

УДК 539.3  
© 1991 г.

Г. А. СЛАВКИН

## КОЭФФИЦИЕНТЫ РЕЛАКСАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДАМИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Существуют различные варианты решения задач теории упругости, в том числе на основе вариационного принципа минимума потенциальной энергии в постановке проблемы минимизации квадратичного функционала [1]. Наибольшее распространение получил вариант на основе использования условия стационарности функционала. В этом случае задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений большого порядка. Практическая реализация на ЭВМ такого подхода связана с трудностями, которые порождаются, в основном, размерностью задачи. Хотя объем оперативной памяти и быстродействие ЭВМ увеличиваются, актуальность развития алгоритмов и методов решения задач большой размерности сохраняется.

Известна [2, 3] реализация подхода, основанного на итерационной процедуре минимизации квадратичного функционала, который достигает минимального значения на искомом решении системы. Его основными достоинствами являются простота алгоритмизации, достаточно хорошая скорость сходимости и возможность хранения в оперативной памяти ЭВМ только вектора решения и набора исходных данных. К недостаткам следует отнести наличие ограниченной области сходимости.

В публикуемой работе рассматриваются вопросы, связанные с уменьшением числа вычислений на каждой итерации и расширением области сходимости применительно к минимизации функционала потенциальной энергии методами нелинейного программирования при решении задач линейной теории упругости.

В работе реализована аппроксимация геометрии, перемещений в элементе области  $V_m$  и усилий на границе  $S_t$  кусочно-полиномиальными функциями с конечным малым носителем [4]. Этот тип аппроксимирующих функций является одним из возможных и, в то же время, получил широкое распространение в практике численных методов анализа.

**1. Постановка задачи.** Функционал потенциальной энергии конечных элементов, примыкающих к рассматриваемому узлу дискретизируемой области  $V$  для изотропного тела имеет вид

$$J = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \int_{V_m} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \sum_{t=1}^T \int_{S_t} F_i u_i dS \quad (i, j = \overline{1, 3}) \quad (1.1)$$

где  $M$  — число подобластей (конечных элементов)  $V_m$ , окружающих данный узел;  $T$  — число элементов границы, примыкающих к данному узлу;  $F_i$  — нагрузка на границе  $S_t$ ;  $u_i$  — компоненты вектора перемещений;  $\varepsilon_{ij}$  — тензор деформаций Грина;  $\sigma_{ij}$  — тензор напряжений.

В соответствии с законом Гука для  $\sigma_{ij}$  и соотношениями Коши для  $\varepsilon_{ij}$  имеем ( $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $E$ ,  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона,  $\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ ):

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{ii} \right), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.2)$$

Для минимизации функционала (1.1) можно использовать различные методы нелинейного программирования (МНП). При этом,  $k+1$ -приближение при минимизации дискретного функционала на конечно-

мерном пространстве допустимых перемещений записывается в виде

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \alpha^{(k)} f_i^{(k)} \mathbf{e}_i \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{u}^{(k+1)}$ ,  $\mathbf{u}^{(k)}$  — векторы перемещений, соответственно, для  $k+1$ -й и  $k$ -й итераций;  $\alpha^{(k)}$  — релаксационный множитель, величина которого определяет длину шага в направлении  $\mathbf{f}^{(k)}$ ;  $\mathbf{f}^{(k)}$  — вектор сдвига из точки  $\mathbf{u}^{(k)}$ ;  $\mathbf{e}_i$  — единичный вектор в направлении компонент перемещений.

Учет кинематических граничных условий понижает размерность пространства допустимых перемещений. Методика построения компонент вектора сдвига  $f_i$  определяется, в основном, выбором конкретного МНП.

Для расширения области сходимости МНП обычно на каждой итерации производится специальная регулировка длины шага посредством  $\alpha^{(k)}$ . Воспользуемся одним из способов регулировки  $\alpha^{(k)}$ , который обеспечивает глобальную сходимость и сохраняет квадратичную скорость сходимости вблизи точки решения

$$\alpha_{opt} = \arg \min_{\alpha} J(\mathbf{u}^{(k)} + \alpha \cdot \mathbf{f}^{(k)}) \quad (1.4)$$

Эти свойства реализуются для МНП, как показано в [5], при достаточно общих особенностях функционала.

Относительно релаксационных множителей следует отметить, что в работе [2] со ссылкой на ряд численных экспериментов делается вывод о целесообразном интервале для выбора  $\alpha$  в случае решения двумерных задач линейной теории упругости

$$1,85 < \alpha < 1,92 \quad (1.5)$$

В работе [3] предлагается конкретизировать выбор  $\alpha$  из интервала (1.5); а именно, использовать циклический набор  $\alpha$  для  $k$ -й итерации

$$\alpha^{(1)} = 1,94; \alpha^{(2)} = 1,92; \alpha^{(3)} = 1,90; \alpha^{(4)} = 1,88$$

$$\alpha^{(k+4)} = \alpha^{(k)} \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (1.6)$$

В то же время, численное моделирование двумерных задач теории упругости, выполненное автором с использованием (1.5) и (1.6) показало, что в большинстве случаев итерационный процесс (1.3) получается расходящимся.

**2. Процедура построения оптимального значения релаксационного множителя.** Рассмотрим вариант блочно-релаксационной схемы итерационной процедуры (1.3), где в качестве блока выбраны варьируемые компоненты перемещений одного узла, условно обозначенного единицей в круглых скобках. Разложим функционал потенциальной энергии (1.1) в окрестности  $k$ -го шага в ряд Тейлора в соответствии с (1.3):

$$J^{(k+1)} = J^{(k)} + \alpha \nabla_0 J^{(k)} + 1/2 \alpha^2 \nabla_0^2 J^{(k)} \quad (2.1)$$

$$\nabla_0 = f_u^{(k)} \frac{\partial}{\partial u_{(1)}} + f_v^{(k)} \frac{\partial}{\partial v_{(1)}} + f_w^{(k)} \frac{\partial}{\partial w_{(1)}}$$

где  $\alpha$  — релаксационный множитель, соответствующий варьируемым компонентам перемещений одного узла;  $f_u, f_v, f_w$  — компоненты вектора сдвига, имеющие, например, для метода покоординатного спуска второго порядка следующий вид [5]:

$$f_r^{(k)} = -(\partial J^{(k)} / \partial u_{r(1)}) (\partial^2 J^{(k)} / \partial u_{r(1)}^2)^{-1} \quad (r=1, 3) \quad (2.2)$$

Из (1.4) и (2.1) для оптимального значения релаксационного множителя имеем (опустим в дальнейшем индекс  $k$ ):

$$\alpha_{opt} = -(\nabla_0 J) (\nabla_0^2 J)^{-1} \quad (2.3)$$

Покажем, что для построенной итерационной процедуры минимизации функционала потенциальной энергии (1.1) при варьировании компонент вектора перемещений рассматриваемого узла всегда выполняется условие  $\alpha_{onm} \geq 0$ . Это условие, в соответствии с [5], является критерием, гарантирующим сходимость итерационной процедуры (1.3) в предположении, что функционал (1.1) дважды дифференцируем.

Для кусочно-полиномиального типа аппроксимирующих функций, соответственно, по перемещениям и геометрии в пределах конечного элемента [6]:

$$u_i = \sum_{l=1}^{n_1} u_{i(l)} N_l, \quad x_i = \sum_{l=1}^{n_2} x_{i(l)} N_l \quad (i=\overline{1,3}) \quad (2.4)$$

компоненты тензора деформаций можно записать в виде

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (A_{jn} \partial u_i / \partial \eta_n + A_{in} \partial u_j / \partial \eta_n) \quad (n=\overline{1,3}) \quad (2.5)$$

где  $N_l$  — аппроксимирующие функции (функции формы);  $n_1, n_2$  — порядок аппроксимации перемещений и геометрии;  $A_{in}$  — компоненты обратной матрицы преобразований координат (матрица Якоби)  $[\partial x_i / \partial \eta_n]^{-1}$ :

$$\left[ \frac{\partial x_i}{\partial \eta_n} \right] = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \eta_1 & \partial y / \partial \eta_1 & \partial z / \partial \eta_1 \\ \partial x / \partial \eta_2 & \partial y / \partial \eta_2 & \partial z / \partial \eta_2 \\ \partial x / \partial \eta_3 & \partial y / \partial \eta_3 & \partial z / \partial \eta_3 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$x, y, z$  — глобальная система координат;  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  — локальная система координат.

Подстановка (2.5) в (1.1) и выполнение операции дифференцирования потенциальной энергии (1.1) по варьiruемым компонентам перемещений данного узла приводит к следующим выражениям для вторых производных<sup>1</sup> ( $r, s$  — варьiruемые степени свободы узла):

$$\frac{\partial^2 J}{\partial u_{r(1)} \partial u_{s(1)}} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \int_{V_m} \frac{E}{1+\nu} \left\{ \frac{1}{2} (D_j \delta_{ri} + D_i \delta_{rj}) \left[ \frac{1}{2} (D_j \delta_{si} + D_i \delta_{sj}) + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} (D_1 \delta_{s1} + D_2 \delta_{s2} + D_3 \delta_{s3}) \right] + \frac{1}{2} (D_j \delta_{si} + D_i \delta_{sj}) \times \right.$$

$$\left. \left[ \frac{1}{2} (D_j \delta_{ri} + D_i \delta_{rj}) + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} (D_1 \delta_{r1} + D_2 \delta_{r2} + D_3 \delta_{r3}) \right] \right\} dV \quad (i, j, r, s = \overline{1,3}) \quad (2.7)$$

$$D_i = A_{in} \partial N_i / \partial \eta_n \quad (2.8)$$

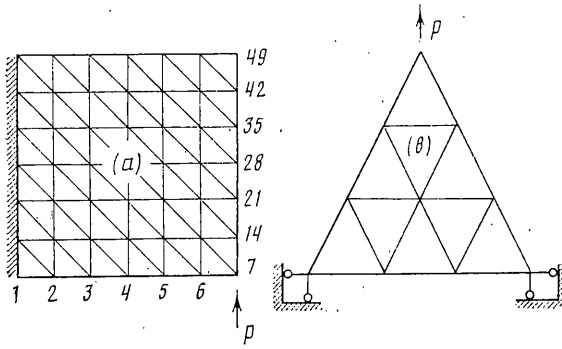
Выполним суммирование в (2.7) по  $i, j = \overline{1,3}$  и получим

$$\frac{\partial^2 J}{\partial u_{r(1)} \partial u_{s(1)}} = \sum_{m=1}^M \int_{V_m} \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{1}{2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \right) D_r D_s dV \quad (r \neq s)$$

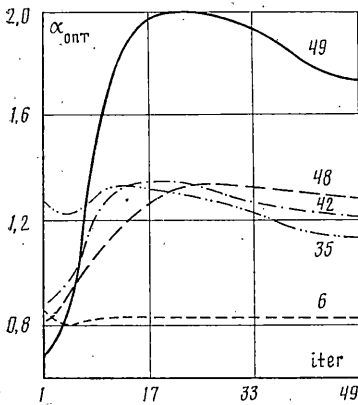
$$\frac{\partial^2 J}{\partial u^2} = \sum_{m=1}^M \int_{V_m} \frac{E}{1+\nu} \left[ \left( 1 + \frac{\nu}{1-2\nu} \right) D_r^2 + \frac{1}{2} (1 - \delta_{rn}) D_n^2 \right] dV \quad (n = \overline{1,3}) \quad (2.9)$$

Для случая линейной аппроксимации геометрии и перемещений в пределах конечного элемента величины  $D_i$  из (2.8) не зависят от локаль-

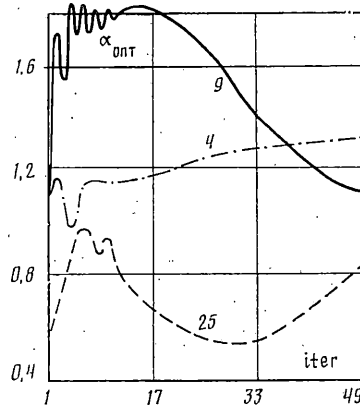
<sup>1</sup> Славкин Г. А. Релаксационные множители при численном решении задач теории упругости методами нелинейного программирования: Препринт № 3. Красноярск: ВЦ СО АН СССР, 1988. 26 с.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

ных координат  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  и интегрирование в (2.9) выполняется элементарно. Подставим (2.2) и (2.9) в (2.3) и, учитывая, что  $\partial^2 J / \partial u_r^2 > 0$ , получим  $\alpha_{onm} \geq 0$ . Обозначим  $p_r = -f_r$ . Раскрывая выражение (2.3) с учетом (2.2), получим формулу для определения  $\alpha_{onm}$ :

$$\alpha_{onm} = (1 + F_0 / F_1)^{-1} \quad (2.10)$$

$$F_0 = 2 \frac{\partial^2 J}{\partial u_{i(1)} \partial u_{j(1)}} p_i p_j \quad (2.11)$$

$$F_1 = p_i \frac{\partial J}{\partial u_{i(1)}} = p_i^2 \frac{\partial^2 J}{\partial u_{i(1)}^2} \quad (2.12)$$

Суммирование в (2.11), (2.12) осуществляется по  $i, j = \overline{1, 3}$ , причем в (2.11)  $i < j$ .

В частном случае линейной аппроксимации геометрии и перемещений в пределах конечного элемента при решении двумерной задачи теории упругости (треугольный конечный элемент пластинки с номерами узлов 1, 2, 3) для  $D_i$  ( $i=1, 2$ ) из (2.8) имеем ( $\Delta$  — площадь треугольного элемента,  $b_1 = y_2 - y_3$ ,  $c_1 = x_3 - x_2$ ):

$$D_1 = \frac{1}{2} b_1 \Delta^{-1}, \quad D_2 = \frac{1}{2} c_1 \Delta^{-1} \quad (2.13)$$

Выражение для  $F_0$  запишется при этом в следующем виде ( $v_1 = 1$  — плоская деформация,  $v_1 = 1 - \nu$  — плоское напряженное состояние):

$$F_0 = p_u p_v \sum_{m=1}^M \left[ \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{1}{2} + \frac{\nu v_1}{1-2\nu} \right) D_1 D_2 \Delta \right] \quad (2.14)$$

При решении трехмерных задач и линейной аппроксимации геометрии и перемещений (тетраэдральный конечный элемент объема с четырьмя узловыми точками в вершинах) для  $D_i$  в (2.8) имеем

$$D_i = d_{i+1, 1} \quad (i = \overline{1, 3})$$

$$[d] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.15)$$

$x_j, y_j, z_j$  ( $j = \overline{1, 4}$ ) — координаты вершин тетраэдра в общей системе координат.

**3. Численные результаты.** Изложенная выше процедура применительно к решению дву- и трехмерных задач линейной теории упругости реализована в виде пакета прикладных программ (ППП) ГРАД-1.1, организованного по модульному принципу. ППП ГРАД-1.1 позволяет выполнять учет нелинейных граничных условий по перемещениям (ограничения-неравенства).

На фиг. 1 представлены тестовые примеры, проиллюстрированные для отдельных узлов на фиг. 2 и 3 поведением множителя  $\alpha_{onm}$  в зависимости от номера итерации. Хотя эти рисунки недостаточным образом характеризуют  $\alpha_{onm}$  как функцию от номера итераций, так как величина  $\alpha_{onm}$  зависит от начального вектора перемещений, геометрии сетки и сценария итерационного процесса (выбор последовательности варьируемых номеров узлов), тем не менее являются вполне показательными. Начальный вектор перемещений для представленных тестовых задач принимался равным единичному. Исходные данные для схемы изгиба квадратной пластины (фиг. 1, а):  $P=10$ ,  $E=1$ ,  $\nu=0,3$ ; для схемы нагружения кубика (фиг. 1, б):  $q=2,5$ ,  $E=1$ ,  $\nu=0,3$ . В качестве кинематических граничных условий для фиг. 1, б приняты нулевые перемещения по  $x, y, z$  для нижних ребер (узлы 1–10–19 и 3–12–21 — необозначенные узлы легко идентифицируются). Каждый кубик разбивался на пять тетраэдров.

Интересным представляется тест о растяжении клина с принятой в [6] топологией сетки (фиг. 1, в). «Игра» суммы произведений  $D_1 D_2 \Delta$  в (2.14) приводит к тому, что для любого узла, перемещения которого варьируются, имеем  $F_0=0$  и, следовательно,  $\alpha_{onm}=1$ .

В заключение следует отметить, что неучет релаксационного множителя  $\alpha_{onm}$  в ряде случаев приводил к тому, что решение получалось расходящимся.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
2. Василенко Н. В., Бабенко А. Е., Цыбенко А. С., Чирков А. Ю. Решение задач теории упругости методом покоординатного спуска. // Проблемы прочности. 1983. № 1. С. 102–104.
3. Василенко Н. В., Бабенко А. Е., Чирков А. Ю. О применении метода покоординатного спуска в вариационно-сеточных схемах при решении задач теории упругости. // Проблемы прочности. 1985. № 9. С. 102–106.
4. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.
5. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.
6. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.

Красноярск

Поступила в редакцию  
6.VII.1989