

УДК 539.375

© 1991 г.

В. В. ТВАРДОВСКИЙ

## К ТЕОРИИ ПСЕВДОМАКРОТРЕЩИН В АНИЗОТРОПНОМ ТЕЛЕ.

### 1. ОДИНОЧНАЯ ПСЕВДОМАКРОТРЕЩИНА

В работе рассматривается макротрещина в анизотропной среде под действием растягивающей нагрузки с взаимодействующими по линейному закону берегами. Такие задачи могут оказаться полезными при анализе макротрещин в композитах, берега которых стянуты неразрушенными элементами структуры. Ранее один вид такого разрушения изучался теоретически и экспериментально в работе [1], разрушение несколько иного вида исследовалось в работе [2]. Трещина со «слабой» связью берегов рассматривалась в работах [3, 4].

1. Рассмотрим плоскую деформацию ( $\varepsilon_z=0$ ) анизотропного пространства, ослабленного туннельной макротрещиной, лежащей на отрезке  $[-l, l]$  оси  $x_1$ , (фиг. 1). Разрыв перемещений берегов макротрещины обозначим  $w_i(x) = u_i^+(x) - u_i^-(x)$ , где  $u_i(x)$  — компонента вектора перемещений среды. Будем называть макротрещину псевдомакротрещиной, если на ее берегах определена связь между раскрытием и усилиями  $\sigma_{ni}(x)$ , передаваемыми с берега на берег. Ниже ограничимся линейным типом связей:

$$\sigma_{ni}(x) = k_{ij} w_j(x) \quad (1.1)$$

причем будем предполагать, что  $w_2(x_1) > 0$  для всех  $|x_1| < l$ . Из энергетических соображений следует, что набор констант  $k_{ij}$  представляет собой симметричный тензор. При наличии плоскостей симметрии, нормальных осям координат, и совпадении плоскости псевдомакротрещины с координатной тензор  $k_{ij}$  приводится к диагональному виду  $\delta_{ij} k_i$  с неотрицательными диагональными членами. Заметим, что когда все  $k_i \rightarrow 0$ , то псевдомакротрещина превращается в обыкновенную макротрещину со свободными от усилий берегами, если все  $k_i \rightarrow \infty$ , то имеем отсутствие макродфекта ( $w_i \rightarrow 0$ ). Таким образом, обычная трещина представляется точкой в пространстве  $\{k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, k_3 \geq 0\}$ .

Пусть на бесконечности задано равномерное поле растягивающих напряжений:

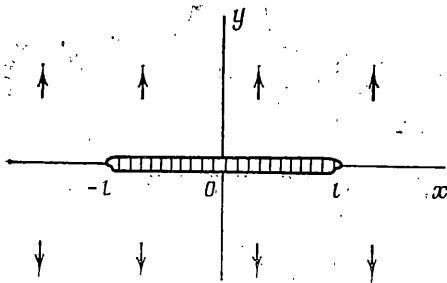
$$\sigma_{11}^\infty = 0, \sigma_{22}^\infty = p_\infty, \sigma_{12}^\infty = 0 \quad (1.2)$$

а среда имеет плоскости упругой симметрии, нормальные осям  $x_1 x_2 x_3$ . Тогда в силу симметрии на берегах псевдомакротрещины выполнено  $u_1^+(x) = u_1^-(x)$ , и, следовательно, (1.1) может быть записано в виде

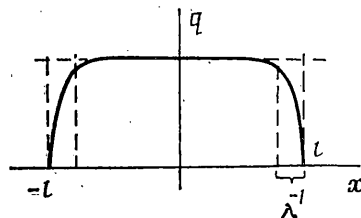
$$\sigma_{22}^\pm(x_1, 0) = k_2 w_2(x_1), \sigma_{12}^\pm(x_1, 0) = 0, |x_1| < l \quad (1.3)$$

Далее индексы 2 у  $k$  и  $w(x)$  опускаются. На продолжении псевдомакротрещины выполнены условия непрерывности усилий и перемещений, в частности, в силу симметрии

$$u_2(x_1, 0) = 0, \sigma_{12}(x_1, 0) = 0, |x_1| > l \quad (1.4)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

В случае двух неравных комплексных корней  $\mu_1, \mu_2$  характеристического уравнения [5], напряжения и перемещения выражаются через два комплексных потенциала [5]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2 \operatorname{Re}(\mu_1^2 \Phi_1(z_1) + \mu_2^2 \Phi_2(z_2)), \quad \sigma_{22} = 2 \operatorname{Re}(\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)) \\ \sigma_{12} &= -2 \operatorname{Re}(\mu_1 \Phi_1(z_1) + \mu_2 \Phi_2(z_2)) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$u_1 = 2 \operatorname{Re}(p_1 \Phi_1(z_1) + p_2 \Phi_2(z_2)), \quad u_2 = 2 \operatorname{Re}(q_1 \Phi_1(z_1) + q_2 \Phi_2(z_2))$$

где  $z_r = x_1 + \mu_r x_2$ ,  $\operatorname{Im}(\mu_r) > 0$  ( $r=1, 2$ ),  $p_r, q_r$  — комплексные параметры [5],  $\Phi_r(z_r) \equiv \Phi_r'(z_r)$ .

Функции  $\Phi_r(z_r)$ , аналитичные всюду в комплексных плоскостях  $z_r$ , кроме точек отрезков  $[-l, l]$  и бесконечно удаленной точки, представим в виде интегралов типа Коши:

$$\Phi_r(z) = \Gamma_r z + \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\mu_r f(x) dx}{\mu_r - \mu_r x - z} \quad (1.6)$$

Здесь и ниже индексы  $r$  и  $t$  пробегает значения 1 и 2 и альтернируют друг с другом: если  $r=1$ , то  $t=2$  и наоборот; суммирование по ним не производится. Константы  $\Gamma_r$  в (1.6) определяют поле (1.2) на бесконечности, а  $f(x)$  — подлежащая определению действительная функция

$$\operatorname{Im}(f(x)) = 0 \quad (1.7)$$

пропорциональная разрыву перемещений. Из условия непрерывности перемещений при обходе по замкнутому контуру вокруг псевдомакротрещины следует обращение в нуль ее граничных значений:

$$f(l) = f(-l) = 0 \quad (1.8)$$

С учетом (1.8) производные комплексных потенциалов  $\Phi_r(z)$  легко выразятся в виде:

$$\Phi_r(z) = \Gamma_r + \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\mu_r f'(x) dx}{\mu_r - \mu_r x - z} \quad (1.9)$$

при этом напряжения  $\sigma_{12} = 0$  на оси всей оси  $x_1$  и вторые соотношения граничных условий (1.3), (1.4) удовлетворены.

Напряжения  $\sigma_{22}(x_1, 0)$ , выраженные с помощью (1.5), (1.9), представляются в виде:

$$\sigma_{22}(x, 0) = p_\infty + \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - x)^2}, \quad |x_1| > l \quad (1.10)$$

$$\sigma_{22}^{\pm}(x, 0) = p_{\infty} + \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{f'(\xi)}{\xi - x} d\xi, \quad |x_1| < l \quad (1.11)$$

Разрыв нормальных перемещений берегов псевдомакротрещины, согласно (1.5), (1.6), есть  $w(x) = 2f(x) \operatorname{Re}(i(\mu_2 q_1 - \mu_1 q_2) / (\mu_2 - \mu_1))$ .

В терминах технических констант упругости

$$w(x) = 2(1 - \nu_{23} \nu_{32}) \kappa f(x) / E_{22} \quad (1.12)$$

где  $\kappa = \operatorname{Re}(i(\mu_2 - \mu_1) / (\mu_2 \mu_1))$ . Нетрудно также показать, что в силу условия (1.7) и свойств комплексных параметров  $q_1, q_2$ , первое граничное условие в (1.4) выполнено.

Удовлетворяя оставшемуся граничному условию (1.3), с использованием (1.11), (1.12) получаем интегродифференциальное уравнение на функцию  $f(x)$ :

$$\lambda_2 f(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{f'(\xi)}{\xi - x} d\xi = p_{\infty}, \quad \lambda_2 = 2k_2 \operatorname{Re}\left(i \frac{\mu_2 q_1 - \mu_1 q_2}{\mu_2 - \mu_1}\right) \quad (1.13)$$

где  $\lambda_2$  — параметр, имеющий размерность обратной длины. Для большинства практически интересных случаев величина  $\lambda_2 \propto r_0^{-1}$ , где  $r_0$  — характерный размер структуры. Таким образом,  $\lambda_2 \gg l^{-1}$  и  $(\lambda_2 l)^{-1}$  является малым параметром.

2. Уравнение (1.13) является хорошо изученным интегродифференциальным уравнением Прандтля. Аналитические решения таких уравнений известны лишь для ограниченного числа случаев [6]. Уравнение (1.13) к этому числу не относится, поэтому преобразуем его в эквивалентное регулярное интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Заметим, что если выполнены условия  $f(x) = f(-x)$ , (1.8), то уравнение (1.13) однозначно разрешимо в классе функций, имеющих производную с интегрируемой степенной особенностью на концах отрезка интегрирования [7]. Воспользовавшись методом [6], (см. также [7]), получим

$$f(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l K(x, t) f(t) dt = h(x) \quad (2.1)$$

$$h(x) = f(0) \cos \lambda x + p_{\infty} \frac{1 - \cos \lambda x}{\lambda} - p_{\infty} \int_0^x t \frac{\cos(\lambda x - \lambda t)}{(l^2 - t^2)^{1/2}} dt \quad (2.2)$$

Здесь  $h(x)$  содержит неизвестную константу  $f(0)$ . Ядро уравнения (2.1) регулярно и непрерывно на  $[-l, l]$ :

$$K(x, t) = \int_0^x R(\xi, t) \frac{\cos \lambda(x - \xi)}{(l^2 - \xi^2)^{1/2}} d\xi; \quad R(\xi, t) = \lambda \frac{(l^2 - t^2)^{1/2} - (l^2 - \xi^2)^{1/2}}{t - \xi} \quad (2.3)$$

Уравнение (2.1) может быть решено численно, как и любое интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Тем не менее имеет смысл воспользоваться условием  $\lambda_2 l \gg 1$  и найти асимптотическое разложение решения  $f(x)$  в ряд по обратным степеням  $\lambda_2 l$ . С этой целью представим правую часть и ядро уравнения (2.1) в виде асимптотического разложения по  $(\lambda_2 l)^{-1}$ . Согласно выражениям (4.2), (4.3), полученным в п. 4, для точек  $x$ , не слишком близких к концам отрезка

$[-l, l]$ , имеем:

$$h(x) = f(0) \cos \lambda x + p_\infty \frac{1 - \cos \lambda x}{\lambda} - \frac{p_\infty}{\lambda^2} \left( \frac{l^2}{(l^2 - x^2)^{3/2}} - \frac{\cos \lambda x}{l} \right) + p_\infty O(\lambda^{-3} l^{-2}), \quad |x| < l - \lambda^{-1} \quad (2.4)$$

$$K(x, t) = \frac{1}{\lambda} K_0(x, t) + O(\lambda^{-2} l^{-3}) \quad (2.5)$$

$$K_0(x, t) = \frac{((l^2 - x^2)(l^2 - t^2))^{1/2} - l^2 + tx}{(l^2 - x^2)(x - t)^2} + \frac{(l^2 - t^2)^{1/2} - (l^2 - x^2)^{1/2}}{(l^2 - x^2)^{3/2}(t - x)} - \frac{(l^2 - t^2)^{1/2} - l}{l^2} \cos \lambda x, \quad |x| < l - \lambda^{-1}$$

Выражение (2.5) справедливо для  $|t| \leq l$ .

Подставляя (2.4), (2.5) в (2.1), получаем значение константы  $f(0)$  и функции  $f(x)$  при  $|x| < l - \lambda^{-1}$ :

$$f(0) = p_\infty \lambda^{-1} - \frac{2p_\infty}{\pi l \lambda^2} + p_\infty O(\lambda^{-3} l^{-2}), \quad f(x) = f(0) + p_\infty O(\lambda^{-2} l^{-1}) \quad (2.6)$$

Непосредственный анализ уравнения (1.13) вблизи концов линии интегрирования с использованием свойств интегралов типа Коши [7] и условий (1.8) дает главный член асимптотики функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow \pm l$  в виде:

$$f(x) = C(l^2 - x^2)^{1/2} + O(\varepsilon^{3/2}) \quad (2.7)$$

где  $\varepsilon = l - |x|$ . Причем константа  $C$  находится из решения интегрального уравнения (1.13), (1.8) и связана с коэффициентом интенсивности напряжений  $K_I$  в кончике псевдомакротрещины формулой

$$K_I = C(\pi l)^{1/2} \quad (2.8)$$

Таким образом, при  $\lambda l \gg 1$  интервалы быстрого изменения функции  $f(x)$  сосредоточены в относительно малых  $\sim \lambda^{-1}$  областях вблизи концов псевдомакротрещины (см. фиг. 2), а в остальной части отрезка  $[-l, l]$   $f(x)$ , а следовательно, раскрытие  $w(x)$ , определяемое (2.11), и передаваемые с берега на берег усилия  $\sigma_{22}(x)$ , практически постоянны:

$$w(x) \simeq p_\infty h_2^{-1}; \quad \sigma_{22}(x) \simeq p_\infty, \quad |x| < l - \lambda_2^{-1} \quad (2.9)$$

Выражения (2.9) подтверждают гипотезу о параллельности берегов псевдомакротрещины, принятую в [2] при анализе конкретного частного случая.

Распределение напряжений на продолжении трещины легко вычисляется с помощью (1.10). Использование (1.12), (2.9) при  $\lambda l \gg 1$  выявляет асимптотику  $\sigma_{22}(x) \simeq p_\infty + 2p_\infty l (\pi \lambda_2 (x^2 - l^2))^{-1}$ , что справедливо для  $|x| - l \gg \lambda^{-1}$ . Для расстояний  $0 < |x| - l \ll \lambda^{-1}$  справедлива обычная асимптотика напряженно-деформированного состояния около кончика трещины в анизотропной среде:  $\sigma_{22}(x, 0) \simeq K_I (2\pi(x-l))^{-1/2}$ .

Вычислим коэффициент интенсивности напряжений  $K_I$  в кончике псевдомакротрещины, предполагая, что неравенство

$$\lambda_2 l \gg 1 \quad (2.10)$$

выполнено. Для этого удобно использовать непосредственно уравнение (1.13). Сделаем замену переменных  $x = l - \xi$  и рассмотрим (1.13) вблизи правого конца псевдомакротрещины. Переобозначая  $f(l - \xi) = f(\xi)$  и

считая  $0 < \xi \ll l$ , получим из (1.13) уравнение на функцию  $f(\xi)$ :

$$\lambda_2 f(\xi) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f'(t)}{t-\xi} dt = p_{\infty} \quad (2.11)$$

с граничными условиями, следующими из (1.8), (2.9):

$$f(0) = 0, \quad f(\infty) = p_{\infty} \lambda^{-1} \quad (2.12)$$

Физически это уравнение соответствует полубесконечной псевдомакротрещине, занимающей область  $\xi > 0$  и подверженной действию однородного поля растягивающих напряжений  $\sigma_{22}^{\infty} = p_{\infty}$  на бесконечности.

Вблизи нуля функции  $f(\xi)$ ,  $f'(\xi)$  допускают асимптотику:

$$f(\xi) = 2N\xi^{1/2} + O(\xi^{3/2}); \quad f'(\xi) = N\xi^{-1/2} + O(\xi^{1/2}) \quad (2.13)$$

где константа  $N$  неизвестна, подлежит определению и связана с коэффициентом интенсивности напряжений  $K_I$  формулой:

$$K_I = N(2\pi)^{1/2} \quad (2.14)$$

Применим к решению интегродифференциального уравнения (2.11), (2.12) полуобратный метод Винера — Хопфа, отличающийся от того, который был использован в [8] для решения математически эквивалентной задачи. Для этого введем функцию  $f_0(\xi)$  по правилу:

$$f_0(\xi) = \begin{cases} f(\xi) - f(\infty) & (\xi > 0) \\ 0 & (\xi < 0) \end{cases} \quad (2.15)$$

и перепишем уравнение (2.11) в виде

$$\lambda f_0(\xi) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0'(t)}{t-\xi} dt = \begin{cases} 0 & (\xi > 0) \\ b(\xi) & (\xi < 0) \end{cases} \quad (2.16)$$

где  $b(\xi)$  — неизвестная функция, определенная на луче  $\xi < 0$ .

Определим аналитические в верхней полуплоскости ( $\text{Im } \omega > 0$ ) комплексные функции  $Q_0^+(\omega)$  и  $Q_1^+(\omega)$ :

$$Q_0^+(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(\xi) e^{i\omega\xi} d\xi, \quad Q_1^+(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0'(\xi) e^{i\omega\xi} d\xi$$

которые, очевидно, связаны между собой соотношением

$$Q_1^+(\omega) = p_{\infty} \lambda^{-1} - i\omega Q_0^+(\omega) \quad (2.17)$$

С помощью леммы Эрдейи, являющейся аналогом леммы Ватсона для оценки асимптотического поведения интегралов Фурье [9], легко найти главные члены асимптотики функций  $Q_0^+(\omega)$  и  $Q_1^+(\omega)$  при  $\omega \rightarrow \infty$ . Используя асимптотику (2.13), получим:

$$Q_1^+(\omega) = N(\pi/\omega)^{1/2} \exp(i\pi/4) + O(\omega^{-3/2}) \quad (2.18)$$

$$Q_0^+(\omega) = -i \frac{p_{\infty}}{\lambda\omega} - \frac{N}{\omega} (\pi/\omega)^{1/2} \exp(-i\pi/4) + O(\omega^{-3/2})$$

Применим к уравнению (2.16) фурье-преобразование по координате  $\xi$ . Воспользовавшись свойствами уравнения типа свертки и значением инте-

грала

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi\omega} \frac{d\xi}{\xi-t} = \pi i e^{i\omega t} \operatorname{sign}(\omega)$$

найдем

$$Q_0^+(\tau) + i\lambda^{-1} \operatorname{sign}(\tau) Q_1^+(\tau) = B^-(\tau)$$

где  $\tau$  — аффикс действительной оси комплексной плоскости  $\omega$ , а  $B^-(\tau)$  — граничное значение аналитической в нижней полуплоскости  $\omega$  функции  $B^-(\omega)$  — фурье-образа функции  $b(\xi)$ . С помощью (2.17) это уравнение преобразуется к задаче сопряжения на действительной оси  $\tau$ :

$$Q_1^+(\tau) (1 + |\tau|\lambda^{-1}) = -i\tau B^-(\tau) + p_\infty \lambda^{-1} \quad (2.19)$$

Факторизуя коэффициент при функции  $Q_1^+(\tau)$ :

$$1 + |\tau|\lambda^{-1} = Z^+(\tau/\lambda) / Z^-(\tau/\lambda) \quad (2.20)$$

найдем, что функции  $Z^+(\omega)$ ,  $Z^-(\omega)$ , аналитичные соответственно в верхней и нижней полуплоскости  $\omega$  (кроме, быть может, бесконечно удаленной точки), могут быть представлены в виде

$$Z^+(\omega) = (1+\omega)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{i}{\pi} \int_0^\omega \frac{\ln \tau}{\tau^2-1} d\tau \right\} \quad (2.21)$$

$$Z^-(\omega) = (1+\omega)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{i}{\pi} \int_0^\omega \frac{\ln \tau}{\tau^2-1} d\tau \right\}$$

Заметим, что при  $\omega \rightarrow \infty$  функции  $Z(\omega)$  имеют асимптотику:

$$Z^+(\omega) = \omega^{1/2} \exp(-i\pi/4) + O(\omega^{-1/2}) \quad (2.22)$$

$$Z^-(\omega) = \omega^{-1/2} \exp(-i\pi/4) + O(\omega^{-3/2})$$

Тогда с помощью обобщенной теоремы Лиувилля решение (2.19) представляется в виде

$$Q_1^+(\omega) Z^+(\omega \lambda^{-1}) = \text{const} = C_0, \quad (p_\infty \lambda^{-1} - i\omega B^-(\omega)) Z^-(\omega \lambda^{-1}) = C_0 \quad (2.23)$$

Константа  $C_0$  может быть выражена через неизвестную константу  $N$  из условия совпадения асимптотик (2.18) и (2.23):

$$C_0 = N(\pi/\lambda)^{1/2} \quad (2.24)$$

Собирая (2.17), (2.23), (2.24), найдем, наконец, явный вид функции  $Q_0^+(\omega)$ :

$$Q_0^+(\omega) = \frac{i}{\omega} \left\{ N \left( \frac{\pi}{1+\omega} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{i}{\pi} \int_0^{\omega/\lambda} \frac{\ln \tau}{\tau^2-1} d\tau \right\} - p_\infty \lambda^{-1} \right\} \quad (2.25)$$

Функции  $f_0(\xi)$ ,  $f_0'(\xi)$  восстанавливаются из (2.25) с помощью обратных преобразований Фурье

$$f_0(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_0^+(\omega) e^{-i\omega\xi} d\omega \quad (2.26)$$

Определим связь констант  $N$  и  $p_\infty$ . Для этого рассмотрим асимптотику интеграла (2.26) при  $\xi \rightarrow +\infty$ . Интеграл должен пониматься в смысле главного значения по Коши, поскольку подынтегральная функция имеет в

нуле неинтегрируемую особенность

$$Q_0^+(\omega) = \frac{i}{\omega} \{N(\pi/\lambda)^{1/2} - p_\infty \lambda^{-1}\} + \frac{N}{(\pi\lambda)^{1/2}} \ln \omega + O(1), \quad \omega \rightarrow 0$$

Учитывая, что для любой непрерывной функции  $s(t)$  при  $\xi \rightarrow +\infty$  справедливо асимптотическое разложение [9]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm i\xi t} \frac{s(t)}{t} dt = \pm \pi i s(0) + O(1)$$

получим следующую оценку поведения функции  $f_0(\xi)$  (2.26) на бесконечности:  $f_0(\xi) = 1/2 \{N(\pi/\lambda)^{1/2} - p_\infty \lambda^{-1}\} + O(1)$ ,  $\xi \rightarrow +\infty$ . Но функция  $f_0(\xi)$  при  $\xi \rightarrow +\infty$ , согласно определению (2.15, 2.12), стремится к нулю, что с неизбежностью дает

$$N = p_\infty (\pi\lambda)^{-1/2}. \quad (2.27)$$

Формулы (2.27), (2.25), (2.26) полностью решают задачу о полубесконечной псевдомакротрещине, а для коэффициента интенсивности напряжений  $K_I$  на основании (2.27), (2.14) легко получить

$$K_I = p_\infty (2/\lambda_2)^{1/2} \quad (2.28)$$

Заметим, что для аналогичной задачи поперечного сдвига, при действии на бесконечности сдвиговых усилий  $q_\infty$  будет справедливо аналогичное соотношение

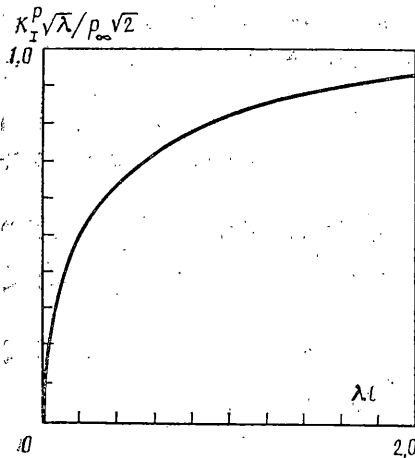
$$K_{II} = q_\infty (2/\lambda_1)^{1/2},$$

$$\lambda_1 = 2k_1 \operatorname{Re} \left( i \frac{p_1 - p_2}{\mu_2 - \mu_1} \right)$$

Таким образом, при выполнении условий (2.10) распределение напряжений в окрестности кончика псевдомакротрещины не зависит от ее длины, а целиком определяется внешней нагрузкой и структурными параметрами  $\lambda_1, \lambda_2$ .

При невыполнении условий (2.10) решение уравнения (1.13) с граничными условиями (1.8) должно быть осуществлено численно. Разложение функции  $(l^2 - x^2)^{1/2} f'(x)$  в ряд по многочленам  $T_{2n+1}(x/l)$  Чебышева первого рода нечетной степени легко позволяет избавиться от операции интегрирования в (1.13) и перейти к бесконечной системе

линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения. Вычисленная зависимость коэффициента интенсивности напряжений, отнормированная на величину (2.28), показана на фиг. 3 для значений  $0 \leq \lambda l \leq 2$ . Видно, что уже при  $\lambda l > 2$  можно пользоваться для анализа асимптотическими формулами (2.28) и (2.9). Заметим попутно, что предложенный в [3] метод решения задачи путем разложения в ряд по ортогональным функциям в используемых нами обозначениях соответствует области  $\lambda l \leq 1$  и не может быть распространен на случай  $\lambda l \gg 1$ .



Фиг. 3

3. Изменение упругой энергии тела  $\Delta W$ , связанное с введением рассмотренной псевдомакротрещины, легко вычислить по формуле

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \sigma_{22}(x_1, 0) w(x_1) dx_1 \quad (3.1)$$

В (2.6), (2.7), (2.9) было показано, что для одиночной псевдомакротрещины при действии на бесконечности однородного поля растягивающих напряжений  $\sigma_{22}^\infty = p_\infty$  величина действующих на ее поверхностях усилий  $\sigma_{22}(x)$  совпадает с  $p_\infty$  везде, за исключением малых зон вблизи края псевдомакротрещины, если выполнено условие  $\lambda l \gg 1$ . Аналогичные результаты имеют место и для сдвигового нагружения. Тогда изменение упругой энергии, данное формулой (3.1), может быть оценено в виде

$$\Delta W = \frac{p_\infty^2}{k_2} l \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda_2 l}\right) \right) \quad (3.2)$$

Вычислим критические усилия, необходимые для начала распространения рассмотренной псевдомакротрещины. При этом будем предполагать, что в процессе разрушения линейность соотношений (1.1) на разрыве сохраняется, а при увеличении длины псевдомакротрещины на величину  $\delta l$  диссипируется энергия  $2\gamma_p \delta l$ . Элементарный баланс энергии типа условия Гриффитса  $\partial \Delta W / \partial l = 4\gamma_p$  приводит к соотношению

$$p_* = (4\gamma_p k_2)^{1/2} \quad (3.3)$$

для нормального отрыва и  $q_* = (4\gamma_p k_1)^{1/2}$  для поперечного сдвига. Легко показать, что формула (3.3) следует также из силового критерия Ирвина для анизотропной среды:

$$K_I = K_{Ic} = (4\gamma_p E_{22} / (\kappa (1 - \nu_{23}\nu_{32})))^{1/2}$$

где для величины  $K_I$  берется значение, доставляемое (2.28).

Таким образом, для любой псевдомакротрещины с линейными связями при выполнении условий  $\lambda l \gg 1$  критические нагрузки не зависят от ее длины, что обобщает результаты, полученные в [1, 2] для двух различных частных случаев.

4. Найдем асимптотическое разложение  $h(x)$  (2.2) и  $K(x, t)$  (2.3) по обратным степеням  $\lambda l$ . Для этого воспользуемся методом стационарной фазы. Если функции  $f(x)$ ,  $f'(x)$ , ...,  $f^{(N+1)}(x)$ ;  $S(x)$ ,  $S'(x)$ , ...,  $S^{(N+2)}(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$ , причем  $S'(x)$  не обращается в нуль на  $[a, b]$ , то имеет место следующее асимптотическое разложение [9] при  $\mu \rightarrow \infty$ :

$$\int_a^b f(x) \exp(i\mu S(x)) dx = \sum_{k=0}^N (i\mu)^{-k-1} M_k \left( \frac{f(x)}{S'(x)} \right) \exp(i\mu S(x)) \Big|_a^b + O(\mu^{-N-2}) \quad (4.1)$$

$$M_k = (-d/(S'(x) dx))^k$$

Поскольку для  $|x| < l - \lambda^{-1}$  функция  $x(l^2 - x^2)^{-1/2}$  гладкая, из (4.1) следует

$$\int_0^x t(l^2 - t^2)^{-1/2} e^{-i\lambda t} dt = \frac{ix e^{-i\lambda x}}{\lambda(l^2 - x^2)^{1/2}} + \lambda^{-2} \left\{ \frac{l^2 e^{-i\lambda x}}{(l^2 - x^2)^{3/2}} - \frac{1}{l} \right\} + O(\lambda^{-3} l^2)$$

Умножая на  $e^{i\lambda x}$  и отделяя действительную часть, получаем асимптотическое разложение  $h(x)$  до степеней  $(\lambda l)^{-2}$  включительно:



$$h(x) = f(0) \cos \lambda x + p_\infty \frac{1 - \cos \lambda x}{\lambda} - \frac{p_\infty}{\lambda^2} \left( \frac{l^2}{(l^2 - x^2)^{3/2}} - \frac{\cos \lambda x}{l} \right) \quad (4.2)$$

справедливое для  $x$  не слишком близких к концам отрезка  $[-l, l]$ .

Аналогичные, но более громоздкие выкладки позволяют получить разложение ядра  $K(x, t)$ :

$$K(x, t) = \frac{1}{\lambda} K_0(x, t) + O(\lambda^{-2} l^{-3}) \quad (4.3)$$

$$K_0(x, t) = \frac{((l^2 - x^2)(l^2 - t^2))^{1/2} - l^2 + tx}{(l^2 - x^2)(x - t)^2} + \frac{(l^2 - t^2)^{1/2} - (l^2 - x^2)^{1/2}}{(l^2 - x^2)^{1/2}(t - x)} - \frac{(l^2 - t^2)^{1/2} - l}{lt^2} \cos \lambda x$$

справедливое для  $|t| \leq l$ ,  $|x| \leq l - \lambda^{-1}$ . Видно, что для этих значений аргументов ядро  $K_0(x, t)$  является непрерывной ограниченной функцией.

Поведение функций  $h(x)$  и  $K(x, t)$  вблизи концов отрезка  $[-l, l]$  определяется с помощью интегралов

$$\int_x^l t(l^2 - t^2)^{-1/2} \cos \lambda(x - t) dt = (2l(l - x))^{1/2} + O(\lambda^2(l - x)^{5/2} l^{1/2}) \quad (4.4)$$

$$\int_x^l R(\xi, t) (l^2 - \xi^2)^{-1/2} \cos \lambda(x - \xi) d\xi = R(l, t) \{ (2(l - x)/l)^{1/2} + O(\lambda^2(l - x)^{5/2} l^{-1/2}) \}$$

при  $l - x \ll \lambda^{-1}$  и значениями  $h(l)$ ,  $K(l, t)$ . Основной вклад в асимптотическое разложение  $h(l)$  и  $K(l, t)$  вносит точка  $\xi = l$ , что, согласно лемме Эрдейи [9], приводит к

$$\int_0^l t(l^2 - t^2)^{-1/2} \cos \lambda(x - t) dt = (\pi l / (4\lambda))^{1/2} + O(\lambda^{-1/2} l^{-1/2}) \quad (4.5)$$

$$\int_0^l R(\xi, t) (l^2 - \xi^2)^{-1/2} \cos \lambda(x - \xi) d\xi =$$

$$= R(l, t) (\pi l / (4\lambda))^{1/2} \{ \cos \lambda(x - l) + \sin \lambda(x - l) \} + O(1)$$

Комбинируя (4.4), (4.5), легко получить  $h(x)$  и  $K(x, t)$  при  $x \rightarrow \pm l$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Казмин В. И., Милейко С. Т., Гвардовский В. В. Разрушение модельного композита с керамической матрицей // Механика композитных материалов. 1988. № 2. С. 206-220.
2. Budiansky B., Hutchinson J. W., Evans A. G. Matrix fracture in fiber - reinforced ceramics // J. Mech. Phys. Solids. 1986. V. 34. № 2. P. 167-189.
3. Шифрин Е. И. Плоская трещина нормального отрыва при наличии линейных связей между ее поверхностями // Изв. АН СССР. МТГ. 1982. № 3. С. 80-86.
4. Шифрин Е. И. Плоская трещина нормального разрыва, берега которой взаимодействуют по линейному закону // Изв. АН СССР. МТГ. 1988. № 5. С. 94-100.
5. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
6. Магнарадзе Л. Г. Об одном новом интегральном уравнении теории крыла самолета // Сообщ. АН ГССР. 1942. Т. 3. № 6. С. 503-508.
7. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 448 с.
8. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 303 с.
9. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
10. Си Дж., Либовиц Г. Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 82-203.

Москва

Поступила в редакцию  
28.XII.1988