

УДК 539.3

© 1991 г.

В. С. САРБАЕВ

ЭНДОХРОННАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Проблема построения и анализа определяющих уравнений анизотропных сред, обладающих пластическими (неупругими) свойствами, является одной из актуальных проблем механики деформируемого твердого тела. Не претендуя на полноту обзора, назовем некоторые из возможных подходов к решению данной проблемы.

Как известно, один из путей решения заключается в использовании теории приращения деформаций, основанной на концепции поверхности нагружения, ассоциированной законе течения. Теории пластичности этого типа можно найти, например, в работах [1–6], в которых предложены варианты уравнений регулярных поверхностей нагружений. Другой путь предполагает развитие деформационных теорий пластичности. Возможные подходы к разработке таких теорий, опирающиеся на свойства тензорных функций, сформулированы в [7–8]. В [9] предложены теории приращения деформаций и деформационная теория, основанные на понятии собственного напряженно-деформированного состояния анизотропного тела.

Отметим, что разработке указанных теорий пластичности с поверхностью нагружения предшествует проведение экспериментальных исследований, направленных на определение формы поверхности нагружения, закономерностей ее перемещения в пространстве напряжений. Кроме этого, вытекающие из данного подхода определяющие уравнения в математическом плане характеризуются неаналитичностью, вследствие чего анализ даже простейших случаев нагружения материала, разработка способов решения краевых задач связаны, как правило, со значительными математическими трудностями. Один из возможных путей преодоления отмеченных трудностей заключается в развитии теорий пластичности без поверхности нагружения или эндохронных теорий пластичности.

В работах [10–12] представлены различные способы вывода уравнений теории данного типа для изотропного тела. В [10, 11] показано, что определяющие уравнения можно получить в рамках теории упругопластических процессов при соответствующем выборе функционала пластичности. В [12] рассматриваются зависимости наследственного типа, в которых роль времени выполняет параметр, зависящий от величины дуги траектории деформирования в пространстве полных деформаций. Общим для перечисленных работ является то, что определяющие уравнения выводятся без привлечения понятия поверхности нагружения. Предельные поверхности, а также некие их аналоги вытекают из уравнений эндохронной теории при некоторых допущениях [11, 13]. Не умаляя значения указанных работ, отметим, что для полноты анализа уравнений эндохронной теории пластичности целесообразен также взгляд на указанную теорию с позиций классической теории пластичности, основанной на концепции поверхности нагружения.

С указанной точки зрения эндохронную теорию пластичности можно рассматривать как предельный случай классической теории, имеющий место при вырождении поверхности нагружения. По-видимому, впервые этот подход был реализован в работах [14, 15], в которых для изотропного тела при вырождении сингулярной поверхности нагружения в отрезок прямой были получены определяющие уравнения в дифференциальной форме, справедливые для любых направлений догрузки из данного напряженного состояния. Этот вариант теории, названный «аналитической теорией пластичности», был применен в книге [15] для решения задач устойчивости. В [15] было подчеркнуто, что «... аналитическую теорию можно рассматривать как приближение к обычным неаналитическим теориям» (с. 136). По существу указанный подход к эндохронной теории обсужден в [16].

В отличие от [14, 15], в настоящей работе показано, что уравнения эндохронной теории следуют из уравнений теории пластичности с регулярной поверхностью нагружения при вырождении последней в точку. Для этой цели разумно использовать теорию пластичности с традиционным упрочнением типа теории, предложенной Г. Бакхаусом в [17]. Указанный взгляд на уравнения эндохронной теории подтверждает некоторые известные особенности данной теории [16]. Например, нетрудно

показать, что деформирование по уравнениям эндохронной теории не подчиняется постулату Друкера, при любом уровне напряжений и при любых направлениях догрузки зависимости не описывают линейно упругое поведение. Важно подчеркнуть, что предлагаемый способ получения уравнений эндохронной теории при определенных условиях позволяет трактовать их как приближенные уравнения соответствующей теории пластичности с трансляционным упрочнением. В связи с этим появляется возможность исключить из рассмотрения предсказываемые эндохронной теорией эффекты деформирования, не находящие экспериментального подтверждения для большинства конструкционных материалов. Как показано в данной работе, предположение об отсутствии поверхности нагружения в ряде случаев позволяет получить для анизотропных материалов удовлетворительные результаты, описывающие экспериментальные данные.

1. Пусть сплошная анизотропная среда рассматривается в декартовой прямоугольной системе координат x_i ($i=1, 2, 3$), напряженно-деформированное состояние характеризуется тензором напряжений σ и тензором малых деформаций ε . Процесс деформирования происходит при изотермических условиях, реономные свойства среды отсутствуют. Воспользуемся концепцией регулярной поверхности нагружения, ассоциированным законом течения.

Уравнение поверхности нагружения зададим в виде

$$2f(\sigma) = s \cdot A \cdot s = \varphi^2(\varepsilon_p^0) \quad (1.1)$$

Здесь A — симметричный, положительно определенный, невырожденный тензор IV ранга; функция $\varphi(\varepsilon_p^0)$ удовлетворяет условиям $\varphi(\varepsilon_p^0) > 0$, $d\varphi/d\varepsilon_p^0 > 0$, $\varphi(0) = 1$. Элементы тензора A , выражаемые через пределы текучести, и функция $\varphi(\varepsilon_p^0)$ устанавливаются в эксперименте. Эквивалентная пластическая деформация ε_p^0 определена ниже. Для симметричного тензора II ранга s имеем

$$s = \sigma - r \quad (1.2)$$

причем для тензора r задаем

$$r = \int_0^{z_p} G(z_p - z_p') \cdot \frac{d\varepsilon_p}{dz_p'} dz_p' \quad (1.3)$$

где $G(z_p)$ — тензор IV ранга, $dz_p = d\varepsilon_p^0 / \varphi(\varepsilon_p^0)$. Тензор пластических деформаций определяется известной зависимостью $\varepsilon_p = \varepsilon - E^* \cdot \sigma$. Здесь E^* — тензор IV ранга, обратный тензору модулей упругости E . Уравнение (1.1) можно записать в виде

$$\sigma^0 = a\varphi(\varepsilon_p^0) \quad (1.4)$$

где $a > 0$ — параметр, имеющий размерность напряжений. Далее примем $a = A_{III}^{-1/2}$; σ^0 — эквивалентное напряжение, определенное равенством

$$\sigma^0 = (s \cdot B \cdot s)^{1/2} \quad (1.5)$$

где $B = a^2 A$. Из (1.3) — (1.5) следует условие начала пластичности (при $\varepsilon_p^0 = 0$): $\sigma \cdot B \cdot \sigma = a^2$.

Воспользовавшись ассоциированным законом течения, из (1.1), (1.4) получим

$$a d\varepsilon_p / dz_p = B \cdot s \quad (1.6)$$

Приращение эквивалентной пластической деформации определяется следующим образом

$$d\varepsilon_p^0 = (d\varepsilon_p \cdot B^* \cdot d\varepsilon_p)^{1/2} \quad (1.7)$$

B^* — тензор IV ранга, обратный тензору B .

Уравнения (1.2) — (1.7) можно трактовать как уравнения теории пластичности с трансляционным упрочнением, являющейся обобщением на

случай анизотропных сред теории, изложенной в [17]. Зависимость (1.4) в девятимерном пространстве напряжений задает эллипсоид, координаты центра симметрии которого определяются тензором g . В процессе деформирования ориентация главных осей эллипсоида сохраняется неизменной, а размеры полуосей увеличиваются подобным образом. Теории такого типа описывают эффект Баушингера.

Предложенные уравнения содержат в себе ряд частных случаев, известных в литературе. Если положить $G(z_p) \equiv 0$; $f(\sigma) = f(\sigma + p\delta)$, где δ — единичный тензор II ранга, p — скаляр, то получим уравнения теории Мизеса — Хилла [1]. В случае $G(z_p) \equiv kI$, где k — параметр материала, I — единичный тензор IV ранга, имеем закон трансляции поверхности нагружения Ишлинского — Прагера [18, 19]. Если же принять, что $G(z_p) \equiv A I e^{-\alpha z_p}$, где $A > 0$; $\alpha > 0$ — параметры материала, то в итоге будем иметь

$$(a/A) (dr/dz_p) = B \cdot 1, \quad (1.8)$$

где $1 = \sigma \cdot P \cdot r$, $P = I + (\alpha/A) a B^*$. Для $\alpha/A \rightarrow 0$ равенство (1.8) можно рассматривать как обобщение закона трансляции Циглера [20] на случай анизотропной среды. При этом вследствие (1.8) в девятимерном пространстве напряжений вектор dr не коллинеарен вектору, соединяющему центр симметрии поверхности нагружения с заданной точкой на поверхности нагружения.

Заметим, что при $g = a$ (a — постоянный тензор II ранга) следуют уравнения теории пластичности из [4]. В конкретных задачах возможно применение более сложных выражений ядра $G(z_p)$ в равенстве (1.3), например, выражений $G(z_p) = \sum L_i e^{-\alpha_i z_p}$, где L_i — тензоры IV ранга ($i = 1 \div n$).

2. Для некоторых материалов, например, для композитов, бетона, необратимые изменения в микроструктуре возникают уже в начале процесса деформирования. Регистрируемые в эксперименте диаграммы деформирования обнаруживают отклонения от линейности при малых значениях напряжений. При этом процесс деформирования становится необратимым. Для таких материалов можно принять $a \rightarrow 0$. В этом случае уравнения (1.2), (1.3), (1.6), (1.7) вырождаются в следующие уравнения

$$\sigma = \int_0^z G(z-z') \cdot \frac{d\varepsilon}{dz'} dz', \quad dz = d\xi/f(\xi). \quad (2.1)$$

$$d\xi = (d\varepsilon \cdot R \cdot d\varepsilon)^{1/2} \quad (2.2)$$

Параметр z , названный в [12] «внутренним временем» учитывает влияние истории деформирования на связь между σ и ε . Если принять, что при $z=0$ $d\sigma = E \cdot d\varepsilon$, то получим уравнения эндохронной теории анизотропной среды. Таким образом, указанные уравнения представляют собой предельный вариант уравнений теории пластического течения с трансляционным упрочнением (1.2) — (1.7), когда поверхность нагружения стягивается в точку с координатами, задаваемыми тензором g . Полученные уравнения справедливы как при $\sigma \cdot d\varepsilon \geq 0$, так и при $\sigma \cdot d\varepsilon < 0$. Из (2.1), (2.2) следуют уравнения для анизотропных сред с элементами симметрии.

В отличие от приведенного подхода в работе [21], уравнения (2.1), (2.2) были получены обобщением теории, предложенной в [12], на случай анизотропной среды. В [22] разработан вариант эндохронной теории, в которой определяющие уравнения имеют вид

$$\varepsilon = -\frac{\partial G}{\partial \sigma} + \int_0^z B(z-z') \cdot \frac{d\sigma}{dz'} dz' \quad (2.3)$$

где $z = \varphi(\xi)$, $d\xi^2 = d\sigma \cdot S \cdot d\sigma$; G — потенциал, зависящий от тензора напряжений. Равенство (2.3), полученное из общих соотношений термодинамики необратимых процессов, можно трактовать как комбинацию уравнений нелинейной упругости и эндохронной теории, причем введение неупругой составляющей в правую часть (2.3) позволяет описывать необратимое деформирование. Представляется, что для анализа напряженно-деформированного состояния твердых тел уравнения (2.1), (2.2) более предпочтительны, чем (2.3).

Отметим, что в настоящее время известны различные формы записи уравнений теории пластичности без поверхности нагружения [12—15, 23, 24]. Они отличаются друг от друга видом ядра в интегральном выражении, определением временеподобной величины, отражающей историю деформирования среды. В конкретных задачах эти уравнения дают близкие результаты. Форма записи вида (2.1), (2.2) с ядром разностного типа является одной из простых и удобных, во многих случаях предсказывает поведение материала, подтверждаемое экспериментально, часто позволяет в приложениях получать решения в элементарных функциях, легко вписывается в численные методы анализа краевых задач.

Следует также отметить, что в эндохронной теории нет необходимости в проведении сложных экспериментов по определению формы и закона трансляции поверхности нагружения. Функции и параметры, входящие в соотношения, можно идентифицировать численными методами, используя результаты экспериментального исследования образцов материала.

Предлагаемый подход к уравнениям эндохронной теории пластичности позволяет трактовать их как приближенные уравнения изложенной выше теории пластичности с трансляционным упрочнением, имеющие место при условии $a \rightarrow 0$, $G(0) \rightarrow E$. При этом следует учитывать, что если в пространстве напряжений выполняется условие $\Delta l \gg a$, где $\Delta l = (\Delta\sigma \cdot \Delta\sigma)^{1/2}$, то совпадение решений по этим двум теориям будет удовлетворительное; если имеет место случай $\Delta l \sim a$, то эндохронная теория и теория пластичности с трансляционным упрочнением могут давать качественно различные результаты.

3. Рассмотрим уравнения для неупругой трансверсально изотропной среды. Ось координат ox_3 совместим с осью изотропии. Вводя вспомогательное шестимерное пространство, уравнение (2.1) запишем в матричном виде

$$\sigma = \int_0^z C(z-z') \frac{d\varepsilon}{dz'} dz', \quad (3.1)$$

где векторы σ и ε таковы: $\sigma = (\sigma_0, \sigma_{33}, s, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23})^T$, $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_{33}, e, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23})^T$, $\sigma_0 = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2$, $s = (\sigma_{11} - \sigma_{22})/2$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$, $e = \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}$.

Матрицу $C(z)$ размерностью 6×6 зададим в виде

$$C(z) = e^{-Az} E \quad (3.2)$$

где E — матрица модулей упругости, $A = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_4)$. Уравнение (2.2) примет вид

$$\begin{aligned} d\xi^2 = & R_{11}(d\varepsilon_0)^2 + R_{12}[(d\gamma_{12})^2 - 4d\varepsilon_{11}d\varepsilon_{22}] + 2R_{13}d\varepsilon_0d\varepsilon_{33} + \\ & + R_{33}(d\varepsilon_{33})^2 + R_{22}[(d\gamma_{13})^2 + (d\gamma_{23})^2] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из условия положительной определенности тензора R следует: $R_{11} > 0$, $R_{12} > 0$, $R_{22} > 0$, $R > 0$, $R_{33}R > 4R_{13}^2$, где $R = 4(R_{11} - R_{12})$.

Рассмотрим некоторые примеры. Пусть образец из неупругого материала подвергается гидростатическому нагружению ($\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = p$, $\sigma_{12} =$

$=\sigma_{13}=\sigma_{23}=0$). Тогда из (3.1), (3.2) получим

$$\frac{d\varepsilon_{11}}{d\xi} = A_1 \frac{dp}{d\xi} + B_1 \frac{p}{f(\xi)}, \quad \frac{d\varepsilon_{33}}{d\xi} = A_2 \frac{dp}{d\xi} + B_2 \frac{p}{f(\xi)}, \quad (3.4)$$

причем $d\varepsilon_{11}=d\varepsilon_{22}$. Здесь обозначено $A_1=(1-\nu_1)/E_1-\nu_2/E_2$, $A_2=(1-2\nu_2)/E_2$, $B_1=\alpha_1(1-\nu_1)/E_1-\alpha_2\nu_2/E_2$, $B_2=(\alpha_2-2\alpha_1\nu_2)/E_2$, где E_1 , E_2 , ν_1 , ν_2 — модули упругости и коэффициенты Пуассона трансверсально изотропной среды. Из (3.3) следует

$$R \left(\frac{d\varepsilon_{11}}{d\xi} \right)^2 + R_{33} \left(\frac{d\varepsilon_{33}}{d\xi} \right)^2 + 4R_{13} \frac{d\varepsilon_{11}}{d\xi} \frac{d\varepsilon_{33}}{d\xi} = 1 \quad (3.5)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка (3.4), (3.5) с начальными условиями $\xi=0$, $p=0$, $\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=0$ в общем случае интегрируется численно.

Для некоторых материалов целесообразно ввести гипотезу об упругом поведении вдоль оси ox_3 (например, для волокнистых композитов при совпадении оси ox_3 с направлением армирования). Тогда в уравнениях (3.2), (3.3) следует принять $\alpha_2=0$, $R_{13}=R_{33}=0$. При этих условиях система уравнений (3.4), (3.5) существенно упрощается. Задавая для определенности $f(\xi)=1+\beta\xi$, $dp < 0$, получим

$$\begin{aligned} -p &= \frac{1}{A_1 \sqrt{R}(\alpha^* + \beta)} \left[(1 + \beta\xi) - (1 + \beta\xi)^{-\alpha^*/\beta} \right] \\ -\varepsilon_{33} &= \frac{A_2\beta + B_2}{A_1 \sqrt{R}(\alpha^* + \beta)} \xi + \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{A_1^2 \alpha^* \sqrt{R}(\alpha^* + \beta)} \left[1 - (1 + \beta\xi)^{-\alpha^*/\beta} \right] \\ \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} &= -\xi / \sqrt{R} \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\alpha^* = B_1/A_1$. Можно показать, что $A_2 B_1 - A_1 B_2 > 0$. Тогда кривые деформирования, построенные по (3.6), будут иметь вид, указанный на фиг. 1. При этом кривая 1 получена при $\beta < \beta^*$, кривая 2 — при $\beta > \beta^*$. Здесь обозначено $\beta^* = 2\nu_2\alpha_1/(1-2\nu_2)$. В случае $\beta = \beta^*$ имеем $\varepsilon_{33} \rightarrow \varepsilon^*$ (кривая 3), где $\varepsilon^* = -(A_2 B_1 - A_1 B_2) / [A_1^2 \alpha^* \sqrt{R}(\alpha^* + \beta)]$.

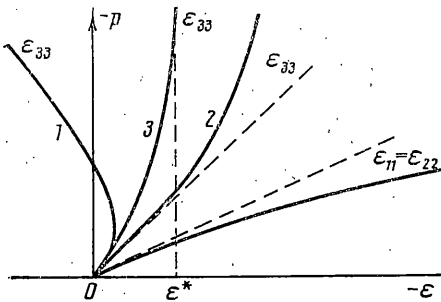
Таким образом, при гидростатическом нагружении трансверсально изотропного материала в общем случае следует ожидать знакопеременное деформирование вдоль направления, совпадающего с осью ox_3 . На фиг. 1 штриховыми линиями нанесены результаты, полученные при помощи теории Мизеса — Хилла. Как видно, в этом случае предсказывается поведение, качественно отличное от того, что дает эндохронная теория.

Пусть образец материала предварительно подвергается гидростатическому нагружению до давления $p=p_0$, а затем при $p_0 = \text{const}$ нагружается чистым сдвигом в плоскости ox_1x_3 . При $\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}=p_0$, $\sigma_{12}=\sigma_{23}=0$ из (3.1), (3.2) следует

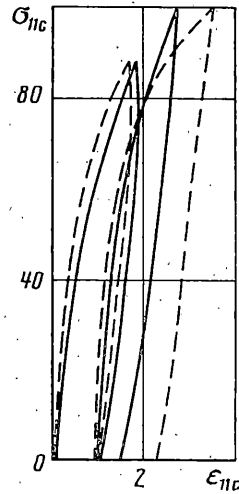
$$\begin{aligned} d\varepsilon_{11}/d\xi &= B_1 p_0 / (1 + \beta\xi), \quad d\varepsilon_{33}/d\xi = B_2 p_0 / (1 + \beta\xi) \\ d\sigma_{13}/d\xi + \alpha_4 \sigma_{13} / (1 + \beta\xi) &= G_2 d\gamma_{13}/d\xi \\ R(d\varepsilon_{11}/d\xi)^2 + R_{12}(d\gamma_{13}/d\xi)^2 &= 1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь G_2 — модуль сдвига в плоскости ox_1x_3 . Начальные условия имеют вид: $\xi = \xi_0$, $p = p_0$, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{10}$, $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{30}$, $\sigma_{13} = 0$, $\gamma_{13} = 0$. Величины p_0 , ε_{10} , ε_{30} вычисляются по (3.6) при $\xi = \xi_0$. После интегрирования получим

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{10} + \frac{B_1 p_0}{\beta} \ln \frac{1 + \beta\xi}{1 + \beta\xi_0}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{30} + \frac{B_2 p_0}{\beta} \ln \frac{1 + \beta \xi}{1 + \beta \xi_0} \quad (3.8)$$

$$\gamma_{13} = \sqrt{\frac{R}{R_{22}}} \frac{B_1 p_0}{\beta} \left(\arcsin \frac{\sqrt{R} B_1 p_0}{1 + \beta \xi} - \arcsin \frac{\sqrt{R} B_1 p_0}{1 + \beta \xi_0} \right) + \frac{1}{\beta \sqrt{R_{22}}} \left[\left((1 + \beta \xi)^2 - R B_1^2 p_0^2 \right)^{1/2} - \left((1 + \beta \xi_0)^2 - R B_1^2 p_0^2 \right)^{1/2} \right]$$

$$\sigma_{13} = \frac{G_2}{\sqrt{R_{22}}} (1 + \beta \xi)^{-\alpha_4/\beta} \int_{\xi_0}^{\xi} (1 + \beta \xi')^{\alpha_4/\beta - 1} \left[(1 + \beta \xi')^2 - R B_1^2 p_0^2 \right]^{1/2} d\xi'$$

Из (3.8) следует, что при $\xi = \xi_0$ $d\sigma_{13}/d\gamma_{13} = G_2$ для всех значений p_0 . При сдвиговом деформировании происходит изменение объема. Зависимость $\sigma_{13} = f(\gamma_{13}, p_0)$ является четной относительно p_0 .

4. Для ортотропной среды в декартовой прямоугольной системе координат, оси которых совпадают с осями симметрии среды, определяющие уравнения (2.1) запишем в матричном виде

$$\sigma = \int_0^z C(z-z') \frac{d\varepsilon}{dz'} dz' \quad (4.1)$$

где $\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23})^T$, $\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23})^T$ — векторы напряжений и деформации соответственно. Для квадратичной формы (2.2) имеем

$$d\xi^2 = R_{11}(d\varepsilon_{11})^2 + R_{22}(d\varepsilon_{22})^2 + R_{33}(d\varepsilon_{33})^2 + 2R_{12}d\varepsilon_{11}d\varepsilon_{22} + 2R_{13}d\varepsilon_{11}d\varepsilon_{33} + 2R_{23}d\varepsilon_{22}d\varepsilon_{33} + R_{44}(d\gamma_{12})^2 + R_{55}(d\gamma_{13})^2 + R_{66}(d\gamma_{23})^2. \quad (4.2)$$

Матрицу $C(z)$ зададим следующим образом

$$C(z) = C_1 + e^{-Az} C_2 \quad (4.3)$$

где $C_1 + C_2 = E$, $A = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$. При $C_1 = 0$, $C_2 = E$ следуют уравнения из [25].

Применим (4.1)–(4.2) для описания неупругих свойств тонких слоистых анизотропных материалов. Считаем, что элементарный слой материала (монослой) является сплошным ортотропным телом при плоском напряженном состоянии ($\sigma_{13}=\sigma_{23}=\sigma_{33}=0$). Все слои, образующие материал, деформируются совместно [26]. Пренебрегая деформациями в направлении оси ox_3 , запишем определяющие уравнения монослоя в приращенных

$$d\sigma^0 = E^0 d\varepsilon^0 - A^0 \psi dz \quad (4.4)$$

где $\psi = \sigma^0 - C_1^0 \varepsilon^0$. Здесь $\sigma^0 = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})^T$, $\varepsilon^0 = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12})^T$ – векторы напряжений и деформаций соответственно, $A^0 = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4)$

$$E^0 = \begin{bmatrix} E_1' & \nu_{21} E_1' & 0 \\ \nu_{12} E_2' & E_2' & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}$$

где $E_1' = E_1 / (1 - \nu_{12} \nu_{21})$, $E_2' = E_2 / (1 - \nu_{12} \nu_{21})$; E_1 , E_2 , G_{12} , ν_{12} , ν_{21} – модули упругости и коэффициенты Пуассона ортотропного монослоя. Согласно (4.2) имеем

$$d\varepsilon^0 = R_{11} (d\varepsilon_{11})^2 + R_{22} (d\varepsilon_{22})^2 + 2R_{12} d\varepsilon_{11} d\varepsilon_{22} + R_{44} (d\gamma_{12})^2 \quad (4.5)$$

Для слоистых материалов, состоящих из n монослоев, каждый из которых характеризуется углом укладки φ_i и толщиной h_i (i – номер слоя, $i=1, 2, \dots, n$), уравнения примут вид

$$d\sigma_c = B d\varepsilon_c - d\kappa \quad (4.6)$$

где $\sigma_c = (\sigma_{11c}, \sigma_{22c}, \sigma_{12c})^T$ – вектор средних напряжений, $\varepsilon_c = (\varepsilon_{11c}, \varepsilon_{22c}, \gamma_{12c})^T$ – вектор деформаций слоистого материала

$$B = \sum_{i=1}^n E_i' \delta_i, \quad d\kappa = \sum_{i=1}^n A_i' \psi_i' \delta_i dz$$

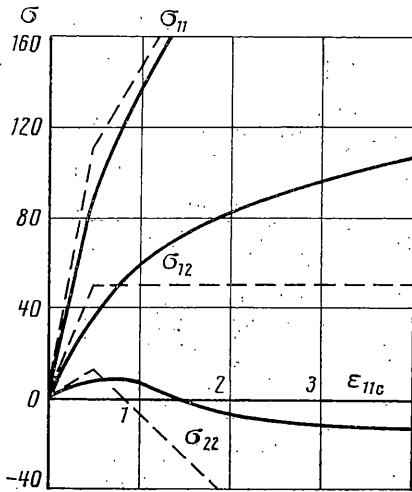
$$\psi_i' = \sigma_i' - C_{1i}' \varepsilon_i', \quad \delta_i = h_i / \sum_{i=1}^n h_i$$

Компоненты матриц E_i' , C_{1i}' , A_i' , векторов σ_i' , ε_i' определяются из E^0 , C_1^0 , A^0 , σ^0 , ε^0 по формулам преобразования при повороте осей системы координат на угол φ_i вокруг оси ox_3 . Уравнение (4.6) удобно интегрировать численно [25].

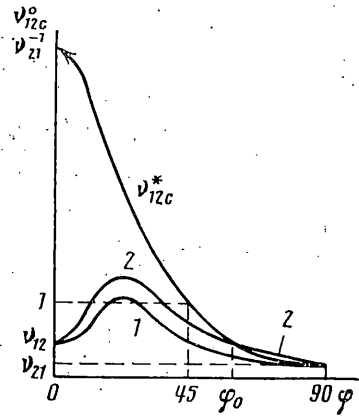
На фиг. 2 приведены теоретическая и экспериментальная диаграммы для слоистого стеклопластика с углами укладки $\varphi = \pm 45^\circ$ при повторном нагружении. Сплошной линией обозначена теоретическая кривая, рассчитанная по (4.6), штриховой – экспериментальная кривая, заимствованная из [27]. На фиг. 3 для стеклопластика при $\varphi = \pm 40^\circ$ в случае одноосного растяжения сплошными линиями показаны графики напряжений σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} , действующих в монослое, в зависимости от деформации ε_{11c} . Штриховыми линиями нанесены кривые, рассчитанные по модели нелинейного деформирования слоистых композитов, изложенной в [26]. Как видно, обе модели дают качественно одинаковые результаты, предсказывая сложное нагружение монослоя и знакопеременное деформирование вдоль направления ox_2 . При расчетах предполагалось, что монослой вдоль направления ox_1 (совпадающего с направлением укладки волокон) деформируется упруго. Поэтому принималось

$$d\varepsilon^0 = R_{22} (d\varepsilon_{22})^2 + R_{44} (d\gamma_{12})^2, \quad (4.7)$$

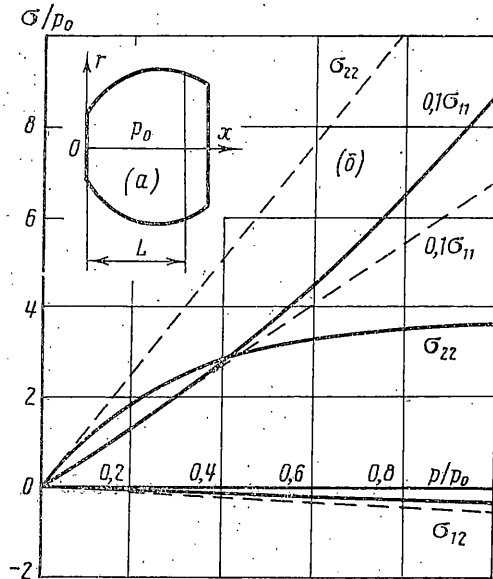
$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha.$$



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Как правило, для большинства материалов $\alpha \gg 1$.

Уместно отметить, что для ортотропных неупругих материалов при $\sigma_{11} = \sigma_{22} = p$, $\sigma_{12} = 0$ из (4.4) можно получить равенства, аналогичные (3.6). Такой характер деформирования подтвержден экспериментально в [27], где для стеклопластиков в зависимости от укладки волокон получены либо кривые типа 1, либо кривые типа 2 (см. фиг. 1).

Исследуем характер изменения коэффициентов Пуассона слоистых анизотропных материалов. Записывая (4.4) в интегральном виде при $C_1^0 = 0$ и принимая (4.7), для материалов с углами укладки $\pm\varphi$ при одноосном растяжении с помощью интегрального преобразования Лапласа получим

$$\varepsilon_{22c} = - \int_0^z \nu_{12c}(z-z') \frac{d\varepsilon_{11c}}{dz'} dz' \quad (4.8)$$

$$\nu_{12c}(z) = \nu_{12c} [t/l + (1-t/l)e^{-\alpha l z}]$$

$$\nu_{12c}^0 = \frac{(E_1' + E_2' - 2E_1' \nu_{21} - 4G_{12}) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + E_1' \nu_{21}}{E_1' \sin^4 \varphi + 2(E_1' \nu_{21} + 2G_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + E_2' \cos^4 \varphi}$$

$$t = \frac{(E_1' \cos^2 \varphi + E_1' \nu_{21} \sin^2 \varphi) \sin^2 \varphi}{(E_1' + E_2' - 4G_{12} - 2E_1' \nu_{21}) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + E_1' \nu_{21}}$$

$$l = \frac{(E_1' \sin^2 \varphi + E_1' \nu_{21} \cos^2 \varphi) \sin^2 \varphi}{E_1' \sin^4 \varphi + 2(E_1' \nu_{21} + 2G_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + E_2' \cos^4 \varphi}$$

Отсюда следует, что при развитых деформациях коэффициент Пуассона, определенный как $\nu_{12c} = |\varepsilon_{22c}/\varepsilon_{11c}|$, стремится к асимптотическому значению

$$\nu_{12c}^* = (\cos^2 \varphi + \nu_{21} \sin^2 \varphi) / (\sin^2 \varphi + \nu_{21} \cos^2 \varphi) \quad (4.9)$$

Формула (4.9) справедлива при $0^\circ < \varphi \leq 90^\circ$. На фиг. 4 приведены графики $\nu_{12c}^0 - \varphi$ и $\nu_{12c}^* - \varphi$. Кривая 1 имеет место при $0 < k \leq 4$, а кривая 2 — при $k > 4$, где $k = E_2/[G_{12}(1 + \nu_{21})]$. Отметим, что для материалов при $\varphi = \pm \varphi_0$ и $k > 4$ теория предсказывает $\nu_{12c} = \text{const}$. Значение угла φ_0 находится из уравнения $\cos^2 \varphi_0 = 0,5 - (k-2)^{-1}$. Отметим, что в [28] было получено $\nu_{12c}^0 = \text{ctg}^2 \varphi$. Изложенный характер изменения коэффициентов Пуассона подтвержден экспериментально в [26, 27].

5. Рассмотрим способ численного анализа напряженно-деформированного состояния твердых тел. Пусть в декартовой прямоугольной системе координат для тела с объемом V , ограниченным поверхностью S , заданы граничные условия: при $S \in S_\sigma$ $\sigma \cdot n = t^0$, при $S \in S_u$ $u = u^0$, где t^0 — вектор поверхностных сил, u^0 — вектор заданных перемещений, n — единичный вектор внешней нормали в точке поверхности S_σ . На основании принципа возможных перемещений в положении равновесия имеем

$$\int_V f \cdot \delta u \, dv + \int_{S_\sigma} t^0 \cdot \delta u \, ds = \int_V \sigma \cdot \delta \varepsilon \, dv \quad (5.1)$$

где f — вектор объемных сил. Определяющие уравнения (2.8) запишем в приращениях

$$d\sigma = E \cdot d\varepsilon + h dz \quad (5.2)$$

$$h = \int_0^z C'(z-z') \dots \frac{d\varepsilon}{dz'} dz' \quad (5.3)$$

Переходя к конечно-элементной формулировке задачи, из (5.1) получим [26]:

$$\varphi = \int_V N^T f \, dv + \int_{S_\sigma} N^T t \, ds - \int_V B^T \sigma \, dv = 0 \quad (5.4)$$

причем $u = Nq$, $\varepsilon = Bq$. Здесь q — вектор узловых перемещений; σ , ε — векторы напряжений и деформаций соответственно; u — вектор перемещений; f , t — векторы заданных объемных и поверхностных сил соответственно.

Определяющие уравнения (5.2) представим в конечных разностях

$$\Delta \sigma_{(i)} = E \cdot \Delta \varepsilon_{(i)} + h_{(i-1)} \Delta z_i. \quad (5.5)$$

Решение нелинейной системы уравнений (5.4) с учетом (5.5) можно осуществить методом начальных напряжений [29]. Итерационная процедура на i -м шаге нагружения и l -й итерации записывается следующим образом

$$\Delta q_{(i)}^{(l)} = K^{-1} \psi_{(i)}^{(l-1)}, \quad \psi_{(i)}^{(l-1)} = g_{(i)} - \int_V B^T \sigma_{(i)}^{(l-1)} dv \quad (5.6)$$

где K — матрица жесткости системы, $g_{(i)} = \int_V N^T f_{(i)} dv + \int_{S_\sigma} N^T t_{(i)} ds$. При этом

$$f_{(i)} = f_{(i-1)} + \Delta f, \quad t_{(i)} = t_{(i-1)} + \Delta t, \quad \text{а также } q_{(i)}^{(l)} = q_{(i)}^{(l-1)} + \Delta q_{(i)}^{(l)}, \quad \sigma_{(i)}^{(l)} = \sigma_{(i)}^{(l-1)} + \Delta \sigma_{(i)}^{(l)}.$$

Вектор приращения напряжений вычисляется согласно (5.5). Особенностью данной процедуры является то, что она имеет место как при активном, так и при пассивном нагружениях неупругого тела. Матрица жесткости системы K формируется и обращается один раз. В [30] можно найти расчет изотропных оболочек вращения при осесимметричном нагружении по данному алгоритму и сравнение с результатами, полученными при помощи иных алгоритмов.

В качестве примера на фиг. 5 представлены результаты расчета подкрепленной кольцевым шпангоутом оболочки вращения с полюсными отверстиями различного диаметра, образованной намоткой волокнистых полимерных материалов по негеодезическим линиям и нагруженной внутренним давлением p_0 . Использовались геометрически линейная теория оболочек Кирхгофа — Лява, кольцевой оболочечный конечный элемент [26]; в качестве определяющего уравнения применялась зависимость (4.6) с учетом (4.7). На фиг. 5 σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} обозначают напряжения, действующие в монослое на внешней поверхности оболочки при $x=L$; сплошной линией показаны результаты нелинейного, а штриховой — линейного анализа. Отметим, что действующие вдоль направления укладки волокон напряжения σ_{11} , рассчитанные по нелинейной теории, превышают напряжения σ_{11} , определенные по линейным зависимостям. Таким образом, учет физической нелинейности при расчете оболочек вращения, образованных намоткой волокнистых материалов, приобретает актуальное значение, так как именно напряжения, действующие вдоль волокон, определяют несущую способность конструкций данного типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
2. Rees D. W. A. An examination of yield surface distortion and translation // Acta Mech. 1984. V. 52. No. 1/2. P. 15–40.
3. Косарчук В. В., Ковальчук Б. И., Лебедев А. А. Теория пластического течения анизотропных сред: Сообщ. I. Определяющие соотношения // Проблемы прочности. 1986. № 4. С. 50–57.
4. Shih C. F., Lee D. Further development in anisotropic plasticity // Trans. ASME. J. Eng. Mater. and Technol. 1978. V. 100. No. 3. P. 294–302.
5. Dafalias Y. F. Anisotropic hardening of initially orthotropic materials // ZAMM. 1979. Bd. 59. H. 9. P. 437–446.
6. Gotoh M. A theory of plastic anisotropy based on a yield function of fourth order // Intern. J. Mech. Sci. 1977. V. 19. No. 9. P. 505–512.
7. Spencer A. J. M. The formulation of constitutive equation for anisotropic solids // Colloq. Intern. CNRS. 1982. No. 295. P. 2–26.
8. Победра В. Е. Деформационная теория пластичности анизотропных сред // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 1. С. 29–37.

9. *Кравчук А. С.* О теории пластичности анизотропных материалов // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1986. Т. 29. С. 21–29.
10. *Кадашевич Ю. И., Мосолов А. Б.* Эндохронные теории пластичности: Основные положения, перспективы развития // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 161–168.
11. *Димариев О. Ю., Мосолов А. Б.* О виде функционала пластичности в эндохронных теориях неупругости // ПИММ. 1989. Т. 53. Вып. 2. С. 319–332.
12. *Valanis K. C.* A theory of viscoplasticity without a yield surface // Arch. Mech. 1971. V. 23. No. 4. P. 517–551.
13. *Valanis K. C.* Fundamental consequences of a new intrinsic time measure: Plasticity as a limit of the endochronic theory // Arch. Mech. 1980. V. 32. No. 2. P. 171–191.
14. *Клюшников В. Д.* Аналитическая теория пластичности // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 2. С. 82–87.
15. *Клюшников В. Д.* Устойчивость упруго-пластических систем. М.: Наука, 1980. 240 с.
16. *Клюшников В. Д.* Дефекты эндохронной теории пластичности // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 176–178.
17. *Vackhaus G.* Zur analytischen Erfassung des allgemeinen Bauschinger-effektes // Acta Mech. 1972. V.14. No. 1. P. 31–42.
18. *Ишлинский А. Ю.* Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. мат. ж. 1954. Т. 6. № 3. С. 314–325.
19. *Прагер В.* Новый метод анализа напряжений и деформаций в пластических телах, обладающих упрочнением // Механика. Период. сб. перев. и обзоров иностр. период. ж-в. 1957. № 5. С. 123–129.
20. *Циглер Г.* Видоизменение закона упрочнения, предложенного Прагером // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1960. № 2. С. 85–95.
21. *Зиновьев П. А., Сарбаев Б. С.* Способ описания неупругого поведения композиционных материалов // Изв. вузов. Машиностроение. 1982. № 7. С. 7–12.
22. *Pindera M. J., Herakovich S. T.* An endochronic model for response of unidirectional composites under off-axis tensile load // Mechanics of composite materials. Recent advances. New York, 1983. P. 367–381.
23. *Кадашевич Ю. И., Михайлов А. Н.* О теории пластичности, не имеющей поверхности-текучести // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254. № 3. С. 574–576.
24. *Мосолов А. Б.* Единственность в малом и устойчивость в одном варианте теории пластичности // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1980. № 6. С. 84–86.
25. *Сарбаев Б. С.* О неупругом поведении слоистых стеклопластиков // Изв. вузов. Машиностроение. 1984. № 4. С. 6–10.
26. *Алфугов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г.* Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 263 с.
27. *Зиновьев П. А., Тараканов А. И., Фомин Б. Я.* Деформирование и разрушение композиционных материалов при двухосном растяжении // Сб. тр. МВТУ им. Баумана: Применение пластмасс в машиностроении. 1982. № 19. С. 33–58.
28. *Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А.* Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1977. 144 с.
29. *Zienkiewicz O. C., Valliappan S., King I. P.* Elasto-plastic solutions of engineering problems «Initial-stress», finite element approach // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1969. V. 1. No. 1. P. 75–100.
30. *Сарбаев Б. С.* Расчет оболочек вращения с учетом физической нелинейности // Изв. вузов. Машиностроение. 1984. № 6. С. 20–24.

Москва

Поступила в редакцию
16.V.1988.