**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1991**

УДК 539.3

С. М. АЙЗИКОВИЧ, И. С. ТРУБЧИК, Е. В. ШКЛЯРОВА

ВНЕДРЕНИЕ ШТАМПА В НЕОДНОРОДНУЮ ПО ГЛУБИНЕ ПОЛОСУ

Излагается метод сведения контактной задачи для неоднородной по глубине полосы к парному интегральному уравнению. Изменение коэффициентов Ламе по глубине в полосе носит общий характер (произвольная непрерывная неоднородность или пакет однородных полос).

1. Введение. Методы решения интегрального уравнения контактной задачи для однородной полосы подробно рассматривались в [1, 2]. В случае непрерывно-неоднородной по глубине полосы возникают трудности при сведении задачи к интегральному уравнению, связанные с решением системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Этого можно избежать, рассматривая специальные виды неоднородности по глубине, как, например, в [3]. В ряде работ использовался приближенный метод, основанный на замене непрерывно-неоднородного основания многослойным пакетом [4, 5]. В данной работе при построении трансформанты ядра интегрального уравнения используется метод моделирующих функций [6].

Построенная численно трансформанта ядра аппроксимируется выражением специального вида, что позволяет получить замкнутое решение приближенного интегрального уравнения. Доказывается, что построенное приближенное решение является асимптотически точным при $\lambda\to0$ и $\lambda\to\infty$.

Изучается влияние различных законов и скорости изменения с глубиной коэффициентов Ламе в полосе на распределение контактных напряжений при различных λ ($\lambda=H/a$, здесь H — толщина полосы, a — полуширина штампа). Устанавливается связь между силой, вдавливающей штамп в неоднородную полосу, и его осадкой при различных законах неоднородности и формах штампа. Задача поставлена в связи с расчетами ленточных фундаментов на неоднородных по глубине грунтах, подстилаемых скальным основанием.

2. Постановка задачи. Недеформируемый штамп вдавливается в верхнюю границу (Γ) упругой неоднородной полосы силой P. При этом длина линии контакта между ними (Γ_1) в плане равна $2a$. С полосой связана декартова система координат (x, y). Предполагается, что силы трения между штампом и полосой отсутствуют. Вне штампа полоса не загружена. Под действием силы P штамп перемещается по оси y на величину δ.

Коэффициенты Ламе Λ и M полосы с глубиной изменяются по закону

$$\Lambda=\Lambda(y),\quad \mathrm{M}=\mathrm{M}(y),\quad y\in[-H;\ 0] \tag{2.1}$$

Здесь $\Lambda(y)$, $\mathrm{M}(y)$ — произвольные гладкие функции.

Рассматриваем следующие задачи: задача 1 — полоса жестко соединена с недеформируемым основанием, задача 2 — полоса без трения покоится на недеформируемом основании.

Граничные условия при сделанных предположениях имеют вид (задача 1 и задача 2 соответственно):

$$u(x, -H)=v(x, -H)=0 \tag{2.2}$$

$$u(x, -H)=0, \quad \tau_{xy}(x, -H)=0 \tag{2.3}$$

Для задач 1 и 2:

$$\tau_{xy}(x, 0)=0 \tag{2.4}$$

$$v(x, 0)=-f(x)=-[\delta-\gamma(x)], \quad |x|\leqslant a \tag{2.5}$$

$$\sigma_y(x, 0)=0, \quad |x|>a \tag{2.6}$$

Здесь $u(x, y)$, $v(x, y)$ — соответственно горизонтальное и вертикальное перемещение, τ_{xy}, σ_y — касательное и нормальное напряжение, $\gamma(x)$ — форма основания штампа. Предполагаем, что при $|x|\to\infty$ напряжения в полосе исчезают.

Необходимо определить распределение контактных нормальных напряжений под штампом

$$\sigma_y(x, 0)=-q(x), \quad |x|\leqslant a \tag{2.7}$$

а также связь между вдавливающей силой P и осадкой штампа δ.

3. Построение интегрального уравнения, соответствующего задачам 1 и 2. Используем уравнения плоской задачи теории упругости [7]:

$$\partial\sigma_x/\partial x+\partial\tau_{xy}/\partial y=0, \quad \partial\tau_{xy}/\partial x+\partial\sigma_y/\partial y=0 \tag{3.1}$$

$$\sigma_x=\Lambda(y)\Theta+2\mathrm{M}(y)\partial u/\partial x, \quad \sigma_y=\Lambda(y)\Theta+2\mathrm{M}(y)\partial v/\partial y,$$

$$\tau_{xy}=\mathrm{M}(y)\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right], \quad \Theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} \tag{3.2}$$

Представим перемещения u и v в форме интегралов Фурье

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}U(\alpha,y)e^{-i\alpha x}\,d\alpha, \quad v(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}V^0(\alpha,y)e^{-i\alpha x}\,d\alpha \tag{3.3}$$

Уравнение (3.1) с учетом (3.2), (3.3) относительно $U(\alpha, y)$ и $V(\alpha, y)=-iV^0(\alpha, y)$ можно представить в виде

$$\mathrm{M}U''+\alpha(\mathrm{M}+\Lambda)V'-\alpha^2(\mathrm{M}+\Lambda)U+\mathrm{M}'U'+\alpha\mathrm{M}'V=0 \tag{3.4}$$

$$(2\mathrm{M}+\Lambda)V''-\alpha(\mathrm{M}+\Lambda)U'-\alpha^2\mathrm{M}V+(2\mathrm{M}'+\Lambda')V'-\alpha\Lambda'U=0$$

Введем вспомогательные функции

$$U^*(\alpha,y)=-\theta_0|\alpha|U(\alpha,y)/Q(\alpha), \quad V^*(\alpha,y)=-\theta_0|\alpha|V(\alpha,y)/Q(\alpha)$$

$$\theta_0=2\mathrm{M}(0)[\Lambda(0)+\mathrm{M}(0)]/(\Lambda(0)+2\mathrm{M}(0)). \tag{3.5}$$

где $Q(\alpha)$ — трансформанта Фурье искомой функции $q(x)$.

Для сведения смешанной задачи к интегральному уравнению необходимо построить функцию $V^*(\alpha,0)$. После определения $V^*(\alpha,0)$, используя условие (2.5), придем к уравнению вида

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = 2\pi\theta_0 f^0(x), \qquad |x| \leqslant 1$$

$$q(\xi)=\varphi\left(\frac{\xi}{a}\right), \qquad k(t)=2\int_0^\infty K(\alpha)\cos\alpha t\, dt, \qquad t=\frac{\xi-x}{\lambda} \tag{3.6}$$

$$K(\alpha)=\frac{L(\alpha)}{|\alpha|}, \qquad f(x)=f^0\left(\frac{x}{a}\right), \qquad \lambda=\frac{H}{a}, \qquad L(\alpha)\equiv V^*(\alpha,0)$$

Следует отметить, что в случае однородного или многослойного основания задачи 1 и 2 также сводятся к интегральному уравнению вида (3.6), где функция $L(\alpha)$ определяется следующим образом: а) для однородной полосы [1] для задач 1 и 2 соответственно

$$L(\alpha)=(\operatorname{ch}2\alpha-1)/(\operatorname{sh}2\alpha+2\alpha) \tag{3.7}$$

$$L(\alpha)=\frac{2\varkappa\operatorname{sh}2\alpha-4\alpha}{2\varkappa\operatorname{ch}2\alpha+1+\varkappa^2+4\alpha^2}, \qquad \varkappa=\frac{3M+\Lambda}{M+\Lambda} \tag{3.8}$$

б) для многослойных оснований аналогом функции $L(\alpha)$ для уравнения (3.6) являются функции податливости $A_n(\alpha, h_1, \ldots, h_n)$ [8], определяющие характер деформации верхней границы n-слойного основания под действием приложенных к ней нагрузок. Эти функции строятся с помощью рекуррентных соотношений и обладают следующими свойствами:

задача 1:

$$A_n(\alpha, h_1, \ldots, h_n) \sim 1-4h_1^2(1+\Delta_1)^{-1}\alpha^2 e^{-2\alpha h_1}, \quad (n\geqslant 2), \quad \alpha\to\infty \tag{3.9}$$

$$\lim_{\alpha\to 0} A_n(\alpha, h_1, \ldots, h_n)=0$$

задача 2:

$$A_n(\alpha)=1-(\alpha^2h_1^2+\alpha h_1)Me^{-2\alpha h_1}+o(e^{-2\alpha h_1}), \quad \alpha\to\infty$$

$$A_n(\alpha)=\alpha\left(k_1h_1+\frac{k_2h_2}{\Delta_1}+\ldots+\frac{k_nh_n}{\Delta_1\Delta_2\ldots\Delta_{n-1}}\right)+o(\alpha^2), \quad \alpha\to 0 \tag{3.10}$$

где $\Delta_k=E_{k+1}(1-\nu_k^2)/(E_k(1-\nu_{k+1}^2))$, h_k, E_k, ν_k — соответственно толщина, модуль Юнга и коэффициент Пуассона k-го слоя; $A_k(\alpha, h_1, \ldots, h_k)$ — функция податливости в нормальном направлении к границе слоя $k_j={}^1/_2(1-2\nu_j)/(1-\nu_j)$ $j=1, 2, \ldots$

Ниже изложим метод построения функции $L(\alpha)$ в общем случае непрерывной неоднородности.

4. Построение функции L(α). Рассмотрим вспомогательные задачи 1*, 2* со следующими граничными условиями:

$$\tau_{xy}(x,0)=0, \qquad \sigma_y(x,0)=\begin{cases} 0, & |x|>a \\ -q(x), & |x|\leqslant a \end{cases} \tag{4.1}$$

При $y=-H$ выполнены соответственно условия (2.2) и (2.3).

Введем обозначения

$$w_1=U, \quad w_2=U', \quad w_3=V, \quad w_4=V' \tag{4.2}$$

(Здесь штрих означает дифференцирование по y.) Систему (2.16) перепишем в матричном виде

$$dw/dy = Aw \tag{4.3}$$

$$A = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha^2 \dfrac{2M+\Lambda}{M} & -\dfrac{M'}{M} & -\alpha \dfrac{M'}{M} & -\alpha \dfrac{M+\Lambda}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha \dfrac{\Lambda'}{2M+\Lambda} & \alpha \dfrac{M+\Lambda}{2M+\Lambda} & \alpha^2 \dfrac{M}{2M+\Lambda} & -\dfrac{2M'+\Lambda'}{2M+\Lambda} \end{matrix} \right\|, \quad w = \left\| \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{matrix} \right\|$$

Общее решение системы (3.4) при условии $\Lambda' = M' = 0 \, (M \neq 0)$ имеет вид

$$U(\alpha, y) = (d_1 + |\alpha| y d_2) e^{-|\alpha| y} + (d_3 + |\alpha| y d_4) e^{|\alpha| y}$$

$$V(\alpha, y) = \operatorname{sgn} \alpha (-d_1 - \varkappa d_2 - |\alpha| y d_2) e^{-|\alpha| y} +$$

$$+ \operatorname{sgn} \alpha (d_3 - \varkappa d_4 + |\alpha| y d_4) e^{|\alpha| y}$$

$$\varkappa = 3 - 4\nu = (\Lambda + 3M) / (\Lambda + M)$$

$d_i (i = 1, \ldots, 4)$ — произвольные функции параметра α.

Решение $w(\alpha, y)$ системы (4.3) строим методом моделирующих функций [6]. Ищем $w(\alpha, y)$ в виде

$$w(\alpha, y) = \sum_{i=1}^{4} d_i(\alpha) \mathbf{a}_i(\alpha, y) e^{\gamma_i y}, \qquad \gamma_{1,2} = -\alpha, \qquad \gamma_{3,4} = \alpha \tag{4.4}$$

Здесь векторы $\mathbf{a}_i(\alpha, y)$ $(i = 1, \ldots, 4)$ находим из следующих задач Коши:

$$\frac{d\mathbf{a}_i}{dy} = A\mathbf{a}_i - \gamma_i \mathbf{a}_i, \qquad y \in [-H; 0] \tag{4.5}$$

с начальными условиями

$$\mathbf{a}_1(\alpha, -H) = (1, -\alpha, -1, \alpha)$$

$$\mathbf{a}_2(\alpha, -H) = (\alpha y, \alpha - \alpha^2 y; -\varkappa - \alpha y, -\varkappa\alpha - \alpha + \alpha^2 y)|_{y=-H}$$

$$\mathbf{a}_3(\alpha, -H) = (1, \alpha, 1, \alpha)$$

$$\mathbf{a}_4(\alpha, -H) = (\alpha y, \alpha + \alpha^2 y, -\varkappa + \alpha y, -\varkappa\alpha + \alpha + \alpha^2 y)|_{y=-H}$$

Постоянные $d_i(\alpha)$ $(i = 1, \ldots, 4)$ определяются из условий (3.1), (2.2), (2.3). В частности для задачи 1:

$$\Sigma d_i(\alpha) \, [-\Lambda(0) \alpha a_i^1(\alpha, 0) + (\Lambda(0) + 2M(0)) a_i^4(\alpha, 0)] = \theta_0 \alpha$$

$$\Sigma d_i(\alpha) \, [a_i^2(\alpha, 0) + \alpha a_i^3(\alpha, 0)] = 0 \tag{4.6}$$

$$\Sigma d_i(\alpha) a_i^1(\alpha, -H) = 0, \quad \Sigma d_i(\alpha) a_i^3(\alpha, -H) = 0 \tag{4.7}$$

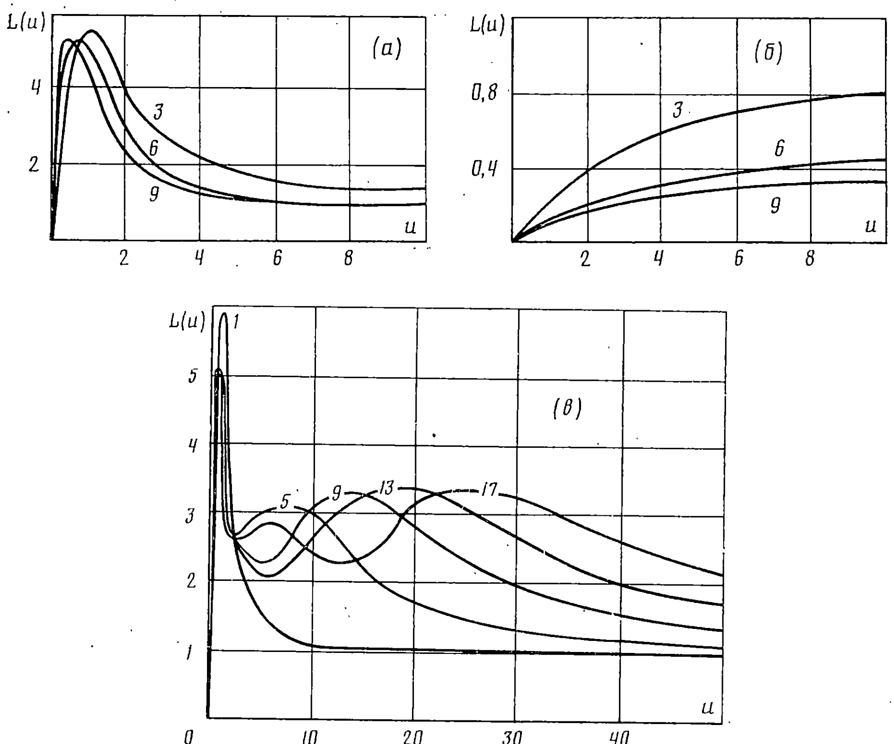
Для задачи 2 уравнения (4.7) надо заменить на следующие:

$$\sum d_i(\alpha) a_i^3(\alpha, -H) = 0, \qquad \sum d_i(\alpha) \, [a_i^2(\alpha, -H) + \alpha a_i^3(\alpha_1 - H)] = 0 \tag{4.8}$$

Здесь через $a_i^k(\alpha, y)$ обозначена k-я компонента вектора $\mathbf{a}_i(\alpha, y)$, а суммы берутся по $i = 1, \ldots, 4$.

Из (3.6) окончательно получим

$$L(\alpha) \equiv V^*(\alpha, 0) = \sum_{i=1}^{4} d_i(\alpha) a_i^3(\alpha, 0) \tag{4.9}$$



Фиг. 1

Можно показать, аналогично [9], что построенная функция $L(\alpha)$ обладает следующими свойствами (A, B, C — некоторые постоянные):

$$L(\alpha)=A|\alpha|+B|\alpha|^2+o(\alpha^3), \quad \alpha\to 0$$
$$L(\alpha)=1+C|\alpha|^{-1}+o(\alpha^{-2}), \quad \alpha\to\infty \qquad (4.10)$$

Сравнивая (3.9), (3.10) и (4.10), заметим, что функции $L(\alpha)$ для непрерывно неоднородных и многослойных сред различаются по скорости убывания при $\alpha\to 0$, $\alpha\to\infty$.

На фиг. 1 приведены графики трансформант ядер интегральных уравнений $L(\alpha)$, построенных численно для случая задачи 1, когда модуль Юнга полосы с глубиной изменяется по закону $E(y)=E_0 f(y)$, $-H\leqslant y\leqslant 0$, а коэффициент Пуассона $\nu={}^1/_3$.

Рассматриваются следующие виды неоднородности. Степенной закон, убывающий с глубиной (фиг. 1, *а*):

$$f(y)=1{,}1-y^{2a_k}, \qquad a_k=\frac{\ln(1{,}1-k/10)}{2\ln 0{,}5}, \qquad k=3,6,9 \qquad (4.11)$$

Степенной закон, возрастающий с глубиной (фиг. 1, *б*):

$$f(y)=0{,}1+y^{2a_k}, \qquad a_k=\frac{\ln 0{,}1(k-1)}{2\ln 0{,}5}, \qquad k=3,6,9 \qquad (4.12)$$

Синусоидальный закон (фиг. 1, *в*):

$$f(y)=1{,}1+\sin(k\pi y/2), \quad k=1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17 \qquad (4.13)$$

Цифры у кривых соответствуют значениям k. Приведенные графики подтверждают свойства (4.10).

5. Некоторые вспомогательные утверждения об аппроксимации трансформанты ядра интегрального уравнения (3.6). Введем следующие обозначения

$$L_{\Pi}^N(\alpha)=\prod_{n=1}^{N}\frac{\alpha^2+\delta_n^2}{\alpha^2+\gamma_n^2},\qquad L_{\Sigma}^M(\alpha)=\sum_{k=1}^{M}\frac{c_k|\alpha|}{\alpha^2+\eta_k^2}\tag{5.1}$$

Покажем, что функцию $L(\alpha)$, обладающую свойствами (4.12), можно аппроксимировать выражениями вида

$$L(\alpha)=\operatorname{th}A\alpha[L_{\Pi}^N(\alpha)+L_{\Sigma}^M(\alpha)]\ .\tag{5.2}$$

Для этого используем лемму [10].

Лемма 5.1. Пусть четная, вещественная, непрерывная на всей действительной оси функция $\varphi(\alpha)$ обращается в нуль на бесконечности, тогда она допускает приближение в $C(-\infty,\infty)$ рядами из функций вида

$$\varphi_k=(\alpha^2+\eta_k^2)^{-1}\tag{5.3}$$

Эту лемму применим для доказательства следующего утверждения:

Теорема 5.1. При условии, что функция $L(\alpha)$ обладает свойствами (4.10), она допускает аппроксимацию выражениями вида (5.2).

Доказательство. Выберем постоянные δ_n, γ_n $(n=1,\ldots,N)$ в (5.1) так, чтобы $\prod\limits_{n=1}^{N}\delta_n^2\gamma_n^{-2}=C.$

Рассмотрим функцию

$$L_{\Sigma}(\alpha)=L(\alpha)/|\alpha|\operatorname{th}A\alpha-L_{\Pi}^N(\alpha)/|\alpha|\operatorname{th}A\alpha\tag{5.4}$$

Из условия (4.12) следует, что функция $F(\alpha)=L(\alpha)/|\alpha|\operatorname{th}A\alpha$ обладает следующим свойством:

$$F(\alpha)=|\alpha|^{-1}+o(\alpha^{-2}),\quad \alpha\to\infty\tag{5.5}$$

Тогда $L_{\Sigma}(\alpha)$ удовлетворяет условию леммы 5.1, т. е. имеет место представление

$$L_{\Sigma}(\alpha)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k}{\alpha^2+\eta_k^2}\tag{5.6}$$

или из условий (5.4), (5.6):

$$L(\alpha)=\operatorname{th}A\alpha\left[L_{\Pi}^N(\alpha)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k|\alpha|}{\alpha^2+\eta_k^2}\right]\tag{5.7}$$

Для определения коэффициентов аппроксимации δ_n, γ_n при реализации метода на ЭВМ используем эффективный алгоритм, описанный в [11].

6. Асимптотические свойства решения интегрального уравнения (3.6) при малых и больших λ ($\lambda\to 0$, $\lambda\to\infty$). Ниже, используя следующие соотношения

$$\Phi(\alpha)=\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)e^{i\alpha\xi}\,d\xi,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\alpha)e^{-i\alpha x}\,d\alpha=\begin{cases}2\pi\varphi(x), & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}\tag{6.1}$$

перепишем (3.6) в виде парного интегрального уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\alpha)\frac{L(\lambda\alpha)}{|\alpha|}e^{-i\alpha x}\,d\alpha=2\pi g(x), \qquad |x|\leqslant 1$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\alpha)e^{-i\alpha x}\,d\alpha=0, \qquad |x|>1 \tag{6.2}$$

причем $L(\lambda\alpha)$ аппроксимируется выражением вида

$$L(\lambda\alpha)=\operatorname{th}A\lambda\alpha\prod_{n=1}^{N}\frac{\alpha^2+\delta_n^2\lambda^{-2}}{\alpha^2+\gamma_n^2\lambda^{-2}} \tag{6.3}$$

Пусть функция $g(x)$ может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\pi x+b_k\sin k\pi x) \tag{6.4}$$

Тогда, используя метод работы [12], получим выражение для напряжений вида

$$\varphi_+(x)=\frac{a_0}{2}\frac{\theta}{Q_{-1/2}[2(\operatorname{ch}\theta-\operatorname{ch}\theta x)]^{1/2}}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{\operatorname{th}(A\lambda k\pi)}{L(\lambda k\pi)}\times$$
$$\times F\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}+i\frac{k\pi}{\theta},\ x\right)+\sum_{n=1}^{N}C_nF\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}+\frac{\delta_n}{\lambda\theta},\ x\right)$$
$$F(u,v,x)=\theta\operatorname{sh}\theta\frac{Q_uP_v^1-P_vQ_u^1}{Q_u[2(\operatorname{ch}\theta-\operatorname{ch}\theta x)]^{1/2}}-$$
$$-\theta^2\left(v+\frac{1}{2}\right)^2\int_x^1\frac{P_v(\operatorname{ch}\theta\tau)\operatorname{sh}\theta\tau\,d\tau}{[2(\operatorname{ch}\theta\tau-\operatorname{ch}\theta x)]^{1/2}} \tag{6.5}$$

Здесь и далее индекс плюс соответствует четной части $\varphi(x)$, а индекс минус — нечетной; $\theta=\pi/(A\lambda)$; A, δ_n, γ_n — коэффициенты аппроксимации трансформанты ядра интегрального уравнения; $P_u^\mu\equiv P_u^\mu(\operatorname{ch}\theta)$, $Q_u^\mu\equiv$ $\equiv Q_u^\mu(\operatorname{ch}\theta)$ — присоединенные функции Лежандра.

Коэффициенты C_n находятся из следующей линейной алгебраической системы уравнений (сумма по $n=1,\ldots,N$):

$$\sum x_n=f_m+\sum a_{mn}x_n \qquad (m=1,\ldots,N) \tag{6.6}$$
$$x_n=Q^1_{-1/2}P_{-1/2+\delta n/\lambda\theta}C_n$$
$$a_{mn}=\frac{Q_{-1/2}}{Q^1_{-1/2}}R\left(-\frac{1}{2}+\frac{\delta_n}{\lambda\theta},\ -\frac{1}{2}+\frac{\gamma_m}{\lambda\theta}\right)$$
$$f_m=\frac{a_0}{2}\operatorname{sh}^{-1}\theta+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{\operatorname{th}(A\lambda k\pi)}{L(\lambda k\pi)}\frac{(k\pi)^2}{Q_{-1/2+\gamma_m/\lambda\theta}}\times$$

$$\times E\left(-\frac{1}{2}+i\frac{k\pi}{\theta},\ -\frac{1}{2}+\frac{\gamma_m}{\lambda\theta},\ -\frac{1}{2}\right)$$

$$R(u,v)=\frac{(u+{}^1/_2)^2P_uQ_v{}^1-(v+{}^1/_2)^2P_u{}^1Q_v}{(u-v)(u+v+1)P_uQ_v}$$

$$E(u,v,w)=Q_wT(u,v)-Q_vT(u,w)$$

$$T(u,v)=\frac{P_uQ_v{}^1-Q_vP_u{}^1}{[(u+{}^1/_2)^2-(v+{}^1/_2)^2]\theta^2}$$

$$\varphi_-(x)=-\operatorname{sh}\theta x\left[\sum_{k=1}^{\infty}b_k\frac{\operatorname{th}(A\lambda k\pi)}{L(\lambda k\pi)}k\pi S\left(-\frac{1}{2}+i\frac{k\pi}{\theta},x\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{N}D_n\delta_n\lambda^{-1}S\left(-\frac{1}{2}+\frac{\delta_n}{\lambda\theta},x\right)\right] \qquad (6.7)$$

$$S(u,x)=\frac{P_u(\operatorname{ch}\theta)}{[2(\operatorname{ch}\theta-\operatorname{ch}\theta x)]^{1/2}}-\theta\int_x^1\frac{P_u{}^1(\operatorname{ch}\theta\tau)}{[2(\operatorname{ch}\theta\tau-\operatorname{ch}\theta x)]^{1/2}}d\tau$$

Коэффициенты D_n находим из системы уравнений:

$$\sum_{n=1}^{N}a_{mn}x_n=f_m,\quad m=1,2,\ldots,N \qquad (6.8)$$

$$x_n=D_n\delta_n\lambda^{-1},\quad a_{mn}=T(-{}^1/_2+\delta_n/\lambda\theta,\ -{}^1/_2+\gamma_m/\lambda\theta)$$

$$f_m=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\frac{\operatorname{th}(A\lambda k\pi)}{L(\lambda k\pi)}k\pi T\left(-\frac{1}{2}+i\frac{k\pi}{\theta},-\frac{1}{2}+\frac{\gamma_m}{\lambda\theta}\right)$$

И окончательно, в соответствии с принципом суперпозиции

$$\varphi(x)=\varphi_+(x)+\varphi_-(x) \qquad (6.9)$$

Связь между вдавливающей силой и осадкой штампа определим, подставив выражение (6.5) в условие равновесия штампа

$$P=\int_{-1}^{1}\varphi(x)\,dx \qquad (6.10)$$

Отсюда

$$P=\frac{\pi\delta}{Q_{-1/2}}\left\{\frac{a_0}{2}P_{-1/2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{\operatorname{th}(A\lambda k\pi)}{L(\lambda k\pi)}P_{-1/2+ik\pi/\theta}+\sum_{n=1}^{N}C_nP_{-1/2+\delta_n/\lambda\theta}\right\} \qquad (6.11)$$

где a_k $(k=0,1,\ldots)$ — коэффициенты разложения функции $g(x)$ в ряд Фурье, т. е. $a_k=\int_{-1}^{1}g(x)\cos k\pi x\,dx$, $k=0,\ 1,\ 2,\ldots$. В общем случае $L(\alpha)$ вида (5.2) решение уравнения (3.6) строится методом последовательных приближений.

Перепишем уравнение (3.6) в операторном виде

$$\Pi_N\varphi+\Sigma_M\varphi=f \qquad (6.12)$$

Ниже интегральный оператор, соответствующий функции $L(\alpha)$, принадлежащей классу A, будем также обозначать через A. В (6.12) оператор Π_N соответствует в уравнении (3.6) функции $L(\alpha)$ вида (6.3), а $\Sigma_M - L(\alpha)$ вида $\operatorname{th} AL_\Sigma{}^M(\alpha)$ ($L_\Sigma{}^M(\alpha)$ из (5.1)). Не нарушая общности, полагаем $M=1$, имеем

$$\Sigma_1\varphi=\frac{\pi}{\eta}B\lambda^{-1}\left[2\theta\eta\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{-t_l{}^2+\eta^2}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)e^{-t_l|\xi-x|}\,d\xi+\right.$$

$$\left.+\operatorname{tg}\frac{\pi\eta}{\theta}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)e^{-\eta|\xi-x|}\,d\xi\right]$$

Здесь $\eta=\eta'\lambda^{-1}$, $\theta=\pi/(A\lambda)$, $t_l=1/2\theta(2l-1)$, $l=1, 2,\ldots$; B, η' — некоторые постоянные.

Представим $\Sigma_1\varphi$ в виде ряда

$$\Sigma_1\varphi=\frac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(C_k{}^+\cos k\pi x+c_k{}^-\sin k\pi x)$$

Коэффициенты $c_k{}^\pm$ находятся по формулам:

$$c_k{}^\pm=4\pi B\lambda^{-1}\left\{\left(2\theta\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\tau}{t_l{}^2+k^2\pi^2}+\frac{t}{\eta^2+k^2\pi^2}\right)\int_0^1\varphi_\pm(\xi)h^\pm(ik\pi\xi)\,d\xi+\right.$$

$$\left.+(-1)^{k+1}\left[2\theta\sum_{l=1}^{\infty}\tau e(t_l)\int_0^1\varphi_\pm(\xi)h^\pm(t_l\xi)\,d\xi+te(\eta)\int_0^1\varphi_\pm(\xi)h^\pm(\eta\xi)\,d\xi\right]\right\}\tag{6.13}$$

$$\tau=\frac{t_l}{\eta^2-t_l{}^2},\quad t=\operatorname{tg}\frac{\pi\eta}{\theta},\quad e(a)=(a^2+\eta^2)\exp(a)$$

$$h^+(a\xi)=\operatorname{ch}a\xi,\quad h^-(a\xi)=k\pi a^{-1}\operatorname{sh}a\xi$$

Используя (6.13), получим следующую оценку

$$\max_{x\in[-1,1]}|\Sigma_1\varphi\sqrt{1-x^2}|\leqslant|c_0|+\sum_{k=1}^{\infty}(|c_k{}^+|+|c_k{}^-|)\leqslant\lambda M^*,\quad\lambda\to0\quad(\lambda<\lambda^*)\tag{6.14}$$

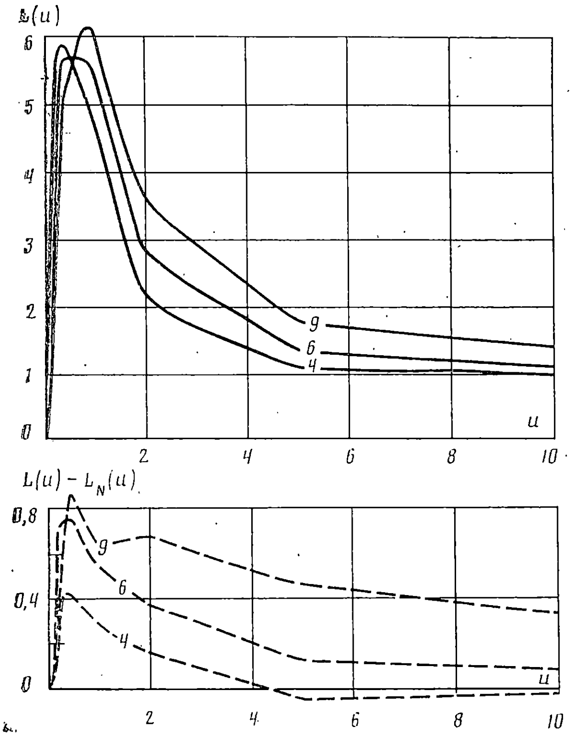
а также оценку, аналогичную (6.14) для $\lambda\to\infty$ ($\lambda>\lambda^0$), при замене правой части на $\lambda^{-1}M^0$, где M^*, M^0 не зависят от λ. Поэтому из (6.10) следует, что λ можно выбирать таким образом, что оператор $\Pi_N{}^{-1}\Sigma_M$ будет оператором сжатия [13].

Применяя далее к уравнению

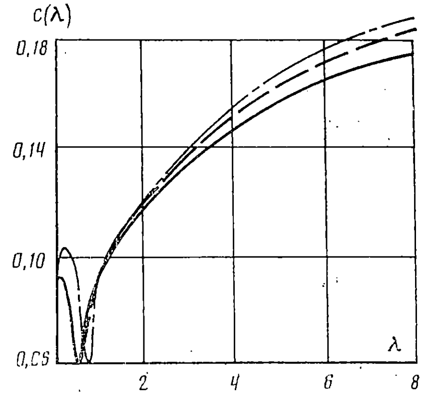
$$\varphi+\Pi_N{}^{-1}\Sigma_M\varphi=\Pi_N{}^{-1}f\tag{6.15}$$

принцип Банаха сжатых отображений, получим доказательство существования и единственности решения уравнения (6.7) при $0<\lambda<\lambda^*$ и $\lambda>\lambda^0$ где λ^* и λ^0 — некоторые фиксированные значения λ, т. е. доказана

Теорема 6.1. Уравнение (3.6) однозначно разрешимо в пространстве $C_{k+1/2}^{(k)}(-1,1)$ при $L(u)$ вида (5.2), если $f(x)\in B_{k+2}^{1/2+\varepsilon}(-1,1)$, $\varepsilon>0$ при



Фиг. 2



Фиг. 3

$0<\lambda<\lambda^*$, $\lambda>\lambda^0$, где λ^*, λ^0 — некоторые фиксированные значения λ и имеет место оценка

$$\| \varphi(x) \|_{C^{(k)}_{k+1/2}(-1,1)} \leqslant m(\Pi_N, \Sigma_M, k) \| g(x) \|_{B^{1/2+\varepsilon}_{k+2}(-1,1)}.$$

7. Пример. На фиг. 2 приведены графики трансформант ядер $L(u)$, соответствующие степенному закону неоднородности (4.11) при $k=4$, $k=6$ и $k=9$ (сплошные кривые), штриховые кривые соответствуют разности между точным и аппроксимирующим значением трансформанты ядра вида (6.3) при $N=10$.

Изменение величины $c(\lambda)=\delta_н/\delta_0$, характеризующей влияние неоднородности основания на осадку штампа $\delta_н$ по сравнению с однородной полосой δ_0 при одной и той же величине вдавливающей силы P, в зависимости от λ показано на фиг. 3. Значения $c(\lambda)$ получены двухсторонним асимптотическим методом при $\gamma(\chi)=0$. Сплошная кривая соответствует $k=4$, штриховая — $k=6$, штрихпунктирная — $k=9$. Из фиг. 3 видно, что при $\lambda<1$ для одного и того же вида неоднородности имеют место одинаковые значения $c(\lambda)$ для двух разных толщин неоднородной полосы при неизменных величинах вдавливающей силы и радиуса штампа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493 с.
3. *Gibson R. E., Brown P. T., Andrews K. R. F.* Some results concerning displacements in a non-homogeneous elastic layer // Z. angew. Math. and Phys. 1971. Bd. 22, H. 5. S. 855–864.
4. *Никишин В. С.* Задачи теории упругости для неоднородных сред. М.: ВЦ АН СССР, 1976. 60 с.
5. *Наумов Ю. А., Шевляков Ю. А., Чистяк В. И.* К решению основных задач теории упругости для слоя с произвольной неоднородностью по толщине // Прикл. механика. 1970. Т. 6. № 7. С. 25–31.

6. Статические и динамические смешанные задачи теории упругости. Ростов-на-Дону: Ростов. ун-т, 1983. 263 с.
7. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
8. *Приварников А. К.* Пространственная деформация многослойного основания // Устойчивость и прочность элементов конструкций. Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1973. С. 27–45.
9. *Айзикович С. М., Александров В. М.* О свойствах функций податливости, соответствующих слоистому и непрерывно-неоднородному полупространству // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 1. С. 40–43.
10. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. Т. 1. 615 с.; Т. 2. 537 с.
11. *Айзикович С. М.* Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред // ПММ. Т. 46. Вып. 1, 1982. С. 148–158.
12. *Зеленцов В. Б.* О решении одного класса интегральных уравнений // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 815–820.
13. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
27.VI.1989