МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1991

УДК 539.3

С. В. КУЗНЕЦОВ

ЭНЕРГИЯ ОБРАЗОВАНИЯ ДИСЛОКАЦИИ В АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Определение энергии образования дислокации в анизотропных упругих средах представляет собой весьма важную задачу в связи с описанием поведения различных кристаллов. Имеющиеся весьма немногочисленные исследования в этом направлении посвящены главным образом изотропным [1–3] или гексагональным [4] кристаллам, когда в явном виде удается построить фундаментальные решения уравнений равновесия. В работах [5, 6] рассматривается несколько более простой случай взаимодействия двух удаленных дислокационных петель друг с другом. Ниже получено выражение для энергии образования дислокации Вольтерра в анизотропной упругой среде с анизотропией общего вида.

1. Основные уравнения. Рассматривается однородная анизотропная упругая среда, уравнения равновесия которой имеют вид

$$\mathbf{A}(\partial_x)\mathbf{u} \equiv -\operatorname{div} \mathbf{C}[\nabla \mathbf{u}] = 0 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{A}$ — матричный дифференциальный оператор уравнений равновесия; $\mathbf{u}$ — вектор перемещений; $\mathbf{C}$ — четырехвалентный тензор, называемый тензором упругости. Предполагается, что тензор $\mathbf{C}$ строго эллиптичен, т. е.

$$\mathbf{s}\cdot\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{s} > 0, \quad \forall \mathbf{s},\ \mathbf{s}=\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^3, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \neq 0 \tag{1.2}$$

Кроме того, предполагается, что исследуемая среда является гиперупругой. Таким образом, тензор $\mathbf{C}$ симметричен, как оператор, действующий в шестимерном пространстве симметричных тензоров второго ранга.

Поле перемещений в среде, вызванное дислокацией Вольтерра, дается потенциалом простого слоя

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_\Omega \mathbf{b}(\mathbf{y}')\cdot\mathbf{T}_{\nu_y}\mathbf{E}(\mathbf{x}-\mathbf{y}')\,dy' \tag{1.3}$$

обеспечивающим необходимый разрыв смещений при переходе через зону Ω, занятую дислокацией. В формуле (1.3) $\mathbf{T}_\nu$ — оператор напряжений

$$\mathbf{T}_\nu(\partial_x)\mathbf{u} \equiv \boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{C}[\nabla\mathbf{u}] \tag{1.4}$$

$\boldsymbol{\nu}$ — вектор единичной нормали к поверхности, несущей дислокацию; $\mathbf{E}$ — фундаментальное решение уравнений равновесия; $\mathbf{b}$ — вектор Бюргерса. В дальнейшем предполагается, что дислокация занимает некоторую плоскую область Ω на плоскости Π. Эта плоскость Π отождествляется с координатной плоскостью при $x_3=0$, а вектор $\boldsymbol{\nu}$ имеет компоненты $(0, 0, 1)$.

Замечание 1. В случае изотропной упругой среды и постоянного вектора Бюргерса интегралы по Ω в (1.3) удается свести к контурным интегралам по границе $\partial\Omega$ [7, 8]. Однако, энергия образования такой дислокации, называемой иногда дислокационной петлей, оказывается бесконечной из-за слишком большой особенности поля напряжений вблизи от петли $\partial\Omega$. Для получения конечных значений энергии выделяют тороидеальную окрестность $V_{\partial\Omega}$, а интегрирование проводят в $R^3 \setminus V_{\partial\Omega}$ [1—4]. Другой путь получения конечных значений энергии связан с рассмотрением дислокаций, у которых вектор Бюргерса является переменным так, чтобы поле перемещений, даваемое (1.3), было непрерывным на П, а напряжения имели особенность не выше корневой в окрестности $\partial\Omega$. В этом случае энергия образования дислокации оказывается конечной, но интеграл по Ω в (1.3) уже не сводится к контурному, даже для изотропной среды. Этот случай дислокаций Вольтерра исследуется ниже.

Напряжения на плоскости П и, в частности, в области Ω определяются как предел по некасательным направлениям

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}') = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}'} \mathbf{T}_{-\nu}(\partial_x) \int_\Omega \mathbf{b}(\mathbf{y}') \cdot \mathbf{T}_\nu(\partial_y) \mathbf{E}(\mathbf{x}-\mathbf{y}')\, dy'$$

$$(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{x}'} > 0 \qquad (1.5)$$

существующий почти всюду на П при $\mathbf{b} \in L^2$ [9]. В формуле (1.5) напряжения определяются при подходе к П из «верхнего» полупространства (при $x_3 > 0$).

Энергия образования дислокации определяется выражением [1—3]:

$$W = {}^1/_2 \int_\Omega \mathbf{t}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}')\, dx' = {}^1/_2 \int_\Omega \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}'} \mathbf{T}_{-\nu}(\partial_x) \int_\Omega \mathbf{b}(y') \cdot \mathbf{T}_\nu(\partial_y) \mathbf{E}(\mathbf{x}-\mathbf{y}')\, dy'\, dx' \qquad (1.6)$$

Необходимо заметить, что использование выражений (1.5), (1.6) неудобно по двум причинам: во-первых, непосредственный переход к пределу под интегралом при вычислении $\mathbf{t}(\mathbf{x}')$ невозможен из-за сверхсингулярности ядра; во-вторых, при произвольной анизотропии упругой среды получение фундаментального решения наталкивается на определенные трудности [5].

Замечание 2. В случае изотропного упругого тела выражение (1.5) удается свести к псевдодифференциальному оператору от $\mathbf{b}$ класса S^1 [10—12]. Для анизотропной упругой среды с анизотропией общего вида, несмотря на отдельные публикации [13, 14], такой оператор в явном виде построить не удалось.

2. Сужение потенциала двойного слоя на плоскость П. Для построения псевдодифференциального оператора по (1.5) необходимо рассмотреть сужение потенциала двойного слоя (1.3) на несущую плоскость П. Рассмотрим преобразование Фурье

$$f^\vee(\xi) = \int_{R^n} f(\mathbf{x})\, e^{-2\pi i \mathbf{x}\cdot\xi} dx, \quad \xi \in R^n, \quad f \in L^2(R^n) \qquad (2.1)$$

основных операторов, введенных ранее. Это позволяет получить соответствующие символы

$$\mathbf{A}^\vee(\xi) = (2\pi)^2 \xi \cdot \mathbf{C} \cdot \xi, \quad \mathbf{T}_\nu^\vee(\xi) = (2\pi i) \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{C} \cdot \xi, \quad \mathbf{E}^\vee(\xi) = \mathbf{A}^{\vee -1}(\xi) \qquad (2.2)$$

Принимая во внимание, что $\boldsymbol{\nu} = (0, 0, 1)$, из (2.2) вытекает следующее представление для символа $\mathbf{T}_\nu^\vee$:

$$\mathbf{T}_\nu^\vee(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\mathbf{A}^\vee(\xi) - \mathbf{A}^\vee(\xi')}{\xi_3} - \mathbf{T}_\nu^{\vee t}(\xi') \qquad (2.3)$$

где $\mathbf{T}_\nu^{\vee t} = (2\pi i) \xi \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\nu}$ — транспонированный к $\mathbf{T}_\nu^\vee$ символ, а вектор $\xi' \in$ П представляет собой проекцию ξ на плоскость П.

Преобразование Фурье потенциала двойного слоя (1.3) с учетом (2.3) дает

$$\mathbf{u}^{\vee}(\xi)=-\mathbf{b}^{\sim}(\xi')\cdot\mathbf{T}_{\nu}^{\vee}(\xi)\cdot\mathbf{E}^{\vee}(\xi)=\mathbf{b}^{\sim}(\xi')\cdot\left[\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\mathbf{I}}{\xi_3}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\mathbf{A}^{\vee}(\xi')\frac{\mathbf{E}^{\vee}(\xi)}{\xi_3}\right)+\mathbf{T}_{\nu}^{\vee t}(\xi')\cdot\mathbf{E}^{\vee}(\xi)\right] \tag{2.4}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная диагональная матрица, а символ «$\sim$» обозначает частичное преобразование Фурье по переменным, лежащим в плоскости П. Принимая во внимание преобразование Гильберта

$$Hf(z)=\text{v. p.}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(z-\zeta)}{\zeta}d\zeta,\qquad f\in L^2(R^1) \tag{2.5}$$

и тот факт, что мультипликатором сингулярного оператора (2.5) является $-i\operatorname{sgn} x$ [15], из (2.4) следует

$$\mathbf{W}_{\pm}^{\sim}(\xi';0)=\pm\mathbf{I}/2+\mathbf{S}^{\sim}(\xi')$$

$$\mathbf{S}^{\sim}(\xi')=-\frac{\mathbf{A}^{\vee}(\xi')}{2\pi i}\text{v. p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathbf{E}^{\vee}(\xi)}{\xi_3}d\xi_3+\mathbf{T}_{\nu}^{\vee t}(\xi')\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}^{\vee}(\xi)\,d\xi_3 \tag{2.6}$$

где $\mathbf{W}_{\pm}^{\sim}$ — символ оператора (2.4) при сужении последнего на плоскость П. Нижние индексы $\pm$ в (2.6) указывают на соответствующие пределы при $x_3\to\pm0$. Первый несобственный интеграл в (2.6) определен как интеграл в смысле главного значения, а второй — абсолютно сходится при любых $\xi'\neq0$, что вытекает из эллиптичности $\mathbf{E}^{\vee}$ и асимптотической оценки $|E^{\vee}(\xi)|=O(|\xi_3|^{-2})$, $|\xi_3|\to\infty$, выполняющейся ввиду $(2.2)_3$.

Предложение 1. Матричный символ $\mathbf{S}^{\sim}(\xi')$ из (2.6) является символом матричного сингулярного оператора на П.

Доказательство. Формулы (2.2), (2.6) показывают, что $\mathbf{S}^{\sim}(\xi')$ вещественно-аналитичен всюду в $R^2\backslash0$. Анализ несобственных интегралов

$$\text{v. p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathbf{E}^{\vee}(\xi',\xi_3)}{\xi_3}d\xi_3,\qquad\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}^{\vee}(\xi',\xi_3)\,d\xi_3$$

показывает, что первый из них дает символ, однородный по $|\xi'|$ степени -2, в то время как второй,— приводит к символу, однородному по $|\xi'|$ степени -1. Последующее домножение этих интегралов на символы $\mathbf{A}^{\vee}(\xi')$, $\mathbf{T}_{\nu}^{\vee t}(\xi')$ соответственно приводит к однородному степени 0 символу $\mathbf{S}^{\sim}(\xi')$. Применение теоремы Марцинкевича о мультипликаторах завершает доказательство этого предложения.

3. Напряжения на плоскости П. Запишем формулу Сомильяна для верхнего полупространства

$$\int_{\pi}\mathbf{t}(\mathbf{y}')\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x}-\mathbf{y}')\,dy'-\int_{\pi}\mathbf{u}(\mathbf{y}')\cdot\mathbf{T}_{\nu}(\partial_y)\mathbf{E}(\mathbf{x}-\mathbf{y}')\,dy'=\begin{cases}\mathbf{u}(\mathbf{x}',\mathbf{x}_3)\\ {}^1\!/_2\mathbf{u}(\mathbf{x}',0)\end{cases} \tag{3.1}$$

причем при $x_3=0$ второй интеграл в левой части (3.1) понимается в смысле главного значения. Преобразование Фурье формулы (3.1) при $x_3=0$ с учетом (2.6) дает

$$\mathbf{t}^{\sim}(\xi')\cdot\mathbf{E}^{\sim}(\xi',0)+\mathbf{u}^{\sim}(\xi')\cdot\mathbf{S}^{\sim}(\xi')={}^1\!/_2\mathbf{u}^{\sim}(\xi') \tag{3.2}$$

где $\mathbf{u}^{\sim}(\xi')=\mathbf{u}^{\sim}(\xi',0)$. Из (3.2) немедленно следует

$$\mathbf{t}^{\sim}(\xi')=\mathbf{u}^{\sim}(\xi')\cdot(\mathbf{I}/2-\mathbf{S}^{\sim}(\xi'))\cdot\mathbf{E}^{\sim-1}(\xi',0) \tag{3.3}$$

Преобразование Фурье по x' сужения на Π при $x^3\to+0$ потенциала двойного слоя (1.3) в соответствии с (2.6) дает

$$\mathbf{u}^{\sim}(\xi')=\mathbf{b}^{\sim}(\xi')\cdot(\mathbf{I}/2+\mathbf{S}^{\sim}(\xi')) \tag{3.4}$$

Объединение (3.3), (3.4) позволяет записать

$$\mathbf{t}^{\sim}(\xi')=\mathbf{b}^{\sim}(\xi')\cdot\mathbf{G}^{\sim}(\xi'),$$
$$\mathbf{G}^{\sim}(\xi')=(\mathbf{I}/4-\mathbf{S}^{\sim}(\xi')\cdot\mathbf{S}^{\sim}(\xi'))\cdot\mathbf{E}^{\sim-1}(\xi',0) \tag{3.5}$$

Непосредственный анализ (3.5) показывает, что матричный символ $\mathbf{G}^{\sim}$ однороден по $|\xi'|$ степени 1.

4. Энергия образования дислокации. Применяя формулу Планшереля к выражению для энергии (1.6), получаем

$$W=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\mathbf{t}(\mathbf{x}')\cdot\mathbf{b}(\mathbf{x}')\,dx'=\frac{1}{2}\int_{\pi}\mathbf{t}^{\sim}(\xi')\cdot\overline{\mathbf{b}^{\sim}(\xi')}\,d\xi' \tag{4.1}$$

С учетом представления (3.5) для $\mathbf{t}^{\sim}$ формула (4.1) принимает вид

$$W=\frac{1}{2}\int_{\pi}\mathbf{b}^{\sim}(\xi')\cdot\overline{\mathbf{G}^{\sim}(\xi')}\cdot\overline{\mathbf{b}^{\sim}(\xi')}\,d\xi' \tag{4.2}$$

Поскольку символ $\mathbf{G}^{\sim}$ однороден по $|\xi'|$ степени 1 для существования интеграла (4.2) необходимо, чтобы $\mathbf{b}\in H_0^{1/2}(\bar{\Omega}, R^3)$. Здесь через $H_0^{1/2}$ обозначено пространство вектор-функций с носителем в $\bar{\Omega}$ и таких, что конечна $H^{1/2}$-норма

$$\|\mathbf{b}\|^2_{H^{1/2}}=\int_{\pi}(1+|\xi'|^2)^{1/2}|\mathbf{b}^{\sim}(\xi')|^2\,d\xi'<\infty \tag{4.3}$$

При $\mathbf{b}\in H_0^{1/2}(\bar{\Omega}, R^3)$ выражение для энергии (4.2) может рассматриваться как некоторый квадратичный функционал от b.

Предложение 2. Формула для энергии:

$$W=\frac{1}{4}\int_{\pi}\mathbf{b}^{\sim}(\xi')\cdot(\mathbf{G}^{\sim t}(\xi')+\mathbf{G}^{\sim}(\xi'))\cdot\overline{\mathbf{b}^{\sim}(\xi')}\,d\xi' \tag{4.4}$$

Доказательство вытекает из выражения (4.1), обеспечивающего выполнение следующего равенства

$$\int_{\pi}\mathbf{b}^{\sim}(\xi')\cdot\mathbf{G}^{\sim t}(\xi')\cdot\overline{\mathbf{b}^{\sim}(\xi')}\,d\xi'=$$
$$=\int_{\pi}\mathbf{b}^{\sim}(\xi')\cdot\mathbf{G}^{\sim}(\xi')\cdot\overline{\mathbf{b}^{\sim}(\xi')}\,d\xi' \tag{4.5}$$

Формула (4.4) особенно удобна для приложений, поскольку функционал энергии оказывается выраженным через значения симметричной квадратичной формы $\mathbf{G}^{\sim t}+\mathbf{G}^{\sim}$. Вообще говоря, неизвестно, будет ли символ $\mathbf{G}^{\sim t}+\mathbf{G}^{\sim}$ строго эллиптичным; если он является таковым, то справедливо

Предложение 3. Если символ $\mathbf{G}^{\sim}$ строго эллиптичен, то функционал W коэрцитивен (и непрерывен) в $H_0^{1/2}$.

Доказательство. Непрерывность W в $H_0^{1/2}$ вытекает из определения $H^{1/2}$-нормы и однородности символа $\mathbf{G}^{\sim}$ по $|\xi'|$ степени 1. Для доказательства неравенства коэрцитивности

$$W(\mathbf{b}) \geqslant c\,\|\mathbf{b}\|^2_{H^{1/2}} \tag{4.6}$$

заметим, что в силу неравенства выпуклости

$$\|\mathbf{b}\|_{L^2} \geqslant \operatorname{mes}(\Omega)^{1/2-1/p} \quad \|\mathbf{b}\|_{L^p}, \qquad 1<p\leqslant 2 \tag{4.7}$$

Применение неравенства Харди — Литтлвуда — Соболева в теореме о дробном дифференцировании позволяет записать

$$\|\mathbf{b}\|_{L^{4/3}} \geqslant c'\|I_{1/2}(\mathbf{b})\|_{L^2} \tag{4.8}$$

где $I_{1/2}$ — потенциал Рисса порядка 1/2. Объединяя (4.7), (4.8) и применяя неравенство Гельдера, получаем следующую цепочку неравенств

$$\|\mathbf{b}\|_{L^2}\left(\int_\pi |\xi'|\,|\mathbf{b}^\sim(\xi')|^2\,d\xi'\right)^{1/2} \geqslant c\|I_{1/2}(\mathbf{b})\|_{L^2}\left(\int_\pi |\xi'|\,|\mathbf{b}^\sim(\xi')|^2\,d\xi'\right)^{1/2} =$$
$$= c\left(\int_\pi |\xi'|^{-1}|\mathbf{b}^\sim(\xi')|^2\,d\xi'\right)^{1/2}\left(\int_\pi |\xi'|\,|\mathbf{b}^\sim(\xi')|^2\,d\xi'\right)^{1/2} \geqslant c\|b\|_{L^2} \tag{4.9}$$

Неравенства (4.9) совместно с неравенствами выпуклости $2(1+|\xi'|^2)^{1/2} \geqslant 1+|\xi'| \geqslant (1+|\xi'|^2)^{1/2}$ доказывают коэрцитивность функционала W.

5. Круговые дислокации. Рассматривается круговая дислокация с вектором Бюргерса

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}') = \mathbf{b}_0\varphi_\delta(|x'|), \qquad \varphi_\delta(|x'|) = \begin{cases} (1-|x'|^2)^\delta, & |x'|\leqslant 1 \\ 0, & |x'|>0 \end{cases} \tag{5.1}$$

Предложение 4. Дислокации с вектором Бюргерса (5.1) при любых $\delta>0$ принадлежат пространству $H^{1/2}$.

Доказательство. В силу того, что φ_δ — радиальная функция, ее преобразование Фурье будет также радиальной функцией вида [15]:

$$\varphi_\delta^\sim(\xi') = \pi^{-\delta}\Gamma(\delta+1)\,|\xi'|^{-1-\delta}J_{1+\delta}(2\pi|\xi'|) \tag{5.2}$$

где $J_{1+\delta}$ — функция Бесселя. Имея ввиду асимптотические оценки функций Бесселя, из (5.2) следует

$$\varphi_\delta^\sim(\xi') = \begin{cases} O(1), & |\xi'|\to 0 \\ O(|\xi'|^{-3/2-\delta}), & |\xi'|\to\infty \end{cases} \tag{5.3}$$

Оценки (5.3) показывают, что $\varphi_\delta \in H^{1/2}$ при любых $\delta>0$.

Подстановка выражения (5.2) в функционал энергии дает

$$W(\mathbf{b}) = {}^1/_2\int_0^\infty \pi^{-2\delta}\Gamma^2(1+\delta)\,r^{-2\delta}J^2_{1+\delta}(2\pi r)\,dr\,\mathbf{b}_0\cdot\int_0^{2\pi}\mathbf{G}^\sim(\varphi)\,d\varphi\cdot\mathbf{b}_0$$
$$r=|\xi'|, \qquad \varphi=\arcsin \xi_2/|\xi'| \tag{5.4}$$

Анализ (5.4) показывает, что первый интеграл по r не зависит от физических свойств среды. Он может быть вычислен однажды и использоваться в качестве коэффициента k_δ при втором интеграле по единичной окружности. Обозначая значение второго интеграла через $\mathbf{G}_0$ и принимая во внимание формулу (4.4), окончательно получаем следующее выражение для определения энергии круговой дислокации (5.1):

$$W = {}^1/_4 k_\delta \mathbf{b}_0\cdot(\mathbf{G}_0{}^t+\mathbf{G}_0)\cdot\mathbf{b}_0. \tag{5.5}$$

Обозначая через $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$ собственные числа, а через $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ соответствующие собственные вектора $\mathbf{G}_0{}^t+\mathbf{G}_0$, естественно поставить задачу отыскания собственного вектора $\mathbf{b}_3$ реализующего минимум (5.5) при фиксированной ориентации круговой дислокации. Очевидно, для заданной ориентации дислокации этот вектор определяет собой наиболее вероятный тип дислокации в кристалле.

Автор выражает благодарность Р. В. Гольдштейну и И. С. Захаревичу за обсуждение результатов настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кренер Е.* Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. М.: Мир, 1965. 103 с.
2. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: ИЛ, 1963. 247 с.
3. *Nabarro F. R. N.* The mathematical theory of stationary dislocations // Adv. Phys. 1952. V. 1. N 3. P. 269–394.
4. *Chou Y. T., Eshelby J. D.* The energy and line tension of a dislocation in a hexagonal crystal // J. Mech. Phys. Solids. 1962. V. 10. N 1. P. 27–34.
5. *Willis J. R.* The elastic interaction energy of dislocation loops in anisotropic media // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1965. V. 18. N 4. P. 419–433.
6. *Tupholme G. E.* Dislocation loops in hexagonal crystals // J. Mech. Phys. Solids. 1974. V. 22. N 4. P. 309–321.
7. *Burgers J. M.* Some considerations of the field of stress connected with dislocations in a regular crystal lattice // Proc. Kon. Nedel. Akad. Wetensch. 1939. V. 42. P. 293–325; P. 378–399.
8. *Peach M. O., Koehler J. S.* The forces exerted in dislocations and the stress field produced by them // Phys. Rev. Ser. 2. 1950. V. 80. P. 436–439.
9. *Капанадзе Д. В.* О граничных значениях решений эллиптических уравнений в полупространстве // Тр. Ин-та вычисл. матем. АН ГССР. 1985. Т. 25. С. 57–66.
10. *Willis J. R.* A penny-shaped crack on an interface // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1972. V. 25. N 3. P. 367–385.
11. *Weaver J.* Three-dimensional crack analysis // Int. J. Solids Struct. 1977. V. 13. N 4. P. 321–330.
12. *Guidera J. T., Lardner B. W.* Penny-shaped cracks // J. Elast. 1977. V. 5. N 1. P. 59–73.
13. *Willis J. R.* Hertzian contact of anisotropic bodies // J. Mech. Phys. Solids. 1966. V. 14. N 3. P. 163–176.
14. *Willis J. R.* The stress field around an elliptic crack in an anisotropic elastic medium // Int. J. Eng. Sci. 1968. V. 6. N 5. P. 253–263.
15. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973. 343 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.VI.1989