

УДК 539.374

© 1991 г.

С. Г. ПШЕНИЧНОВ

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ
КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ**

Известные аналитические исследования нестационарных задач динамики линейно-вязкоупругих кусочно-однородных тел даже в одномерном случае, как правило, представляют собой приближенные решения либо для весьма ограниченного диапазона времени, либо при небольшой вязкости (см., например, [1-3]). Точные решения таких задач получены лишь при существенно упрощающих предположениях, например для многослойного полупространства периодической структуры, в котором вязкость характеризуется лишь одной функцией, одинаковой для всех слоев [4].

В предлагаемой работе проводится аналитическое исследование одномерных нестационарных задач динамики линейно-вязкоупругих кусочно-однородных тел — бесконечного цилиндра, сферы и слоя. К исходной системе применяется преобразование Лапласа по времени и исследуются свойства решения в изображениях. В случае экспоненциальных ядер точное решение в оригиналах, справедливое в любом диапазоне времени как при малой, так и при большой вязкости, представлено в виде рядов по собственным функциям соответствующей задачи о свободных колебаниях. Статья является обобщением подхода [5, 6] на случай линейной вязкоупругости.

1. Постановка задачи и применение преобразования Лапласа. Рассмотрим следующие N -компонентные тела: бесконечно длинный полый круговой цилиндр и полуку сферу, на внешнюю и внутреннюю поверхности которых в момент $t=0$ действуют равномерно распределенные нагрузки $P(t)$ и $Q(t)$ соответственно, а также слой, одна из границ которого в момент $t=0$ подвержена воздействию равномерной нагрузки $Q(t)$, а другая жестко заделана. Для цилиндра и сферы ось X направим по радиусу соответствующей цилиндрической или сферической системы координат, а для слоя — перпендикулярно нагруженной границе в глубь материала. Равенства $X=X_0$, $X=X_N$, $X=X_m$, $m=1, 2, \dots, N-1$ определяют внешние границы и границы раздела однородных компонент указанных тел, $X_0 < X_1 < \dots < X_N$ ($X_0=0$ для слоя). Обозначим $v^{(n)}(X, t)$ — перемещение вдоль оси X , $P_\alpha^{(n)}(X, t)$, $\alpha=1, 2, 3$ — ненулевые физические компоненты тензора напряжений в n -м участке однородности ($n=1, 2, \dots, N$). Для цилиндра и сферы $P_1^{(n)}$, $P_2^{(n)}$ — радиальное и кольцевое напряжения; для сферы и слоя $P_2^{(n)} \equiv P_3^{(n)}$.

Введем безразмерные величины ($n=1, 2, \dots, N$):

$$u^{(n)}(x, \tau) = v^{(n)}(X, t)/X_N, \quad \sigma_\alpha^{(n)}(x, \tau) = P_\alpha^{(n)}(X, t)/2G_n^{(0)} \quad (\alpha=1, 2, 3)$$

$$x = X/X_N, \quad \tau = t/t_N, \quad t_N = X_N/c_N, \quad \alpha_n = c_N/c_n$$

$$W_n = (1 - \nu_n^{(0)}) / (1 - 2\nu_n^{(0)}), \quad P_0 f(\tau) = P(t)/2G_N^{(0)}, \quad Q_0 \varphi(\tau) = Q(t)/2G_1^{(0)}$$

$$a_n(\tau) = [(1 + \nu_n^{(0)})T_v^{(n)}(\tau) + 2(1 - 2\nu_n^{(0)})T_c^{(n)}(\tau)] / (3(1 - \nu_n^{(0)}))$$

$$d_n(\tau) = [(1 + \nu_n^{(0)})T_v^{(n)}(\tau) - (1 - 2\nu_n^{(0)})T_c^{(n)}(\tau)] / 3\nu_n^{(0)}$$

$$T_v^{(n)}(\tau) = t_N \Gamma_v^{(n)}(t), \quad T_c^{(n)}(\tau) = t_N \Gamma_c^{(n)}(t)$$

где $G_n^{(0)}, v_n^{(0)}$ — мгновенные значения модуля сдвига и коэффициента Пуассона, c_n — скорость продольных упругих волн, $\Gamma_v^{(n)}, \Gamma_c^{(n)}$ — разностные ядра объемной и сдвиговой релаксации, соответствующие n -му участку однородности.

Безразмерные уравнения динамики для n -й однородной компоненты цилиндра ($M=1$), сферы ($M=2$) и слоя ($M=0$) примут вид ($n=1, 2, \dots, \dots, N$):

$$(1 - \mathbf{a}_n) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u^{(n)}(x, \tau)}{\partial x} + M \frac{u^{(n)}(x, \tau)}{x} \right] - \alpha_n^2 \frac{\partial^2 u^{(n)}(x, \tau)}{\partial \tau^2} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь и далее выделенная жирным шрифтом переменная обозначает вязкоупругий интегральный оператор с соответствующим ядром, а единица — единичный оператор, например

$$(1 - \mathbf{a}_n) u^{(n)}(x, \tau) = u^{(n)}(x, \tau) - \int_0^\tau a_n(\tau - \xi) u^{(n)}(x, \xi) d\xi$$

Начальные условия примем нулевыми, граничные условия и условия на контакте однородных компонент будут ($m=1, 2, \dots, N-1$):

$$\sigma_1^{(1)}(x_0, \tau) = -Q_0 \varphi(\tau), \quad \tau > 0, \quad x_0 = X_0/X_N \quad (1.2)$$

$$u^{(N)}(1, \tau) = 0 \quad (M=0), \quad \sigma_1^{(N)}(1, \tau) = -P_0 f(\tau), \quad \tau > 0 \quad (M=1, 2)$$

$$u^{(m)}(x_m, \tau) = u^{(m+1)}(x_m, \tau), \quad G_m^{(0)} \sigma_1^{(m)}(x_m, \tau) = G_{m+1}^{(0)} \sigma_1^{(m+1)}(x_m, \tau), \quad x_m = X_m/X_N$$

Соотношения для напряжений имеют вид ($n=1, 2, \dots, N$):

$$\sigma_1^{(n)} = W_n (1 - \mathbf{a}_n) \partial u^{(n)} / \partial x + M (W_n - 1) (1 - \mathbf{d}_n) u^{(n)} / x \quad (M=0, 1, 2)$$

$$\sigma_2^{(n)} = \sigma_3^{(n)} = (W_n - 1) (1 - \mathbf{d}_n) \partial u^{(n)} / \partial x \quad (M=0) \quad (1.3)$$

$$\sigma_2^{(n)} = \sigma_3^{(n)} = (W_n - 1) (1 - \mathbf{d}_n) \partial u^{(n)} / \partial x + [W_n (1 - \mathbf{a}_n) + (W_n - 1) (1 - \mathbf{d}_n)] u^{(n)} / x \quad (M=2)$$

$$\sigma_2^{(n)} = (W_n - 1) (1 - \mathbf{d}_n) \partial u^{(n)} / \partial x + W_n (1 - \mathbf{a}_n) u^{(n)} / x$$

$$\sigma_3^{(n)} = (W_n - 1) (1 - \mathbf{d}_n) (\partial u^{(n)} / \partial x + u^{(n)} / x) \quad (M=1)$$

После применения к (1.1)–(1.3) интегрального преобразования Лапласа ($\tau \Rightarrow s$, $f(\tau) \Rightarrow F(s)$, $\varphi(\tau) \Rightarrow \Phi(s)$, $u^{(n)}(x, \tau) \Rightarrow U^{(n)}(x, s)$, $\sigma_\alpha^{(n)}(x, \tau) \Rightarrow S_\alpha^{(n)}(x, s)$, $a_n(\tau) \Rightarrow A_n(s)$, $d_n(\tau) \Rightarrow D_n(s)$) будем иметь

$$U^{(n)}(x, s) = C_1^{(n)}(s) f_1(y_n) + C_2^{(n)}(s) f_2(y_n), \quad y_n = x \beta_n^{1/2},$$

$$\beta_n^{1/2} = \frac{s \alpha_n}{(1 - A_n(s))^{1/2}}, \quad n=1, 2, \dots, N$$

причем $f_1(y) = e^y$, $f_2(y) = e^{-y}$ при $M=0$; $f_1(y) = I_1(y)$, $f_2(y) = K_1(y)$ при $M=1$ и $f_1(y) = d(y^{-1} \operatorname{sh} y) / dy$, $f_2(y) = d(y^{-1} e^{-y}) / dy$ при $M=2$, где I_1, K_1 — модифицированные функции Бесселя 1 и 2 рода первого индекса.

Определив C_1^n, C_2^n из преобразованных условий (1.2), получим

$$U^{(n)}(x, s) = -[P_0 F(s) Y_1^{(n)}(x, s) + Q_0 \Phi(s) Y_2^{(n)}(x, s)] / Z_1(s), \quad n=1, 2, \dots, N \quad (1.4)$$

$$Y_1^{(n)} = \xi_{p1}^{(n)} f_p(y_n) \lambda_n / (\lambda_N \beta_N^{1/2}), \quad Y_2^{(n)} = [Z_1 \xi_{p2}^{(n)} f_p(y_n) - Z_2 \xi_{p1}^{(n)} f_p(y_n)] \lambda_n / (\xi_{21}^{(1)} \beta_1^{1/2})$$

$$\xi_{j1}^{(1)} = (-1)^j [W_1 (1 - A_1) f_j'(b_2^{(0)}) + M (W_1 - 1) (1 - D_1) f_j'(b_2^{(0)}) / b_2^{(0)}], \\ M = 0, 1, 2$$

$$\xi_{j2}^{(1)} = \delta_{ij}, \quad \xi_{jk}^{(m+1)} = \eta_{jp}^{(m)} \xi_{pk}^{(m)}, \quad \eta_{jk}^{(m)} = (-1)^{j-1} [f_k(b_1^{(m)}) \psi_{2j'}^{(m)} - f_j'(b_2^{(m)}) \psi_{1k}^{(m)}] \\ \psi_k^{(m)} = \frac{G_m^{(0)} \beta_{m'}^{1/2}}{G_{m+1}^{(0)} \beta_{m+1}^{1/2}} \left[W_{m'} (1 - A_{m'}) f_k'(b_j^{(m)}) + M (W_{m'} - 1) (1 - D_{m'}) \frac{f_k(b_j^{(m)})}{b_j^{(m)}} \right] \\ M = 0, 1, 2$$

$$b_j^{(m)} = x_m \beta_{m'}^{1/2}, \quad b_2^{(0)} = x_0 \beta_1^{1/2}, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_n = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n-1} \quad (n > 1)$$

$Z_j = \xi_{pj}^{(N)} H_p$, причем $H_j = f_j(\beta_N^{1/2})$ для $M=0$ и $H_j = W_N (1 - A_N) f_j'(\beta_N^{1/2}) + M (W_N - 1) (1 - D_N) f_j(\beta_N^{1/2}) \beta_N^{-1/2}$ для $M=1, 2$; $\mu_m = -[2W_{m+1} (1 - A_{m+1})]^{-1}$ при $M=0$ и $\mu_m = (-b_2^{(m)})^M [W_{m+1} (1 - A_{m+1})]^{-1}$ при $M=1, 2$. В приведенных выражениях $j' = 1 + \delta_{ij}$, $m' = m + j - 1$, $j, k, p = 1, 2, m = 1, 2, \dots, N-1$; здесь и далее по повторяющемуся индексу p — суммирование, δ_{kj} — символ Кронекера, $f_j'(y)$ означает $df_j(y)/dy$.

С помощью матриц $\pi_{jk}^{(1)} = \delta_{jk}$, $\pi_{jk}^{(m+1)} = \pi_{jp}^{(m)} \eta_{pk}^{(N-m)}$, $j, k, p = 1, 2, m = 1, 2, \dots, N-1$, в результате выполнения тождеств $\xi_{jk}^{(N)} = \pi_{jp}^{(n')} \xi_{pk}^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots, N, n' = N - n + 1$) выражения $Y_2^{(n)}$ и Z_1 представляются в удобной для асимптотических исследований форме ($M = 0, 1, 2$):

$$Y_2^{(n)} = g_n \beta_n^{-1/2} [f_1(y_n) (H_1 \pi_{12}^{(n')} - H_2 \pi_{22}^{(n')}) - f_2(y_n) (H_1 \pi_{11}^{(n')} - H_2 \pi_{21}^{(n')})] \\ Z_1 = \xi_{21}^{(1)} (H_1 \pi_{12}^{(N)} - H_2 \pi_{22}^{(N)}) + \xi_{11}^{(1)} (H_1 \pi_{11}^{(N)} - H_2 \pi_{21}^{(N)}) \quad (1.5)$$

$$g_1 \equiv 1, \quad g_n = \frac{G_1^{(0)}}{G_n^{(0)}} (M - 2)^{n-1} [W_1 (1 - A_1) \beta_1^{-M/2} \dots \\ \dots W_{n-1} (1 - A_{n-1}) \beta_{n-1}^{-M/2}] \quad (n > 1)$$

Изображения $S_\alpha^{(n)}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) получаются из (1.3) формальной заменой операторов $1 - a_n, 1 - d_n$ на выражения $1 - A_n, 1 - D_n$, а также перемещений $u^{(n)}$ на изображения $U^{(n)}$.

2. Основные свойства изображений. Установим свойства функций $U^{(n)}, S_\alpha^{(n)}$ ($\alpha = 1, 2, 3$), рассматривая их на всей комплексной плоскости s . В выражениях (1.4), (1.5) входят радикалы $(1 - A_n)^{1/2}$ и, в случае цилиндра, модифицированные функции Бесселя с логарифмической особенностью. Тем не менее, справедливо

Утверждение 1. Если $F(s), \Phi(s), A_l(s), D_l(s), l = 1, 2, \dots, N$ однозначны на всей комплексной плоскости, то $U^{(n)}, S_\alpha^{(n)}, \alpha = 1, 2, 3, n = 1, 2, \dots, N$

также однозначны на всей комплексной плоскости s для $x_0 \leq x \leq 1$. При этом $Z_1(s) = \theta_N^{(M)}(s)Z(s)$, где $Z(s)$ — однозначна, $\theta_N^{(0)} \equiv 1$; $\theta_1^{(1)} \equiv 1$, $\theta_N^{(1)} = \beta_1^{1/2} \dots \beta_{N-1}^{1/2}$ ($N > 1$); $\theta_N^{(2)} = \beta_N^{1/2}$.

Доказательство основано на представлении f_1, f_2 в качестве комбинаций функций, разложение в степенной ряд которых содержит либо только четные, либо только нечетные степени аргумента, и логарифмической функции (в случае цилиндра). Подчеркнем, что утверждение справедливо для конечной области изменения x .

Выберем нагрузку в виде функции Хевисайда $f(\tau) = \varphi(\tau) = h(\tau)$. С помощью асимптотических исследований выражений (1.4), (1.5) установлено, что если $A_l(s_*) \neq 1$, $s_* \neq 0$ при $l=1, 2, \dots, N$ и $|A_k| + |D_k| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow s_*$ для некоторых $k, 1 \leq k \leq N$, то $|U^{(n)}|$ и $|S_\alpha^{(n)}|$, $\alpha=1, 2, 3$, $n=1, 2, \dots, N$ ограничены в достаточно малой окрестности s_* . Таким образом, кроме точек ветвления $A_l(s)$, $D_l(s)$ особыми точками $U^{(n)}$, $S_\alpha^{(n)}$ являются: $s=0$, нули $Z(s)$ и корни уравнения $1 - A_l(s) = 0$.

Корни $s_z^{(\beta)}$ уравнения $Z(s) = 0$ определяют комплексные собственные частоты $(-i)s_z^{(\beta)}$ колебаний соответствующего кусочно-однородного тела с ненагруженными границами (по истечении такого времени от начала колебаний, когда характер их затухания уже не зависит от причины их возникновения), поэтому если не все N составляющих тела линейно-упругие, то, вследствие диссипации, $\text{Re}(s_z^{(\beta)}) < 0$ для всех $s_z^{(\beta)}$, в противном случае все $s_z^{(\beta)}$ чисто мнимые. Согласно свойствам вязкоупругих ядер [7], отличные от нуля корни уравнений $1 - A_n(s) = 0$ имеют строго отрицательную действительную часть ($A_n(0) = 1$ при неограниченной ползучести n -й компоненты тела). Таким образом, если хотя бы одна составляющая тела вязкоупругая, точки ветвления A_l, D_l (если они есть) лежат слева от мнимой оси и, кроме того, ползучесть всех вязкоупругих составляющих ограничена, то при $f(\tau) = \varphi(\tau) = h(\tau)$

$$u^{(n)}(x, \tau) = 0,5u_0^{(n)}(x) + \pi^{-1} \int_0^\infty \text{Re}[U^{(n)}(x, i\omega)e^{i\omega\tau}]d\omega, \quad \tau > 0, \quad n=1, 2, \dots, N \quad (2.1)$$

где $u_0^{(n)}(x)$ — установившееся при $\tau \rightarrow \infty$ решение соответствующей статической задачи для $f(\tau) \rightarrow 1$, $\varphi(\tau) \rightarrow 1$ при $\tau \rightarrow \infty$. Представление (2.1) получается трансформированием контура Бромвича на мнимую ось $s = i\omega$ с обходом точки $s=0$ справа и с учетом $U^{(n)}(x, \bar{s}) = \overline{U^{(n)}(x, s)}$, а также $U^{(n)}(x, s) \approx u_0^{(n)}(x)/s$ при $s \rightarrow 0$ (в случае ограниченной ползучести всех вязкоупругих составляющих тела) и асимптотик $U^{(n)}(x, s)$ при $s = \chi + i\omega$, $0 \leq \chi \leq \chi_0 < \infty$, $\omega \rightarrow \infty$. Напряжения $\sigma_\alpha^{(n)}$, $\alpha=1, 2, 3$ для $\tau > 0$ представляются в форме, аналогичной (2.1) через $S_\alpha^{(n)}(x, s)$ и соответствующие установившиеся статические напряжения $S_{0\alpha}^{(n)}(x)$. Решение для других $f(\tau)$, $\varphi(\tau)$ определяется с помощью сверток.

3. Решение задачи для случая экспоненциальных ядер. Рассмотрим класс E функций вида $\sum \epsilon_\lambda \exp(-p_\lambda \tau)$, где $\epsilon_\lambda, p_\lambda$ — константы, $p_\lambda > 0$, $\lambda=1, 2, \dots, J$ (число J конечно, но нефиксировано). Выберем $T_v^{(n)}, T_c^{(n)}$ из этого класса

$$T_v^{(n)}(\tau) = \sum_{\lambda=1}^{J_v^{(n)}} \gamma_v^{(n\lambda)} \exp(-q_v^{(n\lambda)}\tau), \quad T_c^{(n)}(\tau) = \sum_{r=1}^{J_c^{(n)}} \gamma_c^{(nr)} \exp(-q_c^{(nr)}\tau) \quad (3.1)$$

с учетом выполнения неравенств

$$0 \leq \sum_{\lambda=1}^{J_v^{(n)}} \gamma_v^{(n\lambda)} / q_v^{(n\lambda)} < 1, \quad 0 \leq \sum_{r=1}^{J_c^{(n)}} \gamma_c^{(nr)} / q_c^{(nr)} < 1, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

что соответствует ограниченной ползучести всех компонент тела, причем $A_n(0) \neq 1$, $n=1, 2, \dots, N$. Как известно [8], такая аппроксимация ядер при исследовании волновых процессов в вязкоупругих материалах вполне оправдана. Покажем, что в случае ядер (3.1) при некотором ограничении решение в оригиналах представляется в виде рядов по собственным функциям соответствующей задачи о свободных колебаниях.

Пусть $f(\tau) = \varphi(\tau) = h(\tau)$, тогда $U^{(n)}$ и $S_\alpha^{(n)}$ однозначны согласно утверждению 1. Однозначная функция $Z(s)$ аналитична на всей комплексной плоскости за исключением малых окрестностей точек $s = -q_v^{(n)}$, $s = -q_c^{(nr)}$ (полосов A_n, D_n), точки $s=0$ и корней уравнений $1 - A_n = 0$, $n=1, 2, \dots, N$. Как показывает асимптотический анализ при $s \rightarrow s_{nq}$, каждый q -й корень s_{nq} уравнения $1 - A_n = 0$, вообще говоря, является предельной точкой нулей $Z(s)$. Это следует из того, что при стремлении s к s_{nq} по определенному лучу величина $\beta_n^{1/s}$ неограниченно растет по модулю, оставаясь чисто мнимой и превращая уравнение $Z(s) = 0$ на этом луче в тригонометрическое уравнение с неизвестным $\beta_n^{1/s}/i$. Если известны все корни $1 - A_l(s) = 0$, $l=1, 2, \dots, N$, являющиеся корнями полиномов степени не выше $J_c^{(l)} + J_v^{(l)}$, то, учитывая, что $1 - A_n(s) \approx B_{nq}(s - s_{nq})^{m_{nq}}$ при $s \rightarrow s_{nq}$, где B_{nq} — константа, m_{nq} — натуральное число, указанный луч легко найти из условия $\operatorname{Re} \beta_n^{1/2} = 0$. Если все корни $1 - A_n = 0$ действительны и однократны, то таким лучом является действительная полуось справа (при $B_{nq} < 0$) или слева (при $B_{nq} > 0$) от s_{nq} , и точка s_{nq} является предельной для действительных нулей $Z(s)$. Таким образом, множество нулей $Z(s)$ не более чем счетно и не имеет предельных точек, кроме $s = s_{nq}$ и $s = \infty$.

Утверждение 2. Если ядра $T_v^{(n)}, T_c^{(n)}$ всех вязкоупругих компонент тела имеют вид (3.1) и $f(\tau) = \varphi(\tau) = h(\tau)$, то существует такая константа $\chi_* \gg 1$ и такая последовательность $\{\omega_k^*\}$ положительных чисел, $\omega_k^* \rightarrow \infty$ при $k' \rightarrow \infty$, что для определяемой ими последовательности непрерывных кривых $\{L_k\}$:

$$\lim_{k' \rightarrow \infty} \int_{L_{k'}} U^{(n)} e^{s\tau} ds = 0, \quad \lim_{k' \rightarrow \infty} \int_{L_{k'}} S_\alpha^{(n)} e^{s\tau} ds = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

при этом каждая $L_{k'}$ является объединением дуги окружности радиуса R_k с центром $s=0$, задаваемой неравенством $-R_k \leq \operatorname{Re}(s) \leq -\chi_*$, и двух отрезков, параллельных действительной оси, определяемых соотношениями $|\operatorname{Re}(s)| \leq \chi_*$, $\operatorname{Im}(s) = \pm \omega_k^*$, $\omega_k^* = (R_k^2 - \chi_*^2)^{1/2}$.

Доказательство основано на исследовании асимптотики выражений (1.4), (1.5) при $s \rightarrow \infty$.

Утверждение 3. Пусть ядра $T_v^{(n)}, T_c^{(n)}$ всех вязкоупругих компонент кучно-однородного тела имеют вид (3.1), пусть каждый q -й корень s_{lq} любого из уравнений $1 - A_l = 0$, $1 \leq l \leq N$ (для $A_l \neq 0$), $1 \leq q \leq J_l \leq J_v^{(l)} + J_c^{(l)}$ однократен и $F(s), \Phi(s)$ при $s \rightarrow s_{lq}$ имеют конечный предел. Тогда для

каждого s_{lq} , независимо от поведения A_k, D_p ($k, p=1, 2, \dots, N, k \neq l$) в точке $s=s_{lq}$, существует такая последовательность $\{O_{k'}^{(lq)}\}$ окружностей с радиусами $\rho_{k'}^{(lq)} \rightarrow 0$ при $k' \rightarrow \infty$ и центрами в точке $s=s_{lq}$, что

$$\lim_{k' \rightarrow \infty} \oint_{O_{k'}^{(lq)}} U^{(n)} e^{s\tau} ds = 0, \quad \lim_{k' \rightarrow \infty} \oint_{O_{k'}^{(lq)}} S_\alpha^{(n)} e^{s\tau} ds = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$n = 1, 2, \dots, N$$

причем порядок стремления к нулю интегралов не ниже $(\rho_{k'}^{(lq)})^{1/2}$.

Утверждение доказывается с помощью исследования асимптотик выражений (1.4), (1.5) при $s \rightarrow s_{lq}$.

Таким образом, с помощью формулы Меллина и теоремы о вычетах при ядрах (3.1) и условии однократности корней $1-A_l=0$ ($1 \leq l \leq N$) решение в случае $f(\tau)=\varphi(\tau)=h(\tau)$ представляется в виде

$$u^{(n)}(x, \tau) = \sum_{\delta=1}^{\infty} \text{Res}_{s_\delta} [U^{(n)} e^{s\tau}] + \sum_l \sum_{q=1}^{J_l} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \text{Res}_{s_{lq}^{(\gamma)}} [U^{(n)} e^{s\tau}] + \text{Res}_{s=0} [U^{(n)} e^{s\tau}],$$

$$n = 1, 2, \dots, N \quad (3.2)$$

где объединение непересекающихся множеств $\{s_\delta\}$ и $\{s_{lq}^{(\gamma)}\}$ есть множество $\{s^{(\beta)}\}$ корней уравнения $Z(s)=0$, причем $s_\delta \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow \infty$, и, кроме того, $s_{lq}^{(\gamma)} \rightarrow c_{lq}$ при $\gamma \rightarrow \infty$, $1 \leq l \leq N$ (для $A_l \neq 0$). Вычет функции $U^{(n)} e^{s\tau}$ в точке $s=0$ равен $u_0^{(n)}(x)$.

Установлено, что из-за наличия в (3.2) суммы, соответствующей $s_{lq}^{(\gamma)}$, вычислять напряжения, непосредственно используя (1.3) и (3.2), вообще говоря, нельзя (например, для $x=1$ при $T_v^{(N)} = T_c^{(N)}$), и напряжения следует находить по их изображениям. Выражения для $\sigma_\alpha^{(n)}$, $\alpha=1, 2, 3$ при $f(\tau)=\varphi(\tau)=h(\tau)$ получаются заменой в (3.2) $U^{(n)}$ на $S_\alpha^{(n)}$, при этом вычет функции $S_\alpha^{(n)} e^{s\tau}$ в точке $s=0$ равен $S_{0\alpha}^{(n)}(x)$.

Выделив в (3.2) слагаемые, соответствующие действительным корням r_v и учитывая сопряженность комплексных корней z_μ, \bar{z}_μ уравнения $Z(s)=0$, запишем ($n=1, 2, \dots, N$):

$$u^{(n)}(x, \tau) = 2 \sum_{\{z_\mu\}} \text{Re} \{ \text{Res}_{z_\mu} [U^{(n)} e^{s\tau}] \} + \sum_{\{r_v\}} \text{Res}_{r_v} [U^{(n)} e^{s\tau}] + u_0^{(n)}(x), \quad (3.3)$$

где $z_\mu = \chi_\mu + i\omega_\mu$, $\chi_\mu < 0$, $r_v < 0$, $\omega_\mu > 0$, причем легко показать, что все слагаемые второй суммы в (3.3) действительны. Используя однократность собственных частот, получим ($M=0, 1, 2$):

$$\text{Res}_{s=z^{(\beta)}} [U^{(n)} e^{s\tau}] = -e^{s_2^{(\beta)} \tau} [P_0 Y_1^{(n)}(x, s_2^{(\beta)}) + Q_0 Y_2^{(n)}(x, s_2^{(\beta)})] \left(\left(s \theta_N^{(M)} \frac{dZ}{ds} \right) \Big|_{s=s_2^{(\beta)}} \right)^{-1} \quad (3.4)$$

Аналогичные соотношения справедливы для напряжений при $f(\tau)=\varphi(\tau)=h(\tau)$. Выражения (3.2)–(3.4) являются разложением решения в ряд по собственным функциям задачи о свободных колебаниях соответствующего кусочно-однородного тела, причем если все компоненты тела линейно-упругие, то тройная сумма в (3.2) отсутствует, а все s_δ – мнимые.

При ступенчатом нагружении $h(\tau)$ ряды в (3.2), (3.3) для перемещений сходятся равномерно в области $x_0 \leq x \leq 1$, $\tau \geq 0$. Для напряжений равномерная сходимость рядов, соответствующих $\{s_\delta\}$ в (3.2), нарушается в малых окрестностях фронтов волн, и в качестве значения напряжения на

фронте следует брать соответствующий односторонний предел при стремлении τ к τ_f — моменту прихода фронта в данную точку. Несмотря на это, равномерно сходящиеся в области $x_0 \leq x \leq 1$, $\tau \geq 0$ ряды для напряжений при непрерывных на $(0, \infty)$ функциях $f(\tau)$, $\varphi(\tau)$ в случае, если $f(\tau) \rightarrow 0$, $\varphi(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow +\infty$, могут быть построены свертками с использованием выражений для напряжений при $f(\tau) = \varphi(\tau) = h(\tau)$. Заметим также, что все изначальные построения можно провести не для ступенчатой нагрузки $h(\tau)$, а для $f(\tau) = \varphi(\tau) = 1 - e^{-\xi\tau}$, $\xi > 0$. Соответствующие перемещения и напряжения представляются равномерно сходящимися в области $x_0 \leq x \leq 1$, $\tau \geq 0$ рядами, при этом к слагаемым в (3.2), (3.3) добавляется вычит в точке $s = -\xi$, так как $F(s) = \Phi(s) = \xi / (s(s+\xi))$. С помощью такого решения, выбирая $\xi \gg 1$, можно аппроксимировать напряжения для ступенчатой нагрузки $h(\tau)$, а также соответствующими свертками строить напряжения для других $f(\tau)$, $\varphi(\tau)$.

4. Численная реализация аналитического решения. Формулы (3.2) — (3.4) легко реализуются на ЭВМ, когда известны z_n и r_n , искать которые наиболее удобно, если все корни s_{nq} уравнений $1 - A_n = 0$ ($A_n \neq 0$) не только однократны, но и действительны, а, следовательно, являются предельными точками для действительных r_n , т. е. $\{r_n\} = \{s_{nq}^{(p)}\}$. Численный поиск r_n достаточно прост, комплексные же z_n можно найти методом итераций, взяв в качестве нулевого приближения чисто мнимые нули $Z(s)$ соответствующей упругой задачи. Как показали расчеты, даже при очень большой вязкости, когда динамический процесс полностью затухает при $\tau \sim 10$, использование метода итераций Ньютона требует всего 3–10 итераций.

Укажем достаточные условия того, чтобы для ядер релаксации (3.4) все корни s_{nq} уравнений $1 - A_n = 0$ были действительными и однократными, заметив, что эти условия предполагают первоначальное знание ядер ползучести, а не релаксации, как считалось ранее. Обозначим $K_v^{(n)}(\tau)$, $K_c^{(n)}(\tau)$, $K_a^{(n)}(\tau)$ соответственно резольвенты ядер $T_v^{(n)}(\tau)$, $T_c^{(n)}(\tau)$, $a_n(\tau)$, и пусть

$$K_v^{(n)}(\tau) = \sum_{\lambda=1}^{J_v^{(n)}} \varepsilon_v^{(n\lambda)} \exp(-p_v^{(n\lambda)}\tau), \quad K_c^{(n)}(\tau) = \sum_{r=1}^{J_c^{(n)}} \varepsilon_c^{(nr)} \exp(-p_c^{(nr)}\tau) \quad (4.1)$$

где все константы $\varepsilon_v^{(n\lambda)}$, $\varepsilon_c^{(nr)}$, $p_v^{(n\lambda)}$, $p_c^{(nr)}$ ($n=1, 2, \dots, N$) положительны.

При этом, как известно [7], $T_v^{(n)}$, $T_c^{(n)}$ можно найти и они имеют вид (3.4), причем $q_v^{(n\lambda)} = p_v^{(n\lambda')}$, $q_c^{(nr)} = p_c^{(nr')}$, $\lambda, \lambda' = 1, 2, \dots, J_v^{(n)}$, $r, r' = 1, 2, \dots, J_c^{(n)}$. Ясно, что все s_{nq} действительны и однократны, если $K_a^{(n)}$ принадлежит введенному выше классу E.

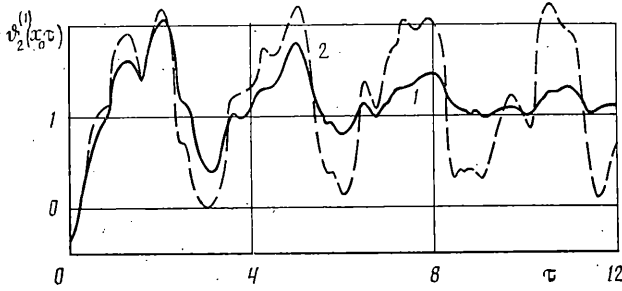
Утверждение 4. Пусть ядра ползучести $K_v^{(n)}$, $K_c^{(n)}$ имеют вид (4.1).

Тогда если $p_v^{(n\lambda)} \neq p_c^{(nr)}$ ($\lambda=1, 2, \dots, J_v^{(n)}$, $r=1, 2, \dots, J_c^{(n)}$), то $K_a^{(n)} \in E$,

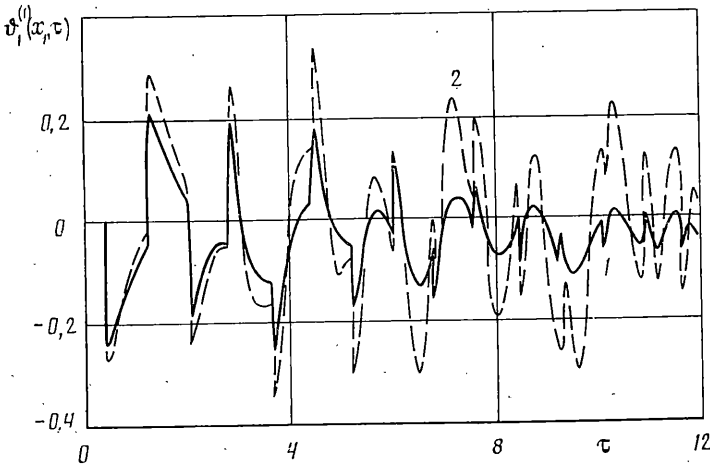
если же $K_v^{(n)} \equiv K_c^{(n)}$, то также $K_a^{(n)} \in E$.

Вторая часть утверждения очевидна, первая же часть доказывается с использованием свойств экспоненциальных операторов [7].

Здесь не рассматривается случай неограниченной ползучести, когда



Фиг. 1

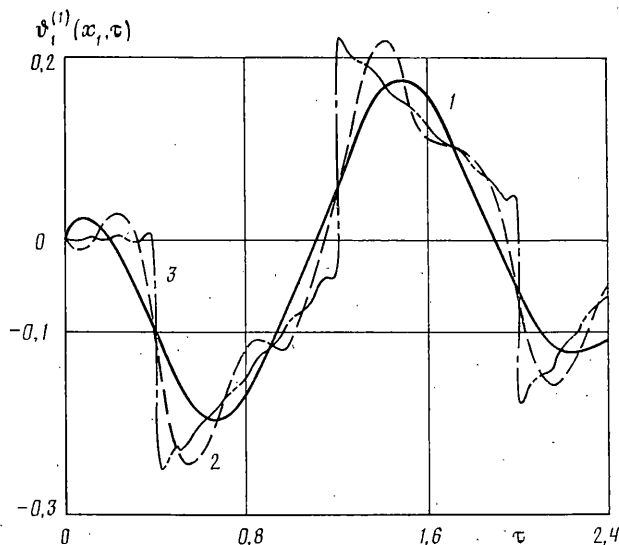


Фиг. 2

соответствующие (3.1) строгие неравенства переходят в равенства для каких-либо n (тогда $K_v^{(n)}, K_c^{(n)}$ не представляются в форме (4.1)). В этом случае формулы (3.2) при однократности, в том числе и равных нулю, корней $1-A_l=0$ ($1 \leq l \leq N$) остаются в силе, однако вычет в нуле будет действительной функцией x и τ , неограниченной при $\tau \rightarrow \infty$. То же самое — для напряжений, хотя при некоторых соотношениях вязкоупругих ядер компонент тела (например, если тело однородно) вычет функции $S_\alpha^{(k)} e^{s\tau}$ в точке $s=0$ по-прежнему равен $S_{0\alpha}^{(k)}(x)$, $\alpha=1, 2, 3$, $k=1, 2, \dots, N$.

Приведем результаты численной реализации (3.3), (3.4) для нагруженного внутренним давлением $\varphi(\tau)=1-e^{-50\tau}$ ($P_0=0, Q_0>0$) двухслойного цилиндра с параметрами: $x_0=0,2, x_1=0,6, x_2=1, \mathbf{v}_1^{(0)}=0,3, \mathbf{v}_2^{(0)}=0,33, G_1^{(0)}/G_2^{(0)}=3,077, \alpha_1=1,029, T_v^{(1)} \equiv T_v^{(2)} \equiv 0, T_c^{(1)}=0,5e^{-\tau}+0,3e^{-1,5\tau}, T_c^{(2)}=$

$=0,3e^{-0,7\tau}+0,2e^{-\tau}$, при этом корни s_{nq} уравнений $1-A_n=0$ ($n=1, 2$) однократны и действительны: $s_{11}=-0,774, s_{12}=-1,420, s_{21}=-0,579, s_{22}=-0,952$. Введем $\vartheta_j^{(n)}(x, \tau)=G_n^{(0)} \sigma_j^{(n)}(x, \tau)/G_1^{(0)} Q_0, j, n=1, 2$. Зависимость от τ величин $\vartheta_2^{(1)}(x_0, \tau)$ и $\vartheta_1^{(1)}(x_1, \tau)$ представлена кривыми 1 на фиг. 1, 2 (расчеты выполнены при двадцати комплексных z_n и пяти действительных r_n нулях $Z(s)$, причем $r_1=-0,3344, r_2=-0,6191, r_3=-0,6891, r_4=$



Фиг. 3

$=-0,9709$, $r_5=-1,380$). Для аналогичной упругой задачи функции $\vartheta_2^{(1)}(x_0, \tau)$, $\vartheta_1^{(1)}(x_1, \tau)$ представлены кривыми 2 на фиг. 1, 2. Сходимость рядов для вязкоупругих напряжений демонстрирует фиг. 3, где кривая 1 соответствует двум наименьшим по модулю комплексным z_{ii} и первым двум из вышеприведенных действительным r_v , кривая 2 — пяти комплексным z_{ii} и всем пяти действительным r_v , кривая 3 — пятнадцати комплексным z_{ii} и пяти действительным r_v . Учет r_v из малых окрестностей s_{nq} слабо влияет на результат.

В заключение отметим, что предложенный подход позволяет получать решения при наличии массовых сил и различных типах граничных условий.

Автор благодарит И. А. Кийко и Г. Г. Булычева за полезные обсуждения результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сабодаш П. Ф. Распространение продольных вязкоупругих волн в трехслойной среде // Механика полимеров. 1971. № 1. С. 151–156.
2. Расулов М. Б. Распространение продольных вязкоупругих волн в трехслойном полупространстве // Материалы 4-й респ. конф. молодых ученых по математике и механике. Механика. Баку: Элм, 1983. С. 239–243.
3. Козлов В. И., Кучер Н. К. Динамическое поведение многослойных цилиндрических конструкций при нестационарных нагрузках // Проблемы прочности. 1980. № 5. С. 97–103.
4. Нуриев Б. Р. Удар по вязкоупругому слоистому композиту // Изв. АН АзССР. Сер. Физ.-техн. и мат. наук. 1985. № 4. С. 35–41.
5. Булычев Г. Г., Пшеничников С. Г. Динамика многослойного линейно-упругого цилиндра при осесимметричной нагрузке // Строит. механика и расчет сооружений. 1988. № 2. С. 47–50.
6. Булычев Г. Г., Пшеничников С. Г. Распространение упругих волн в слоистом цилиндре // Докл. АН СССР. 1988. Т. 303. № 5. С. 1074–1078.
7. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
8. Филиппов И. Г., Егорычев О. А. Волновые процессы в линейных вязкоупругих средах. М.: Машиностроение, 1983. 269 с.