2 при выполнении условия $4\kappa_1' - 5\kappa_2' + 1/3 > 0$ и неустойчиво при нарушении этого условия.

Решение (4.5) всегда неустойчиво; соответствующая точка фазовой плоскости является седлом. Решение (4.6) асимптотически устойчиво всюду в области (4.7) своего существования (устойчивый фокус в фазовой плоскости).

На фиг. 2 в плоскости параметров κ_1' и κ_2' указаны области устойчивости стационарных решений (4.3), (4.4), (4.6). Три прямые $\kappa_2' = 2\kappa_1' - 1/3$, $\kappa_2' = 6/5\kappa_1' - 1/15$, $\kappa_2' = 4/5\kappa_1' + 1/15$, изображенные на фиг. 2 (они обозначены цифрами 1, 2, 3) и являющиеся границами областей устойчивости, пересекаются в точке с координатами $(1/3, 1/3)$. Устойчивыми являются следующие движения: для области I – стационарные решения (4.3) при $\varphi_1 = 0, \pi/4, \pi/2, \dots$; для области II – решение (4.3) при $\varphi_1 = 0, \pi/2, \dots$ и решение (4.6); для области III – решение (4.6); для области IV – решение (4.4) и (4.6). Для каждой из областей указанные движения являются предельными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чернина В. С. Свободные колебания тонкой замкнутой сферической оболочки // Теория оболочек и пластин. М.: Наука, 1973. С. 575—579.
2. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 830 с.
3. Докучаев Л. В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. М.: Машиностроение, 1987. 232 с.
4. Canavin J. R., Likins P. W. Floating reference frames for flexible spacecraft // J. Spacecraft and Rockets. 1977. V. 14. P. 12. P. 724—732.
5. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.
6. Архангельский Ю. А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
7. Маркеев А. П. Влияние продольных упругих колебаний тела на его быстрые вращения в гравитационном поле // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 38—45.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
9. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.V.1989