МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1991

УДК 539.374

И. А. КИЙКО, А. К. КОНЯШКИН

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА С ТРЕНИЕМ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ ПРИ ЗАДАННОМ НОРМАЛЬНОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ

Упругопластические контактные задачи с трением рассматривались в [2, 5]. В предлагаемой статье рассматривается упругопластическая задача с трением, которое в одном направлении определяется законом Кулона, а в другом отсутствует. Такие условия могут быть осуществлены в некоторых процессах обработки давлением, например при упрочнении поверхностного слоя.

Для тела D с достаточно гладкой границей S в декартовых координатах x_1, x_2, x_3 выполняются следующие уравнения и граничные условия:

$$\begin{gathered}
\sigma_{ij,j}+Q_i=0, \quad \theta=\varepsilon_{ii} \\
\sigma_{ij}=\lambda\theta\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}-2\mu\omega(\varepsilon_u)(\varepsilon_{ij}-{}^1/_3\theta\delta_{ij}) \\
\varepsilon_{ij}={}^1/_2(u_{i,j}+u_{j,i}), \quad \varepsilon_u=({}^2/_3(\varepsilon_{ij}-{}^1/_3\theta\delta_{ij})(\varepsilon_{ij}-{}^1/_3\theta\delta_{ij}))^{1/2} \\
S_u\colon u_i=U_i(x), \; S_f\colon \sigma_{ij}n_j=P_i \; (i, j=1, 2, 3) \\
S_k\colon u_n=f(x), \quad \sigma_{\tau_1}=0, \quad \sigma_{\tau_2}=\nu\sigma_n \\
U_i, \; f\in H^{1/2}(S_k), \quad P_i\in L_2(S_f), \; Q\in L_2(D), \quad S=S_u\cup S_f\cup S_k
\end{gathered} \tag{1}$$

где $\nu>0$ — коэффициент трения, ω — функция Ильюшина, $\omega\in C^1(0, +\infty)$; остальные ограничения на ω обычны. На S_u заданы перемещения, на S_f — напряжения, S_k — часть поверхности, где заданы смешанные граничные условия, n — нормаль к S, τ_1, τ_2 — единичные ортогональные касательные векторы к S_k.

Чтобы дать вариационную постановку этой задачи, введем следующие обозначения:

$$K=\{v/(v\in(H^1(D))^3, \; v=U \text{ на } S_u, \; v_n=f \text{ на } S_k\}$$

$$L=\{v/v\in(H^1(D))^3, \; v=0 \text{ на } S_u, \; v_n=0 \text{ на } S_k\}$$

$$A(v)=\int_D Qv\,d\tau+\int_{S_f} Pv\,ds$$

Тогда, если u удовлетворяет (1), то на основании формулы Грина u удовлетворяет следующему интегральному равенству:

$$\int_D \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)\,d\tau=A(v)+\nu\int_{S_k}\sigma_n(u)v_{\tau_2}\,ds \quad \forall G\in L \tag{2}$$

Можно убедиться, что достаточно гладкое решение вариационного уравнения (2) удовлетворяет (1). Однако, когда $u\in K$, то $\sigma_n(u)$ не определено на K и (2) теряет смысл. Поэтому необходимо определить, что понимается под решением данной задачи, которое принадлежит K.

Следуя [5], дадим строгую постановку исходной задачи. Под $H^{1/2}(S_k)$ понимается подпространство $\{v \in H^{1/2}(S)\ v=0$ на $S_u \cup S_f\}$. Тогда $H^{-1/2}(S_k)$ будет подпространство, сопряженное к $H^{1/2}(S_k)$. Пусть $g_n \in H^{-1/2}(S_k)$ — некоторый известный функционал. Можно записать следующую задачу.

Найти функцию $u \in K$, удовлетворяющую следующему равенству:

$$\int_D \sigma_{ij}(u)\,\varepsilon_{ij}(v)\,d\tau = A(v) + \nu\langle g_n, v_{\tau_2}\rangle, \quad \forall v \in L \tag{3}$$

Здесь $\langle g_n,\ v_{\tau_2}\rangle$ — значение функционала g_n на элементе v_{τ_2}, на S_k. Далее будет показано, что эта задача имеет единственное решение.

Определим $\forall u \in K$, решения задачи (3), на пространстве $L_\sigma = \{v/v \in (H^1(D))^3,\ v_{\tau_1} = v_{\tau_2} = 0$ на S_k, $v=0$ на $S_u\}$ следующий функционал:

$$\langle \sigma_n(u), v_n\rangle = \int_D \sigma_{ij}(u)\,\varepsilon_{ij}(v)\,d\tau - \int_D Qv\,d\tau \tag{4}$$

При помощи формулы Грина можно показать, что функционал (4) можно рассматривать как линейное отображение $H^{1/2}(S_k)$ в множество действительных чисел; именно такой смысл будет ему придаваться далее. Из (4) вытекает:

$$\langle \sigma_n(u_1) - \sigma_n(u_2),\ v_n\rangle \leqslant M\cdot\|u_1 - u_2\|\cdot\|v\| \tag{5}$$

Здесь u_1, $u_2 \in K$ и удовлетворяют (3) для некоторых $g_n \in H^{1/2}(S_k)$. Можно построить непрерывное линейное отображение $H^{1/2}(S_k)$ в $(H^1(D))^3$, так что след образа на S при постоянном линейном отображении равен прообразу [1]. Из этого и (5) заключаем, что $\sigma_n(u_1) - \sigma_n(u_2)$ есть непрерывный линейный функционал, определенный на $H^{1/2}(S_k)$ и выполнено:

$$\|\sigma_n(u_1) - \sigma_n(u_2)\| \leqslant M_1\|u_1 - u_2\| \tag{6}$$

где $M_1 > 0$ — некоторая константа. Аналогично можно показать, что $\sigma_n(u) \in H^{-1/2}(S_k)$.

Назовем $u \in K$ решением исходной задачи, если эта функция удовлетворяет (3) и $g_n = \sigma_n(u)$, где $\sigma_1(u)$ определено в (4). Заметим, что все рассматриваемые пространства нормированные, и под символом $\|\cdot\|$ понимается норма элемента в пространстве, которому он принадлежит. Введем отображение $\Phi: g_n \to \sigma_n(u(g_n))$, тогда исходная задача сведется к отысканию неподвижной точки этого отображения. Организуем следующий итерационный процесс $g_n^{(k)} = \Phi(g_n^{(k-1)})$ и $g_n^{(0)} = 0$. Покажем, что $u_i^{(k)}$, $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, $\sigma_{ij}^{(k)}$ — сходящиеся последовательности и их пределы соответственно u_i, ε_{ij}, σ_{ij} есть искомое решение исходной задачи.

Решение задачи пластичности на k-м шаге удовлетворяет уравнению

$$\int_D \sigma_{ij}(u^{(k)})\,\varepsilon_{ij}(v)\,d\tau = A(v) + \nu\langle g_n^{(k-1)}, v_{\tau_2}\rangle \tag{7}$$

Вычтем из (7) аналогичное равенство для задачи пластичности на $(k-1)$-м шаге. Получим

$$\int_D (\sigma_{ij}^{(k)} - \sigma_{ij}^{(k-1)})\,\varepsilon_{ij}(v)\,d\tau = \nu\langle g_n^{(k-1)} - g_n^{(k-2)}, v_{\tau_2}\rangle \tag{8}$$

Известно, что

$$\int\limits_D (\sigma_{ij}^{(k)}-\sigma_{ij}^{(k-1)})\varepsilon_{ij}(u^{(k)}-u^{(k-1)})d\tau \geqslant m\|u^{(k)}-u^{(k-1)}\| \qquad (9)$$

где $m>0$ — некоторая константа, связанная со свойствами материала.

С другой стороны, в силу неравенства (6) и теоремы о следах [1, 4] имеем

$$\langle g_n^{(k-1)}-g_n^{(k-2)}, u^{(k)}-u^{(-1)}\rangle \leqslant M_2\cdot\|u^{(k)}-u^{(k-1)}\|\,\|u^{(k-1)}-u^{(k-2)}\| \qquad (10)$$

где M_2 — некоторая константа, связанная со свойствами материала и формой тела D. Из (8)—(10) получаем

$$\|u^{(k)}-u^{(k-1)}\| \leqslant \frac{M_2\nu}{m}\|u^{(k-1)}-u^{(k-2)}\|$$

Если $M_2\nu/m<1$, т. е. ν достаточно мало, то $u^{(k)}$ будет фундаментальной последовательностью в полном $(H^1(D))^3$. Пусть $u^{(k)}$ сходится к u, а $\varepsilon_{ij}(u^{(k)})$ к $\varepsilon_{ij}(u)$, $\sigma_{ij}(u^{(k)})\to\sigma_{ij}(u)$. Выполнено условие $\lim_{k\to\infty} g_n^{(k)}=\sigma_n(u)$ в $H^{-1/2}(S_k)$ и потому u, $\varepsilon_{ij}(u)$, $\sigma_{ij}(u)$ есть искомое решение.

Рассмотрим задачи пластичности, к которым свелась исходная задача. Очевидно, решение задачи на k-м шаге из полученной последовательности эквивалентно нахождению минимума функционала

$$J(v)={}^1/_2\int\limits_D (\lambda\theta(v)\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}(v))\varepsilon_{ij}(v)d\tau-$$

$$-\nu\langle g_n^{(k-1)}, v_{\tau_2}\rangle - A(v)-3\mu\int\limits_D\left(\int\limits_0^{\varepsilon_u(v)} s\omega(s)ds\right)d\tau$$

на множестве $v\in K$. $J(v)$ — строго выпуклый, коэрцитивный функционал, рассматриваемый на замкнутом выпуклом множестве K. Поэтому существует единственное решение задачи минимизации [3], а также задачи (3).

Приведенные рассуждения можно рассматривать как доказательство существования хотя бы одного решения вышеописанной смешанной задачи. Покажем и единственность. Допуская существование двух решений u_i', ε_{ij}', σ_{ij}' и u_i'', ε_{ij}'', σ_{ij}'', из (8)—(10) получим

$$0=\int\limits_D(\sigma_{ij}''-\sigma_{ij}')\varepsilon_{ij}(u''-u')d\tau-\nu\langle g_n'-g_n'', (u'-u'')_{\tau_2}\rangle\geqslant(m-\nu M_2)\|u''-u'\|$$

При $\nu<m/M_2$ правая часть неравенства неотрицательна и значит $\|u''-u'\|=0$. Поэтому $u_i'=u_i''$, $\varepsilon_{ij}'=\varepsilon_{ij}''$, $\sigma_{ij}'=\sigma_{ij}''$.

В заключение отметим, что предложенный метод рассматривался, например, в [2] для решения контактных упругих задач, но с другими граничными условиями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лионс Ж. Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
2. *Кравчук А. С.* К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 122–129.
3. *Кравчук А. С.* К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 2. С. 329–337.
4. *Дюво Г., Лионс Ж. Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 382 с.
5. *Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И., Ловишек Я.* Решение вариационных неравенств в механике. М.: Мир, 1986. 270 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.III.1989