

УДК 539.3

© 1991 г.

**Н. Х. АРУТЮНЯН, В. Э. НАУМОВ, Ю. Н. РАДАЕВ**

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ  
ДИНАМИЧЕСКИ НАРАЩИВАЕМОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА.  
Ч. 2. ЭВОЛЮЦИОННАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА  
ТЕОРИИ РАСТУЩИХ ТЕЛ**

Излагается теоретическая концепция наращиваемого деформируемого тела, главной особенностью которого является непрерывный приток материала к телу. Предполагается, что дополнительные частицы присоединяются к телу по части его внешней поверхности, которая вследствие этого является изменяющейся границей, движущейся по материальным частицам тела. Особое значение придается учету динамического характера наращивания, т. е. передачи импульса от присоединяемых частиц растущему телу, а также ударной деформации элементов в момент присоединения.

Обсуждаются уравнения динамики непрерывно наращиваемого деформируемого тела. Предлагаются определяющие соотношения для растущих тел, основанные на концепции простого материала Нолла. Приводимые определяющие соотношения учитывают присущую растущему телу специфическую возрастную неоднородность, обусловленную неодновременностью зарождения и присоединения материальных частиц. Получено уравнение баланса массы на поверхности наращивания.

Дается формулировка общей эволюционной граничной задачи для растущего тела, которая позволяет в каждом конкретном случае свести анализ поведения растущего тела к нахождению закона движения тела из приведенной системы уравнений при соответствующих начальных и граничных условиях. Обсуждаются принципиальные отличия сформулированной задачи от начально-краевых задач для деформируемых тел постоянного состава.

В качестве иллюстративного примера рассматривается задача о равномерном динамическом наращивании упругого полупространства. Получено автомодельное решение соответствующей эволюционной граничной задачи, действительное до момента опрокидывания продольной волны сжатия и зарождения в приповерхностном слое ударной волны.

**1. Уравнения динамики непрерывно наращиваемого тела.** При изложении последующего материала будут использоваться приведенные в [1] соотношения, определяющие кинематику деформируемого континуума переменного состава, в частности, закон движения растущего тела.

Предлагаемая концепция растущего тела не предусматривает возможности объемного производства вещества и импульса (масса и импульс поступают к растущему телу только через поверхность наращивания). Это позволяет использовать для характеристики локального напряженного состояния растущего тела обычные меры напряжений, принимаемые в механике сплошных сред (см., например, [2]).

Итак, дифференциальное уравнение баланса импульса для растущего тела имеет обычный вид

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a} \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$  — тензор напряжений Коши,  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$  — вектор массовых сил,  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$  — вектор ускорения,  $\rho(\mathbf{x}, t)$  — плотность материала растущего тела,  $\mathbf{x}$  — место в физическом пространстве. Заметим, что все эти величины относятся к актуальной конфигурации растущего тела.

Преобразуем уравнение (1.1) к конвективным координатам растущего тела, учитывая также уравнение неразрывности в форме Лагранжа:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \Xi^m} (g^{1/2} T^{nm}) + g^{1/2} T^{rs} \Gamma_{rs}^n = \\ & = \rho^* g^{*1/2} g^{in} \frac{\partial \chi^{(h)}}{\partial \Xi^i} \left[ \frac{\partial^2 \chi^{(j)}}{\partial t^2} g^{(jh)} + \Gamma_{(m\bar{p},h)} \frac{\partial \chi^{(m)}}{\partial t} \frac{\partial \chi^{(p)}}{\partial t} - b_{(h)} \right] \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $T^{nm}$  — контравариантные компоненты тензора напряжений в конвективных координатах,  $g_{ij}$  — компоненты метрического тензора конвективных координат,  $g = \det \|g_{ij}\|$ ,  $\Gamma_{rs}^n$  — символы Кристоффеля второго рода конвективных координат,  $\chi^{(i)}$  — компоненты (относительно фиксированной системы координат пространства) закона движения растущего тела  $\mathbf{x} = \chi(\Xi, t)$ , отображающего при каждом  $t$  ассоциированный цилиндр в пространстве обобщенных лагранжевых переменных  $\Xi^1, \Xi^2, \Xi^3$  на актуальную конфигурацию растущего тела (см. [1]). Через  $g^*$  в (1.2) обозначен детерминант матрицы с элементами  $g_{ij}^*$ , причем

$$\begin{aligned} g_{ij}^*(\Xi) &= \left[ g_{(ln)}(\chi(\Xi, t)) \frac{\partial \chi^{(l)}}{\partial \Xi^i} \frac{\partial \chi^{(n)}}{\partial \Xi^j} \right]_{t=\Xi^3} \quad (\Xi^3 > 0) \\ g_{ij}^*(\Xi) &= \left[ g_{(ln)}(\chi(\Xi, t)) \frac{\partial \chi^{(l)}}{\partial \Xi^i} \frac{\partial \chi^{(n)}}{\partial \Xi^j} \right]_{t=0} \quad (-\Delta < \Xi^3 \leq 0) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Наконец,  $\rho^*(\Xi)$  — функция, определяемая как плотность элемента с меткой  $\Xi$  сразу после удара этого элемента о растущее тело, если  $\Xi^3 > 0$ , и как плотность элемента основного тела с меткой  $\Xi$  в начальный момент времени, если  $-\Delta \leq \Xi^3 < 0$ . Будем предполагать, что плотности приращиваемых элементов непосредственно перед ударом элементов о растущее тело либо заданы, либо выражаются через закон движения растущего тела (последнее имеет место в случае задания распределения плотностей приращиваемых элементов в форме эйлерова поля). Тогда в силу лагранжева уравнения неразрывности получим

$$\rho^*(\Xi) = \rho^-(\Xi) / \det \|G_{(mn)}^*\| \quad (\Xi^3 > 0) \quad (1.4)$$

где  $\rho^-(\Xi)$  — плотность элемента с меткой  $\Xi$  непосредственно перед ударом о растущее тело,  $G_{(mn)}^*$  — компоненты тензора ударной дисторсии (формулы для вычисления этих компонент даны в [1]).

**2. Определяющие соотношения для растущих деформируемых тел.** Согласно концепции Нолла [3], простым называется тело, актуальное напряженное состояние которого в окрестности каждой материальной точки определяется только предысторией градиента деформации в этой точке. Концепция Нолла допускает естественное обобщение на растущие тела: растущее тело будем называть простым, если основное тело является простым и все приращиваемые элементы — простые тела.

Определяющее уравнение простого растущего тела можно представить в виде [4]:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \Sigma(\mathbf{G}^t(\Xi), \Xi, t - \tau^\circ(\Xi)), \quad \mathbf{x} = \chi(\Xi, t) \quad (2.1)$$

где  $\Xi$  — метки частиц, составляющих в момент времени  $t$  растущее тело,  $\mathbf{G}^t(\Xi)$  — предыстория до момента  $t$  тензора дисторсии растущего тела,  $\Sigma(\mathbf{A}^t, \Xi, t - \tau^\circ(\Xi))$  — реакция элемента с меткой  $\Xi$  на предысторию деформации  $\mathbf{A}^t$  этого элемента относительно конфигурации элемента в момент его зарождения  $\tau^\circ(\Xi)$ . Под предысторией  $\mathbf{G}^t(\Xi)$  понимается совокупность значений  $\{\mathbf{G}(\Xi, t-s), 0 \leq s \leq t - \tau^\circ(\Xi)\}$ . Отметим также, что первый аргумент отображения  $\Sigma$  является тензорно-функциональным, т. е. значение

отображения  $\Sigma$  зависит, вообще говоря, от значений функции  $G(\Xi, t-s)$  при всех  $0 \leq s \leq t - \tau^\circ(\Xi)$ . Поскольку основное тело и приращиваемые элементы, в принципе, могут состоять из различных материалов, в число аргументов  $\Sigma$  включена переменная  $\Xi$ . Определяющее соотношение (2.1) учитывает также и введенную в [5] возрастную неоднородность растущего тела, обусловленную неодновременностью зарождения и присоединения частиц к растущему телу.

Общая теория определяющих уравнений основана на трех аксиомах Нолла [2], следствием которых является приведенная форма (2.1):

$$\mathbf{T}(x, t) = \mathbf{R}(\Xi, t) \mathbf{Y}(C^t(\Xi), \Xi, t - \tau^\circ(\Xi)) \mathbf{R}^T(\Xi, t), \quad \mathbf{C} = \mathbf{G}^T \mathbf{G} \quad (2.2)$$

где  $C^t$  — предыстория до момента  $t$  правого тензора деформации Коши — Грина,  $\mathbf{R}$  — ортогональный сомножитель (тензор поворота) в полярном разложении тензора дисторсии растущего тела ( $\mathbf{G} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ ). Аксиомы Нолла позволяют исключить предысторию тензора поворота в приведенном определяющем уравнении, если в качестве меры деформации использовать тензор  $\mathbf{C}$ .

Следует подчеркнуть, что модель растущего тела, в принципе, не накладывает никаких ограничений на используемые определяющие соотношения, кроме общепринятых в механике сплошных сред. В этом смысле материал растущего тела, вообще говоря, может не быть даже реологически простым по Ноллу. Однако, для дальнейшего изложения теории и рассмотрения иллюстративного примера необходимо конкретизировать определяющие уравнения.

Остановимся для определенности на случае изотропного упругого растущего тела. (Условимся называть растущее тело изотропным упругим, если материал основного тела является изотропным упругим и наращивание производится также элементами изотропных упругих материалов.) Одной из приведенных форм определяющего уравнения для такого растущего тела является форма Ривлина:

$$\mathbf{T} = \Sigma_0 \mathbf{I} + \Sigma_1 \mathbf{B} + \Sigma_{-1} \mathbf{B}^{-1} \quad (2.3)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичный тензор,  $\mathbf{B} = \mathbf{G}\mathbf{G}^T$  — левый тензор деформации Коши — Грина,  $\Sigma_\nu$  ( $\nu = 0, 1, -1$ ) — коэффициенты реакции (которые являются функциями лагранжевой переменной  $\Xi$  и главных инвариантов тензора  $\mathbf{B}$ ). Отметим также, что для изотропных упругих тел удобно использовать меру деформации  $\mathbf{B}$  (или тензор деформации Альманси — Гамеля  $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1})$ ).

**3. Баланс массы на поверхности наращивания.** Прежде чем сформулировать эволюционную граничную задачу теории растущих тел, приведем вывод уравнения баланса массы на поверхности наращивания. Будем считать заданными в виде эйлеровых полей плотность  $\rho_A(x, t)$  и скорость  $\mathbf{v}_A(x, t)$  осаждаемого потока частиц. Зафиксируем мгновенные положения поверхности наращивания в моменты времени  $t$  и  $t + \delta t$ . Напомним, что уравнение поверхности наращивания имеет вид  $\mathbf{x} = \chi(\Xi^1, \Xi^2, t, t)$ . Поверхность наращивания искажается за время  $\delta t$  как вследствие движения растущего тела, так и вследствие осаждения на нее новых частиц. Рассмотрим элементарную площадку, касающуюся поверхности наращивания в момент  $t$  в точке  $P$ , определяемой значениями гауссовых параметров  $\Xi^1, \Xi^2$ . Обозначим через  $\Delta S$  площадь указанной площадки:  $\Delta S = \sqrt{a} \Delta \Xi^1 \Delta \Xi^2$ , где  $a$  — детерминант первой квадратичной формы поверхности. Рассмотрим теперь элемент физического пространства  $PP_1P_2P_3P'_1P'_2P'_3$  в форме многогранника, построение которого осуществляется следующим образом (фиг. 1). Грань  $PP_1P_2P_3$  представляет собой площадку, касающуюся поверхности наращивания в точке  $P$ . Точка  $P'$  является точкой пересечения



следующее уравнение:

$$J_A = (\rho^*)_{\Xi^2=t} s \quad (t > 0) \quad (3.2)$$

где  $s(\Xi^1, \Xi^2, t)$  — собственная скорость распространения поверхности наращивания в направлении нормали. Учитывая уравнение (1.4), определяющее мгновенное изменение плотности при ударе приращиваемого элемента о растущее тело, уравнение (3.2) приведем к виду

$$(J_A)_{t=\Xi^3} = \rho^-(\Xi) (s)_{t=\Xi^3} (\det G^*)^{-1}, \quad \rho^-(\Xi) \equiv (\rho_A(\chi(\Xi, t), t))_{t=\Xi^3} \quad (3.3)$$

Подставив в (3.3) следующее выражение для скорости  $s$ :

$$(s)_{t=\Xi^3} = (g_{(mk)} n^{(m)} \partial \chi^{(k)} / \partial \Xi^3)_{t=\Xi^3}$$

получим уравнение баланса массы на поверхности наращивания в виде

$$\left( g_{(mk)} n^{(m)} \frac{\partial \chi^{(k)}}{\partial \Xi^3} \right)_{t=\Xi^3} \frac{\rho^-(\Xi)}{\det \| G_{(rn)}^* \|} = (J_A)_{t=\Xi^3}, \quad ((\Xi^1 \Xi^2) \in \Pi, \Xi^3 > 0) \quad (3.4)$$

**4. Полная система соотношений эволюционной граничной задачи.** Приведем теперь полную математическую формулировку эволюционной граничной задачи для растущего деформируемого тела. Для определенности будем предполагать, что основное тело является сжимаемым, нелинейно-упругим, однородным, изотропным и до начала наращивания находится в естественном состоянии. В момент  $t=0$  начинается наращивание тела элементами другого сжимаемого, нелинейно-упругого, однородного и изотропного материала. Коэффициенты реакции основного тела  $\Sigma'_\kappa$  ( $\kappa=0, 1, -1$ ) и приращиваемых элементов  $\Sigma''_\kappa$  будем считать заданными функциями главных инвариантов тензора  $\mathbf{B}$ ; соответствующие плотности в естественных конфигурациях обозначим  $\rho'$  и  $\rho''$ . Считаются заданными также скорость  $v_A(\mathbf{x}, t)$  и плотность  $\rho_A(\mathbf{x}, t)$  приращиваемого элемента с меткой  $\Xi$ , который в момент  $t \leq \Xi^3 - 0$  занимает место  $\mathbf{x}$  пространства, и тензор дисторсии  $\mathbf{G}_A(\mathbf{x}, t)$  этого элемента относительно его естественной конфигурации. Предполагается известным функционал  $J_A(\mathbf{x}, \mathbf{n}, v_A, \Theta, U_1, \dots, U_p)$ .

Примем также, что граница растущего тела в каждый момент времени  $t$  состоит из двух связных участков — поверхности наращивания  $\Sigma$  и части границы основного тела  $\sigma$ , которая при всех  $t > 0$  не наращивается. Поверхность  $\sigma$ , вообще говоря, может перемещаться в пространстве. Начальное положение (т. е. при  $t=0$ ) поверхности  $\sigma$  обозначим через  $S$ . Пусть далее, поверхность  $S$ , в свою очередь, состоит из двух связных частей  $S_1$  и  $S_2$ , причем на  $S_1$  задано движение ее точек  $\lambda(\mathbf{X}, t)$  ( $\mathbf{X} \in S_1, t > 0$ ), а на  $S_2$  — вектор поверхностных усилий<sup>1</sup>  $\mathbf{p}(\mathbf{X}, t)$  ( $\mathbf{X} \in S_2, t > 0$ ). Мы здесь ограничиваемся случаем, когда участки  $S_1$  и  $S_2$  являются фиксированными<sup>2</sup>. При этом, разумеется, не исключается случай, когда наращивание осуществляется по всей поверхности тела и граница  $S$ , как таковая, отсутствует.

Наконец, должны задаваться начальное положение и начальная скорость  $\mu(\mathbf{X})$  каждой частицы основного тела при  $t=0$ . Начальное положение частиц основного тела определяется (см. [1]) с помощью диффеоморфизма  $\mathbf{X} = \Lambda(\Xi)$  цилиндрической области  $\{(\Xi^1, \Xi^2) \in \Pi, -\Delta \leq \Xi^3 \leq 0\}$  ассоциированного многообразия (начальному положению поверхности наращивания соответствует верхнее основание цилиндра). Удобно также

<sup>1</sup> Граничные условия для усилий имеют вид [2]:  $(\det G) T G^{-T} N = \mathbf{p}$ , где  $N(\mathbf{X})$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $S_2$ .

<sup>2</sup> В общем случае участки внешней поверхности тела, на которых задаются силовые и кинематические граничные условия обычного вида, могут изменяться при наращивании.

полагать, что диффеоморфизм  $X=\Lambda(\Xi)$  отображает нижнее основание цилиндра  $\{(\Xi^1, \Xi^2) \in \Pi, -\Lambda \leq \Xi^3 \leq 0\}$  на поверхность  $S_1$  (или  $S_2$ ), а боковую поверхность его — на поверхность  $S_2(S_1)$ . Будем считать, что отображение  $X=\Lambda(\Xi)$  построено и известны форма области  $\Pi$  и число  $\Lambda > 0$ .

Отметим, что ниже используется только декартова система координат пространства  $x_{(r)}$ . Переход к криволинейным координатам  $x^{(r)}$  затруднений не представляет, хотя и сильно усложняет по форме все уравнения.

Итак, требуется найти закон движения растущего тела

$$x_{(m)} = \chi_{(m)}(\Xi^1, \Xi^2, \Xi^3, t) \quad ((\Xi^1, \Xi^2) \in \Pi, -\Lambda \leq \Xi^3 \leq t, t \geq 0) \quad (4.1)$$

так, чтобы удовлетворялись следующие уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial \Xi^m} (g^{1/2} T^{nm}) + g^{1/2} T^{rs} \Gamma_{rs}^n = \rho^* g^{*1/2} g^{in} \left( \frac{\partial^2 \chi_{(k)}}{\partial t^2} - b_{(k)} \right) \frac{\partial \chi_{(k)}}{\partial \Xi^i} \quad (4.2)$$

$$((\Xi^1, \Xi^2) \in \text{int } \Pi, -\Lambda < \Xi^3 < t, t > 0)$$

$$g \equiv \det \|g_{ij}\|, \quad g^* \equiv \det \|g_{ij}^*\|$$

$$T^{km} = \sum_0 g^{km} + \sum_1 B^{km} + \sum_{-1} (B^{-1})^{km} \quad (4.3)$$

$$\Sigma_\kappa = \Sigma_\kappa'(I_B, II_B, III_B) \quad (\kappa=0, 1, -1) \quad ((\Xi^1, \Xi^2) \in \Pi, -\Lambda \leq \Xi^3 < 0, t > 0)$$

$$\Sigma_\kappa = \Sigma_\kappa''(I_B, II_B, III_B) \quad (\kappa=0, 1, -1) \quad ((\Xi^1, \Xi^2) \in \Pi, 0 < \Xi^3 \leq t, t > 0) \quad (4.4)$$

$$B^{ij} = g^{in} g^{jm} \frac{\partial \chi_{(p)}}{\partial \Xi^n} \frac{\partial \chi_{(q)}}{\partial \Xi^m} B_{(pq)} \quad (4.5)$$

$$B_{(nm)} = g^{*mr} \frac{\partial \chi_{(n)}}{\partial \Xi^m} \frac{\partial \Lambda_{(p)}}{\partial \Xi^r} g^{*is} \frac{\partial \chi_{(m)}}{\partial \Xi^i} \frac{\partial \chi_{(p)}}{\partial \Xi^s} \quad ((\Xi^1, \Xi^2) \in \Pi, -\Lambda \leq \Xi^3 < 0, t > 0) \quad (4.6)$$

$$B_{(kl)} = g^{*ij} \frac{\partial \chi_{(k)}}{\partial \Xi^i} \left( \frac{\partial \chi_{(m)}}{\partial \Xi^j} \right)_{t=\Xi^3} G_{(mp)}^* B_{(pq)}^- G_{(nq)}^* g^{*rs} \frac{\partial \chi_{(l)}}{\partial \Xi^r} \left( \frac{\partial \chi_{(n)}}{\partial \Xi^s} \right)_{t=\Xi^3} \quad (4.7)$$

$$B_{(pq)}^- = G_{(ps)}^- G_{(qs)}^-, \quad G_{(ij)}^- = G_{A(ij)}(\chi(\Xi, \Xi^3), \Xi^3) \quad ((\Xi^1, \Xi^2) \in \Pi, 0 < \Xi^3 \leq t, t > 0)$$

$$g_{ij} = \frac{\partial \chi_{(k)}}{\partial \Xi^i} \frac{\partial \chi_{(k)}}{\partial \Xi^j} \quad ((\Xi^1, \Xi^2) \in \Pi, -\Lambda \leq \Xi^3 \leq t, t > 0) \quad (4.8)$$

$$g_{ij}^* = \lim_{t \rightarrow \Xi^3} g_{ij} + g_{ij}(\Xi^1, \Xi^2, \Xi^3, t) \quad ((\Xi^1, \Xi^2) \in \Pi, \Xi^3 > 0) \quad (4.9)$$

$$g_{ij}^* = \frac{\partial \Lambda_{(k)}}{\partial \Xi^i} \frac{\partial \Lambda_{(k)}}{\partial \Xi^j} \quad ((\Xi^1, \Xi^2) \in \Pi, -\Lambda \leq \Xi^3 < 0)$$

$$\rho^* = \rho' \quad ((\Xi^1, \Xi^2) \in \Pi, -\Lambda \leq \Xi^3 < 0)$$

$$\varphi^* = \rho'' \{ \det \|G_{(ij)}^*\| \det \|(G_{A(ij)})_{x=\chi(\Xi, t)}\|_{t=\Xi^3} \}^{-1} \quad ((\Xi^1, \Xi^2) \in \Pi, \Xi^3 > 0) \quad (4.10)$$

$$(\partial \chi_{(p)} / \partial \Xi^\alpha)_{t=\Xi^3} G_{(mp)}^* = (\partial \chi_{(m)} / \partial \Xi^\alpha)_{t=\Xi^3} \quad (\alpha=1, 2) \quad (4.11)$$

$$n_{(p)}^* G_{(mp)}^* = n_{(m)}^* + (v_{(m)}^- - v_{(m)}^*) \left\{ n_{(k)}^* \left[ \left( \frac{\partial \chi_{(k)}}{\partial \Xi^3} \right)_{t=\Xi^3} + v_{(k)}^* - v_{(k)}^- \right] \right\}^{-1}$$

$$((\Xi^1, \Xi^2) \in \Pi, \Xi^3 > 0)$$

$$v_{(m)}^- \equiv v_{A(m)}(\chi(\Xi, \Xi^3), \Xi^3), \quad v_{(m)}^* \equiv [\partial \chi_{(m)}(\Xi, t) / \partial t]_{t=\Xi^3} \quad (4.12)$$

$$n_{(p)}^* = {}^1/2 e_{psq} e^{\beta\gamma} (\det \|a_{\mu\nu}^*\|)^{-1/2} \left( \frac{\partial \chi_{(s)}}{\partial \Xi^\beta} \frac{\partial \chi_{(s)}}{\partial \Xi^\gamma} \right)_{t=\Xi^3}$$

$$a_{\mu\nu}^* = \left( \frac{\partial \chi_{(k)}}{\partial \Xi^\mu} \frac{\partial \chi_{(k)}}{\partial \Xi^\nu} \right)_{t=\Xi^3} \quad (\beta, \gamma, \mu, \nu=1, 2)$$

$$\rho'' n_{(k)}^* (\partial \chi_{(k)} / \partial \Xi^3)_{t=\Xi^3} \{ \det \| G_{(i)}^* \| \det \| (G_{A(ij)})_{x=\chi(\Xi, t)} \|_{t=\Xi^3} \}^{-1} = (J_A)_{t=\Xi^3} \\ ((\Xi^1, \Xi^2) \in \Pi, \Xi^3 > 0) \quad (4.13)$$

а также следующие граничные и начальные условия:

$$\chi_{(m)}(\Xi^1, \Xi^2, \Xi^3, 0) = \Lambda_{(m)}(\Xi^1, \Xi^2, \Xi^3) \quad ((\Xi^1, \Xi^2) \in \Pi, -\Delta \leq \Xi^3 \leq 0) \quad (4.14)$$

$$[\partial \chi_{(m)}(\Xi^1, \Xi^2, \Xi^3, t) / dt]_{t=0} = \mu_{(m)}(\Xi^1, \Xi^2, \Xi^3) \\ ((\Xi^1, \Xi^2) \in \Pi, -\Delta \leq \Xi^3 \leq 0) \quad (4.15)$$

$$\chi_{(m)}(\Xi^1, \Xi^2, -\Delta, t) = \lambda_{(m)}(\Lambda_{(p)}(\Xi^1, \Xi^2, -\Delta), t) \\ ((\Xi^1, \Xi^2) \in \Pi, t > 0) \quad (4.16)$$

$$\det \| G_{(ij)} \| [\Sigma_0' \delta_{mn} + \Sigma_1' B_{(mn)} + \Sigma_{-1}' (B^{-1})_{(mn)}] (G^{-1})_{(kn)} N_{(k)}(\Lambda(\Xi)) = \\ = p_{(m)}(\Lambda(\Xi), t) \quad ((\Xi^1, \Xi^2) \in \Pi, -\Delta < \Xi^3 < 0, t > 0) \quad (4.17)$$

$$G_{(ij)} = g^{*r1} \frac{\partial \chi_{(i)}}{\partial \Xi^r} \frac{\partial \Lambda_{(j)}}{\partial \Xi^1}$$

Фактически все приведенные здесь уравнения были прокомментированы при их выводе (в том числе в [4]). Тем не менее, укажем, что: (4.2) — есть уравнение баланса импульса, представленное в конвективной системе координат, (4.3) — определяющее уравнение растущего изотропного нелинейно-упругого тела, формулы (4.4) определяют коэффициенты реакции основного и дополнительного тел, по формулам (4.5) осуществляется переход от декартовых компонент тензора  $\mathbf{B}$  к конвективным, формулы (4.6), (4.7) выражают декартовы компоненты тензора  $\mathbf{B}$  через закон движения, формулы (4.8), (4.9) являются определением метрических коэффициентов  $g_{ij}$  и  $g_{ij}^*$ , формулы (4.10) определяют значение плотности  $\rho^*$  (входящей в уравнение движения (4.2)) через закон движения. Особо следует остановиться на формулах (4.11) — (4.13). Формулы (4.11) представляют собой линейную систему алгебраических уравнений девятого порядка для определения девяти компонент  $G_{(ij)}^*$  тензора ударной дисторсии через закон движения растущего тела. Группа формул (4.12) поясняет использованные в (4.11) обозначения. Можно показать, что определитель линейной системы (4.11) всегда отличен от нуля. Уравнение (4.13) представляет собой уравнение баланса массы на поверхности наращивания и, в принципе, может быть отнесено к граничным условиям.

Подчеркнем, что формулировка эволюционной граничной задачи для растущего тела в виде (4.2) — (4.17) пока еще не является полной. Ее необходимо дополнить соотношениями на сингулярных (по отношению к закону движения) поверхностях. Кроме волновых поверхностей (на которых должны ставиться известные условия на скачки скорости и напряжения [2]), к разряду сингулярных следует отнести те поверхности внутри растущего тела, вдоль которых соприкасаются элементы с несовместными деформациями. Будем называть такие поверхности сингулярными поверхностями второго рода. Для простоты примем, что поля  $v_A(x, t)$ ,  $G_A(x, t)$ ,  $\rho_A(x, t)$  непрерывны по переменным  $x, t$ , чтобы избежать возникновения сингулярных поверхностей второго рода внутри дополнительного тела. Тогда единственной сингулярной поверхностью второго рода будет поверхность сращивания основного и дополнительного тел (если, конечно, при  $t=0$  действительно происходит удар осаждае-

мого потока об основное тело). Соотношения на сингулярных поверхностях второго рода будем называть условиями сопряжения. Для указанного простейшего случая условия сопряжения выражают непрерывность положения частиц и сохранения импульса и имеют следующий вид:

$$\lim_{\Xi^3 \rightarrow 0} \chi_{(m)}(\Xi^1, \Xi^2, \Xi^3, t) = \lim_{\Xi^3 \rightarrow 0} \chi_{(m)}(\Xi^1, \Xi^2, \Xi^3, t) \quad (4.18)$$

$$((\Xi^1, \Xi^2) \in \Pi, t > 0)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\Xi^3 \rightarrow 0} T_{(mk)}(\Xi^1, \Xi^2, \Xi^3, t) v_{(m)} = \\ & = \lim_{\Xi^3 \rightarrow 0} T_{(mk)}(\Xi^1, \Xi^2, \Xi^3, t) v_{(m)} \quad (4.19) \\ & ((\Xi^1, \Xi^2) \in \Pi, t > 0) \end{aligned}$$

где  $v_{(m)}$  — декартовы компоненты единичного вектора нормали к поверхности срачивания  $x_{(k)} = \chi_{(k)}(\Xi^1, \Xi^2, 0, t)$ . В формулах (4.19), очевидно, необходимо вместо декартовых компонент  $T_{(mk)}$  подставить их выражения через конвективные компоненты, разрешив систему линейных уравнений  $T_{mn} = (\partial \chi_{(k)} / \partial \Xi^m) (\partial \chi_{(p)} / \partial \Xi^n) T_{(kp)}$ , а затем выразить конвективные компоненты через закон движения, используя определяющее уравнение (4.3).

В излагаемой модели растущего тела, в принципе, может быть учтено и континуальное распределение несовместных деформаций элементов осаждаемого потока, т. е. скачкообразное изменение функции  $G_A(x, t)$  в каждой точке  $x$  области, занятой потоком. В этом случае в дополнительном теле образуется континуальное распределение дислокаций и собственных напряжений [6, 7]<sup>3</sup>.

Таким образом, соотношения (4.2) — (4.19) дают полную постановку эволюционной граничной задачи для динамически наращиваемого тела. Важно отметить, что рассматриваемая задача не принадлежит к числу изученных граничных задач математической физики. Действительно, если в уравнение движения (4.2) вместо компонент напряжений  $T^{mk}$  подставить их выражения через закон движения (4.1), то в уравнение движения войдут значения старших производных от закона движения, вычисленные при  $t = \Xi^3$ :

$$\left( \frac{\partial^2 \chi_{(p)}}{\partial \Xi^n \partial \Xi^m} \right)_{t=\Xi^3}, \quad \left( \frac{\partial^2 \chi_{(p)}}{\partial t \partial \Xi^m} \right)_{t=\Xi^3}, \quad \left( \frac{\partial^2 \chi_{(p)}}{\partial t^2} \right)_{t=\Xi^3}$$

Эти значения можно назвать «запаздывающими», поскольку указанные производные вычисляются в момент  $t = \Xi^3$  присоединения элемента с меткой  $\Xi$  к растущему телу, но при этом фигурируют в уравнении баланса импульса для текущего момента времени  $t$ . Специфика эволюционной граничной задачи для растущего тела проявляется уже в рассматриваемом ниже простейшем примере, поддающемся аналитическому исследованию.

**5. Иллюстративный пример: динамическое наращивание упругого полупространства.** Зафиксируем в пространстве декартову систему координат  $x_{(k)}$  и рассмотрим однородное изотропное сжимаемое упругое полупространство  $x_{(3)} \leq 0$ , находящееся в естественном состоянии. Плотность материала полупространства в естественном состоянии обозначим  $\rho_0$ . Начиная с момента времени  $t=0$  полупространство наращивается элементами того же материала, падающими перпендикулярно поверхности. Скорость приращиваемых элементов  $v_A$  (точнее, через  $v_A$  обозначается модуль скорости) будем считать зависящей только от времени  $t$  (т. е. не зависящей от эйлеровой переменной  $x$ ). Поверхностную плот-

<sup>3</sup> Внимание авторов на это обстоятельство обратил В. А. Пальмов.



ность потока приращиваемого вещества  $J_A$  зададим в форме функционала (3.1) частного вида:

$$J_A = J_A(v_A, \Theta, U) \quad (5.1)$$

где  $\Theta(t)$  — проекция на ось  $x_{(3)}$  вектора скорости поверхности наращивания,  $U(t)$  — некоторый управляющий параметр.

Основное тело представляет собой полупространство и в качестве меток точек основного тела выберем декартовы координаты  $X_m = \Xi^m$  ( $\Xi^3 \leq 0$ ). Начальный диффеоморфизм  $\Lambda$  является тождественным отображением  $\Lambda(\Xi) = \Xi$ , область  $\Pi$  совпадает со всей плоскостью  $\Xi^3 = 0$  и  $\Lambda = +\infty$ .

Задача обладает очевидной симметрией, поэтому закон движения наращиваемого полупространства будем искать в форме плоских волн дилатации:

$$\chi_{(1)} = \Xi^1, \chi_{(2)} = \Xi^2, \chi_{(3)} = \chi(\Xi^3, t) \\ (-\infty < \Xi^1 < \infty, -\infty < \Xi^2 < \infty, -\infty < \Xi^3 < t, t > 0)$$

Переобозначим  $\Xi = \Xi^3$  и условимся штрихом обозначать частное дифференцирование по  $\Xi$  при фиксированной переменной  $t$ , а точкой сверху — дифференцирование по  $t$  при фиксированной  $\Xi$ . Выразим, прежде всего, меры деформации растущего полупространства через закон движения. Метрические коэффициенты и символы Кристоффеля конвективных координат имеют вид (здесь и далее выписываются только ненулевые компоненты соответствующих полей):  $g_{11} = 1, g_{22} = 1, g_{33} = \chi'^2, \Gamma_{33}^3 = \chi''/\chi'$  ( $-\infty < \Xi < t, t > 0$ ). «Запаздывающие» значения  $g_{ij}^*$  метрических коэффициентов определяются формулами:  $g_{11}^* = 1, g_{22}^* = 1, g_{33}^* = [(\chi')_{t=\Xi}]^2$  ( $\Xi > 0$ ),  $g_{33}^* = 1$  ( $\Xi < 0$ ). Декартовы компоненты тензора дисторсии элемента в составе растущего тела  $G^+(\Xi, t)$  имеют следующий вид:

$$G_{(11)}^+ = 1, G_{(22)}^+ = 1, G_{(33)}^+ = \chi' \quad (\Xi < 0, t > 0) \quad (5.2)$$

$$G_{(11)}^+ = 1, G_{(22)}^+ = 1, G_{(33)}^+ = \chi'/(\chi')_{t=\Xi} \quad (0 < \Xi < t, t > 0)$$

Из системы уравнений (4.11) находим следующие выражения для декартовых компонент тензора ударной дисторсии  $G^*(\Xi, t)$ :

$$G_{(11)}^* = 1, G_{(22)}^* = 1, G_{(33)}^* = 1 - \left( \frac{v_A + \chi'}{\chi' + v_A + \chi'} \right)_{t=\Xi} \quad (5.3)$$

С помощью формул (5.2), (5.3) и основного мультипликативного разложения тензора дисторсии можно вычислить компоненты левого тензора деформации Коши — Грина:

$$B_{(11)} = 1, B_{(22)} = 1, B_{(33)} = \chi'^2 \quad (\Xi < 0) \quad (5.4)$$

$$B_{(11)} = 1, \tilde{B}_{(22)} = 1, B_{(33)} = \frac{\chi'^2}{[(\chi')_{t=\Xi}]^2} \left[ 1 - \left( \frac{v_A + \chi'}{\chi' + v_A + \chi'} \right)_{t=\Xi} \right]^2 \quad (0 < \Xi < t)$$

Определяющее уравнение сжимаемого гиперупругого материала возьмем в форме Синьорини [2]:

$$\mathbf{T} = \{\lambda I_A + 1/2(\lambda + \mu - 1/2c) I_A^2 + c II_A\} \mathbf{I} + \\ + 2\{\mu - (\lambda + \mu + 1/2c) I_A\} \mathbf{A} - 2c \mathbf{A}^2, \mathbf{A} = 1/2(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \quad (5.5)$$

где  $I_A, II_A$  — первый и второй инварианты тензора деформации Альманси — Гамеля  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{I}$  — единичный тензор,  $\lambda, \mu, c$  — упругие постоянные.

Представляя тензорное уравнение (5.5) в декартовых компонентах и используя формулы (5.4) получим, что компоненты  $T_{(mn)}$  образуют диагональную матрицу и выражаются через закон движения в соответствии



$$\lim_{\Xi \rightarrow 0} \chi'(\Xi, t) = b^{-1} \lim_{\Xi \rightarrow 0} \chi'(\Xi, t) \quad (t > 0) \quad (5.14)$$

$$(b \equiv \lim_{\Xi \rightarrow 0} \{[\chi'(\Xi, t) + v_A(t) + \chi''(\Xi, t)]_{t=\Xi}\})$$

Обратим внимание, что в уравнение (5.11) входят «запаздывающие» значения производных  $\chi'$ ,  $\chi''$ ,  $\chi'''$ ,  $\chi''''$ . Будем предполагать, что постоянные  $N$  и  $K$  таковы, что уравнения движения являются гиперболическими.

Эволюционная граничная задача (5.10)–(5.14), к счастью, может быть до конца исследована аналитическими средствами. Для восстановления симметрии уравнений движения (5.10), (5.11) вместо переменной  $\Xi$  введем переменную  $\Psi$ :

$$\Psi = \Xi \quad (\Xi \leq 0), \quad \Psi = \int_0^{\Xi} \omega(\xi) d\xi, \quad \omega(\Xi) \equiv (\chi' + v_A + \chi'')_{t=\Xi} \quad (\Xi > 0) \quad (5.15)$$

и будем искать закон движения растущего полупространства в форме

$$x_{(3)} = \chi(\Psi, t) \quad (5.16)$$

Заметим, что в силу уравнения (5.13)  $\omega(\Xi) = \rho_0^{-1}(J_A)_{t=\Xi}$ . Преобразуя уравнение (5.11) к переменным  $\Psi, t$ , получим уравнение

$$\left[ N \left( \frac{\partial \chi}{\partial \Psi} \right)^{-3} + K \left( \frac{\partial \chi}{\partial \Psi} \right)^{-5} \right] \frac{\partial^2 \chi}{\partial \Psi^2} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \quad (5.17)$$

совпадающее по форме с уравнением (5.10). Таким образом, в каждой из областей  $\Gamma_1, \Gamma_2$  фазовой плоскости  $\Psi, t$

$$\Gamma_1 = \{(\Psi, t): \Psi < 0, t > 0\}, \quad \Gamma_2 = \left\{ (\Psi, t): 0 < \Psi < \int_0^t \omega(\xi) d\xi, t > 0 \right\}$$

функция  $\chi(\Psi, t)$  должна удовлетворять дифференциальному уравнению (5.17). Преобразуя соотношения (5.12)–(5.14) к переменным  $\Psi, t$ , получим

$$\chi(\Psi, 0) = \Psi, \quad [\partial \chi(\Psi, t) / \partial t]_{t=0} = 0 \quad (\Psi < 0) \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi(\Psi, t)}{\partial \Psi} + \frac{\rho_0}{J_A(v_A(t), \partial \chi(\Psi, t) / \partial t, U(t))} \frac{\partial \chi(\Psi, t)}{\partial t} = \\ = 1 - \frac{\rho_0 v_A(t)}{J_A(v_A(t), \partial \chi(\Psi, t) / \partial t, U(t))} \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\left( t = \alpha, \quad \Psi = \frac{1}{\rho_0} \int_0^{\alpha} [J_A(v_A(t), \partial \chi(\Psi(\Xi), t) / \partial t, U(t))]_{t=\Xi} d\Xi, \quad \alpha > 0 \right)$$

$$\lim_{\Psi \rightarrow 0} \chi(\Psi, t) = \lim_{\Psi \rightarrow 0} \chi(\Psi, t) \quad (t > 0) \quad (5.20)$$

$$\lim_{\Psi \rightarrow 0} \frac{\partial \chi(\Psi, t)}{\partial \Psi} = \lim_{\Psi \rightarrow 0} \frac{\partial \chi(\Psi, t)}{\partial \Psi} \quad (t > 0)$$

Заметим, что граничное условие (5.19) ставится на неизвестной границе, которую в дальнейшем будем обозначать  $C$ . Таким образом, параметрические уравнения кривой  $C$  имеют вид  $t = \alpha, \Psi = \Psi(\alpha)$  ( $\alpha > 0$ ), где функция  $\Psi(\alpha)$  является решением следующей задачи Коши:

$$\frac{d\Psi}{d\alpha} = \frac{1}{\rho_0} J_A \left( v_A(\alpha), \frac{\partial \chi(\Psi(\alpha), \alpha)}{\partial \alpha}, U(\alpha) \right), \quad \Psi(0) = 0 \quad (5.21)$$

Изложим теперь метод решения граничной задачи (5.17)–(5.20). Введем дополнительное граничное условие на прямой  $\Psi=0, t>0$  фазовой плоскости ( $\xi(t)$  – неопределенная функция):

$$[\partial\chi(\Psi, t)/\partial\Psi]_{\Psi=0}=\xi(t) \quad (t>0) \quad (5.22)$$

Тогда в области  $\Gamma_1$  имеем граничную задачу для уравнения (5.17) с граничными условиями (5.18), (5.22). Эта граничная задача корректно поставлена и ее решение известно (см., например, [8]). Пусть  $z(t)$  – значения частной производной по  $t$  решения указанной задачи на полупрямой  $\Psi=0, t>0$ .

В области  $\Gamma_2$  с неизвестной границей  $C$  имеем граничную задачу для уравнения (5.17) с условиями (5.19) на неизвестной границе и условиями

$$[\partial\chi(\Psi, t)/\partial t]_{\Psi=0} = z(t), \quad [\partial\chi(\Psi, t)/\partial\Psi]_{\Psi=0} = \xi(t) \quad (t>0) \quad (5.23)$$

которые эквивалентны условиям сопряжения (5.20) (первое условие (5.23) следует из первого условия (5.20), продифференцированного по  $t$ ).

Прежде, чем анализировать последнюю граничную задачу, необходимо найти уравнение, связывающее граничные данные  $z(t)$  и  $\xi(t)$ . Для этого сначала приведем решение первой граничной задачи. Известно [8], что решение граничной задачи (5.17), (5.18), (5.22) может быть найдено в форме простых волн и вид этого решения зависит от поведения функции  $f(u) = (Nu^{-3} + Ku^{-5})^{1/2}$  в левой окрестности точки  $u=1$ . В дальнейшем будет рассматриваться случай, когда функция  $f(u)$  возрастает при уменьшении  $u$  от значения  $u=1$ . Для этого достаточно потребовать, чтобы  $K>0, N<0, -N/K<1$ . Тогда гладкого решения исследуемой граничной задачи не существует. Вглубь полупространства со скоростью  $a = (N\xi_0^{-3} + K\xi_0^{-5})^{1/2}$ ,  $\xi_0 \equiv \xi(0_+) < 1$  распространяется продольная волна сжатия, на фронте которой разрывны скорость, деформация и напряжения.

На фазовой плоскости имеем следующую волновую картину (фиг. 3). Ниже характеристики  $\Psi + at = 0$  – область покоя (характеристиками являются прямые  $\Psi + (N+K)^{1/2}t = \text{const}$ ):  $\chi(\Psi, t) = \Psi$  ( $\Psi < -at, t > 0$ ). Выше характеристики  $\Psi + at = 0$  деформация  $\partial\chi/\partial\Psi$  и скорость  $\partial\chi/\partial t$  выражаются формулами [8]:

$$\partial\chi(\Psi, t)/\partial\Psi = \xi(t^\sim), \quad \partial\chi(\Psi, t)/\partial t = \varphi(\xi(t^\sim)) + \Delta_f \quad (5.24)$$

$$\Delta_f = -(1-\xi_0)^{1/2} (1/2 N \xi_0^{-2} + 1/4 K \xi_0^{-4} - 1/2 N^{-1/4} K)^{1/2} - \varphi(\xi_0)$$

$$\varphi(\eta) = \int_1^\eta \left( \frac{N}{\tau^3} + \frac{K}{\tau^5} \right)^{1/2} d\tau$$

где функция  $t^\sim = t^\sim(\Psi, t)$  определена неявно уравнением

$$\Psi + [N\xi^{-3}(t^\sim) + K\xi^{-5}(t^\sim)]^{1/2}t = [N\xi^{-3}(t^\sim) + K\xi^{-5}(t^\sim)]^{1/2}t^\sim \quad (5.25)$$

Можно показать, что функция  $\varphi(\eta)$  выражается через эллиптические интегралы первого рода ( $k \equiv (-N/K)^{1/2}$ ):

$$\varphi(\eta) = {}^2/3 K^{1/2} [(1-k^2)^{1/2} - \eta^{-1/2} (1-k^2 \eta^2)^{1/2}] + {}^2/3 (-2Nk)^{1/2} [F(\arcsin((1-k\eta)^{1/2}), 2^{-1/2}) - F(\arcsin((1-k)^{1/2}), 2^{-1/2})]$$

Характеристиками в области  $0 > \Psi > -at, t > 0$  являются прямые  $t^\sim = \text{const}$  (см. (5.25)).

Необходимо отметить, что деформация и скорость становятся многозначными функциями в той точке ( $\Psi^*, t^*$ ) фазовой плоскости, в которой пересекаются различные характеристики  $t^\sim = t_1^\sim, t^\sim = t_2^\sim$  (фиг. 3). Физи-

чески это соответствует опрокидыванию простой волны и зарождению в окрестности точки  $\Psi = \Psi^*$  в момент  $t = t^*$  вторичной ударной волны. Вторичная ударная волна заведомо образуется, если  $\xi(0+) < 0$ , так как характеристики  $t = \delta$  ( $\delta$  — достаточно малое положительное число) обязательно будут пересекать характеристику  $\Psi + at = 0$ .

Итак, решение граничной задачи (5.17), (5.18), (5.22) нельзя продолжить за огибающую однопараметрического ( $t^*$  — параметр) семейства прямых (5.25). Область, ограниченную полупрямой  $\Psi = 0$ ,  $t > 0$ , характеристикой  $\Psi + at = 0$  и указанной огибающей, обозначим  $\Gamma_1^*$ .

Учитывая формулы (5.24), приведем граничные условия (5.23) к виду

$$[\partial\chi(\Psi, t)/\partial t]_{\Psi=0+} = \varphi(\xi(t)) + \Delta_f, \quad [\partial\chi(\Psi, t)/\partial\Psi]_{\Psi=0+} = \xi(t) \quad (t > 0)$$

Неопределенную функцию  $\xi(t)$ , очевидно, можно исключить. Тогда получим следующее условие:

$$\left[ \frac{\partial\chi(\Psi, t)}{\partial t} \right]_{\Psi=0+} - \varphi \left( \left[ \frac{\partial\chi(\Psi, t)}{\partial\Psi} \right]_{\Psi=0+} \right) = \Delta_f \quad (t > 0) \quad (5.26)$$

Граничная задача (5.17), (5.19), (5.26) также имеет решение в форме простых волн. Решение можно получить, если заметить, что уравнение первого порядка

$$\partial\chi/\partial t - \varphi(\partial\chi/\partial\Psi) = \Delta_f, \quad (\Psi, t) \in \Gamma_2 \quad (5.27)$$

является промежуточным интегралом уравнения (5.17) (см. [9]).

Следовательно, каждый интеграл уравнения (5.27) будет также интегралом уравнения (5.17), причем условие (5.26) будет удовлетворено. Остается только удовлетворить условию (5.19). Из уравнения (5.27) следует, что на контуре  $C$  выполняется равенство

$$(\partial\chi/\partial t)_C = \Delta_f + \varphi((\partial\chi/\partial\Psi)_C) \quad (5.28)$$

подставляя которое в (5.19) получим алгебраическое уравнение для определения  $(\partial\chi/\partial\Psi)_C$ :

$$\begin{aligned} & (\partial\chi/\partial\Psi)_C + \rho_0 [\Delta_f + \varphi((\partial\chi/\partial\Psi)_C)] \{J_A(v_A(\alpha), \Delta_f + \varphi((\partial\chi/\partial\Psi)_C), U(\alpha))\}^{-1} = \\ & = 1 - \rho_0 v_A(\alpha) \{J_A(v_A(\alpha), \Delta_f + \varphi((\partial\chi/\partial\Psi)_C), U(\alpha))\}^{-1} \quad (\alpha \geq 0) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Если найдено решение уравнения (5.29)  $(\partial\chi/\partial\Psi)_C = Z(\alpha)$ , то затем находится величина  $(\partial\chi/\partial t)_C$  по формуле (5.28) и форма кривой  $C$  (см. (5.21)):

$$t = \alpha, \quad \Psi = \rho_0^{-1} \int_0^\alpha J_A(v_A(\xi), \Delta_f + \varphi(Z(\xi)), U(\xi)) d\xi$$

Таким образом, для уравнения (5.27) имеем задачу Коши с начальными данными на кривой  $C$ , решение которой находится известным методом Коши [10]. В области  $\Gamma_2$  получим формулы

$$\partial\chi/\partial\Psi = Z(\alpha), \quad \partial\chi/\partial t = \varphi(Z(\alpha)) + \Delta_f \quad (5.30)$$

где функция  $\alpha = \alpha(\Psi, t)$  определена неявно уравнением

$$\begin{aligned} & \Psi + [NZ^{-3}(\alpha) + KZ^{-5}(\alpha)]^{1/2} t = \\ & = \alpha [NZ^{-3}(\alpha) + KZ^{-5}(\alpha)]^{1/2} + \rho_0^{-1} \int_0^\alpha J_A(v_A(\xi), \Delta_f + \varphi(Z(\xi)), U(\xi)) d\xi \end{aligned} \quad (5.31)$$

Огибающая семейства характеристик (5.31) ( $\alpha$  — параметр семейства) служит естественной границей области существования решения задачи

(5.17), (5.19), (5.26). Эту область обозначим через  $\Gamma_2^*$ . Остается еще определить только функцию  $\xi(t)$ . Полагая в (5.34)  $\Psi=0$  и используя первую из формул (5.30), находим:  $\xi(t)=Z(\beta)$ , где функция  $\beta=\beta(t)$  есть результат обращения уравнения

$$t=\beta+[NZ^{-3}(\beta)+KZ^{-5}(\beta)]^{-1/2}\rho_0^{-1}\int_0^\beta J_A(v_A(\xi), \Delta_f+\varphi(Z(\xi)), U(\xi))d\xi$$

Формулы (5.24), (5.30) полностью решают задачу, так как функция  $\chi(\Psi, t)$  восстанавливается двумя криволинейными квадратурами:

$$\chi(\Psi, t)=\int_{\gamma_1}\xi(t^\sim(\Psi, t))d\Psi+[\Delta_f+\varphi(\xi(t^\sim(\Psi, t)))]dt, \quad (\Psi, t)\in\Gamma_1^*$$

$$\chi(\Psi, t)=\int_{\gamma_2}Z(\alpha(\Psi, t))d\Psi+[\Delta_f+\varphi(Z(\alpha(\Psi, t)))]dt, \quad (\Psi, t)\in\Gamma_2^*$$
(5.32)

где  $\gamma_1(\gamma_2)$  — любая кусочно-гладкая кривая, расположенная в области  $\Gamma_1^*(\Gamma_2^*)$  и соединяющая начало координат с точкой  $(\Psi, t)$ .

В формулах (5.32) необходимо перейти к переменной  $\Xi$  по формулам

$$\Psi=\rho_0^{-1}\int_0^\Xi J_A(v_A(\xi), \Delta_f+\varphi(Z(\xi)), U(\xi))d\xi \quad (\Xi>0), \quad \Psi=\Xi \quad (\Xi\leq 0)$$
(5.33)

Итак, закон движения наращиваемого полупространства (5.2) выражается посредством двух криволинейных квадратур.

Пусть, например, поток приращиваемых частиц имеет заданную постоянную концентрацию частиц  $c_0=c=\text{const}$  ( $0<c<1$ ), а поверхностная плотность потока осаждаемого вещества определяется функционалом (5.1) простейшего вида:

$$J_A(t)=c\rho_0v_A(t) \quad (5.34)$$

Обозначим  $v_A(0)=v=\text{const}>0$ .

Приведем значения некоторых основных механических величин в момент удара (при  $t=0$ ) потока приращиваемых частиц об основное полупространство.

Полагая в уравнении (5.29)  $\alpha=0$ , подставляя в него выражение для  $\Delta f$  из (5.24) и учитывая, что  $(\partial\chi/\partial\Psi)_{\Psi=0+, t=0+}=\xi_0$ , получим следующее алгебраическое уравнение для определения величины  $\xi_0$ , равной деформации поверхности наращивания:

$$\sum_{n=0}^6 a_n \xi_0^n = 0 \quad (5.35)$$

$$a_0=-K/4, \quad a_1=K/4, \quad a_2=-N/2, \quad a_3=N/2$$

$$a_4=(c-1)^2v^2+N/2+K/4, \quad a_5=2(1-c)cv^2-N/2-K/4, \quad a_6=c^2v^2.$$

Можно показать, что уравнение (5.35) имеет единственный вещественный корень  $\xi_0\in(0, 1)$  при изменении параметров  $N, K, c$  и  $v$  в пределах, представляющих интерес. После нахождения величины  $\xi_0$  сжимающее напряжение на поверхности наращивания при  $t=0$  вычисляется по последней формуле (5.6):

$$T_{(33)}=v(1-\xi_0^{-2})-\kappa(1-\xi_0^{-2})^2 \quad (5.36)$$

Скорость поверхности наращивания в момент удара осаждаемого потока определяется из соотношения (5.19):

$$(\partial\chi/\partial t)_{\Psi=0+, t=0+}=v[c(1-\xi_0)-1] \quad (5.37)$$

Формулы (5.36) и (5.37) справедливы только для случая, когда плотность потока задается выражением (5.34). Определение основных механических величин для других значений независимых переменных  $\Psi$  и  $t$  требует детальных вычислений по приведенным выше формулам.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Математическая модель динамически наращиваемого деформируемого тела. Ч. 1. Кинематика и меры деформации растущего тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 85–98.
2. Truesdell C., Noll W. The non-linear field theories of mechanics.— Encyclopedia of physics. Ed. by S. Flügge. Vol. III/3. Berlin — Meidelberg — New York: Springer, 1965. 610 p.
3. Noll W. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media // Arch. Ration. Mech. and Anal., 1958. Vol. 2, No. 3. P. 197–226.
4. Арутюнян Н. Х., Метлов В. В. О принципе инвариантности в теории неоднородно стареющих сред // ПММ. 1986. Т. 50, вып. 6. С. 1049–1051.
5. Арутюнян Н. Х. Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела // ПММ. 1977. Т. 41, вып. 5. С. 783–789.
6. Кренер Э. Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений.— М.: Мир, 1965. 103 с.
7. Кунин И. А. Теория дислокаций.— В кн.: Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1962. С. 373–443.
8. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.
9. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3. Ч. 1.— М.— Л.: Гостехтеориздат, 1933. 276 с.
10. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.

Москва, Самара

Поступила в редакцию  
15.II.1990