МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1991

УДК 539.3

Л. Г. СМИРНОВ, И. Й. ФЕДИК

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СОСТАВНОМ УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПРИ НАЛИЧИИ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В СЛУЧАЕ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

Рассматривается упругое пространство, составленное из двух полупространств $z<0$ и $z>0$, различающихся упругими и тепловыми характеристиками и отнесенное к цилиндрической системе координат. Предполагается, что полупространство $z>0$, содержит упругое включение, имеющее форму эллипсоида вращения, ось которого совпадает с осью z. Считается также, что упругие характеристики включения и окружающей среды совпадают, а коэффициенты линейного расширения различны. В предположении, что на границе раздела сред имеет место идеальный контакт, задача об определении напряженного состояния пространства при нагревании его от температуры T_0, при которой напряжения отсутствовали, до температуры T_1, сводится к нахождению напряжений в составном пространстве при наличии скачков перемещений на линиях раздела сред [1]. Решение аналогичной задачи, когда эллипсоид вырождается в сферу, а полупространство $z<0$ отсутствует, с использованием функции влияния для сосредоточения усилия получено в замкнутом виде [1]. В настоящей работе используются обобщенные аналитические функции (ОАФ), применение которых к задачам теории упругости изложено в [2].

Аналогично тому, как это имеет место в плоской теории упругости, где перемещения и напряжения выражаются через две аналитичные функции комплексной переменной, в осесимметрических задачах используются две обобщенные аналитические функции комплексной переменной $t=z+ir$, действительная и мнимая части которых по определению ОАФ связаны соотношениями

$$\partial(\operatorname{Re} F)/\partial z=r^{-1}\partial(r\operatorname{Im} F)/\partial r,\ \ \partial(\operatorname{Re} F)/\partial r=-\partial(\operatorname{Im} F)/\partial z \tag{1}$$

а производная от обобщенной аналитической функции $F(t)$ определяется формулой:

$$F'(t)=\lim_{t}\,[F(t_1)-\operatorname{Re} F(t)-irr^{-1}\operatorname{Im} F(t)]/(z_1-z+i(r_1-r))\quad(t_1=z_1+ir_1)$$

В частности, при $t\to t_1$ вдоль линии $r=r_1$:

$$F'(t)=\partial F(t)/\partial z \tag{2}$$

Обозначим через D_0, D_1 и D_2 области, занятые соответственно меридиональным сечением эллипсоида, дополнением его до полуплоскости $z>0$, и полуплоскость $z<0$. Перемещения и напряжения выражаются через две ОАФ $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ по формулам [2]:

$$2G(w+ir)=\varkappa\Phi(t)-2z\overline{\Phi'(t)}-\overline{\Psi(t)} \tag{3}$$

$$\sigma_z+i\sigma_{rz}=\Phi'(t)-2z\overline{\Phi''(t)}-\overline{\Psi'(t)}$$

$$\sigma_\theta=4\nu\operatorname{Re}\Phi'(t)+2Gu/r,\ \ \sigma_r=4(1+\nu)\operatorname{Re}\Phi'(t)-\sigma_z-\sigma_\theta \tag{4}$$

где w и u — осевое и радиальное перемещения, σ_z, σ_θ, σ_r, σ_{rz} — соответствующие напряжения. G, ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона, $\varkappa=3-4\nu$. Если p_z и p_r осевые и радиальные и составляющие усилия, действующие на элемент поверхности, то имеет место равенство [2]:

$$\Phi(t)+2z\overline{\Phi'(t)}+\overline{\Psi(t)}-4(1-\nu)\int_{t_0}^{t}(\Phi(\tau)-\overline{\Phi(\tau)}-C'/(\tau-\bar{\tau}))\,dz/(\tau-\bar{\tau})-$$

$$-C-2(1-\nu)C'/(t-\bar{t})=-R(t)-2Z(t)/(t-\bar{t}) \quad (5)$$

где интегральные усилия $R(t)$ и $Z(t)$ вычисляются по формулам [2]:

$$Z(t)=\int_0^s p_z r\,ds', \qquad R(t)=\int_0^s (p_r+Z(s')r'^{-2}\,dz'/ds')\,ds' \quad (6)$$

В формуле (5) C и C' — произвольные вещественные постоянные, точки t и t_0 предполагаются расположенными по одну сторону от оси симметрии, в формулах (6) интегрирование производится по дуге границы, s — дуговая координата точки t, z и r рассматриваются как функции от s.

Используя соотношения (3) и (5), условия равенства интегральных усилий и наличия скачка перемещений на контуре L_0 — границе меридионального сечения эллипсоида с центром в точке $z=d$ и полуосями a и b — запишем в виде:

$$\Phi_1^+(\tau)+2z\overline{\Phi_1^{+\prime}(\tau)}+\overline{\Psi_1^+(\tau)}-(1-\nu_1)\int_{\bar{\tau}}^{\tau}(4\,\mathrm{Im}\,\Phi_1^+ +r'^{-1}C_0')r'^{-1}\,dz-$$

$$-C_0+i(1-\nu_1)C_0'/r=\Phi_1^-(\tau)+2z\overline{\Phi_1^{-\prime}(\tau)}+\overline{\Psi_1^-(\tau)}-$$

$$-(1-\nu_1)\int_{\bar{\tau}}^{\tau}(4\,\mathrm{Im}\,\Phi_1^- +r'^{-1}C_1')r'^{-1}\,dz-C_1+i(1-\nu_1)C_1'/r \quad (7)$$

$$\varkappa_1\Phi_1^+(\tau)-2z\overline{\Phi_1^{+\prime}(\tau)}-\overline{\Psi_1^+(\tau)}=$$

$$=\varkappa_1\Phi_1^-(\tau)-2z\overline{\Phi_1^{-\prime}(\tau)}-\overline{\Psi_1^-(\tau)}+2G_1g_1(\tau) \quad (8)$$

на прямой L_1 — линии раздела полуплоскостей ($z=0$):

$$\Phi_1^-(\tau)+\overline{\Psi_1^-(\tau)}-C_2+i(1-\nu_1)/rC_2'=$$

$$=\Phi_2(\tau)+\overline{\Psi_2(\tau)}-C_3+i(1-\nu_2)/rC_3' \quad (9)$$

$$\varkappa_1\Phi_1^-(\tau)-\overline{\Psi_1^-(\tau)}=\gamma(\varkappa_2\Phi_2(\tau)-\overline{\Psi_2(\tau)})+2G_2g_2(\tau) \quad (10)$$

Здесь $(\Phi_1^+(\tau),\ \Psi_1^+(\tau))$, $(\Phi_1^-(\tau),\ \Psi_1^-(\tau))$ и $(\Phi_2(\tau),\ \Psi_2(\tau))$ — граничные значения обобщенных аналитических функций соответственно в областях D_0, D_1 и D_2, индекс 1 соответствует верхней полуплоскости, индекс 2 — нижней, $\gamma=G_1/G_2$, $g_k(\tau)=(\alpha_{k-1}-\alpha_k)(T_1-T_0)(\tau-z_k)$ — разрыв перемещений на контуре L_{k-1} ($k=1, 2$), $z_1=d$, $z_2=0$, α_k — коэффициент линейного расширения, соответствующий области D_k ($k=0, 1, 2$); C_k и C_k' — вещественные постоянные ($k=0, 1, 2, 3$). Поскольку области D_0 и D_2 односвязны, а нагрузка на поверхности включения самоуравновешенная, необходимо положить $C_k'=0$ ($k=0, 1, 2, 3$), а константы C_k ($k=0, 1, 2, 3$), как легко видеть, можно включить в состав искомых функций. Таким образом

$$C_k=C_k'=0 \quad (k=0, 1, 2, 3) \quad (11)$$

Складывая левые и правые части равенства (7)—(8), с учетом (11) получим

$$(\varkappa_1+1)\left(\Phi_1^+(\tau)-\Phi_1^-(\tau)-\int_{\tau_0}^{\tau}\operatorname{Im}(\Phi_1^+-\Phi_1^-)\,dr/z\right)=2G_1g_1(\tau) \qquad (12)$$

откуда при $\Delta T=T-T_0=\text{const}$ и $\tau_0=d-a$ найдем

$$\Delta\Phi_1=\Phi^+-\Phi^-=\lambda_1(2(z-d)+ir)$$
$$\lambda_j=(\alpha_{j-1}-\alpha_j)\Delta T/(2(1+\nu)) \quad (j=1,\ 2) \qquad (13)$$

Из равенства (8) имеем $\Delta\Psi_1=\Psi_1^+-\Psi_1^-=\varkappa_1\Delta\Phi_1-2z\Delta\Phi_1'-2G_1g_1(\tau)$ и, пользуясь формулами (2) и (13), получим

$$\Delta\Psi_1=a_1(z-d)+b_1ri+c_1 \qquad (14)$$

$$a_1=\lambda_1(\varkappa_1-5)/(1+\varkappa_1),\ b_1=\lambda_1/(1+\varkappa_1),\ c_1=\lambda_1(1-\varkappa_1)/(1+\varkappa_1) \qquad (15)$$

Функции $\Phi_1(t)$, $\Psi_1(t)$, равные соответственно $\Phi_1^+(t)$, $\Psi_1^+(t)$ при $t\in D_0$ и $\Phi_1^-(t)$, $\Psi_1^-(t)$ при $t\in D_1$, могут быть представлены через обобщенные аналитические в области D_0+D_1 функции $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ в виде [2]:

$$\Phi_1(t)=\Phi(t)+\Phi_*(t)=\Phi(t)+(2\pi i)^{-1}\int_{L_0}\Delta\Phi_1(\tau)\,\omega(t,\tau)\,d\tau/(\tau-t) \qquad (16)$$

$$\Psi_1(t)=\Psi(t)+\Psi_*(t)=\Psi(t)+(2\pi i)^{-1}\int_{L_0}\Delta\Psi_1(\tau)\,\omega(t,\tau)\,d\tau/(\tau-t) \qquad (17)$$

$$\omega(t,\tau)=$$
$$=\begin{cases}|(\tau-\bar\tau)/(\tau-\bar t)|\,B(k) & \text{при } \operatorname{Im}(t\cdot\tau)>0, \quad k=(|t-\bar t|\,|\tau-\bar\tau|)^{1/2}/|\tau-\bar t|\\ |(\tau-\bar\tau)/(\tau-t)|\,D(k_0) & \text{при } \operatorname{Im}(t\cdot\tau)<0, \quad k_0=(|t-\bar t|\,|\tau-\bar\tau|)^{1/2}/|\tau-t|\end{cases}$$
$$B(k)=K(k)-D(k),\quad D(k)=(K(k)-E(k))/k^2 \qquad (18)$$

где $K(k)$, $E(k)$ — полные эллиптические интегралы.

Формула Коши, выражающая значение ОАФ внутри области S через ее контурные значения, записывается в виде [2]:

$$f(t)=(2\pi i)^{-1}\int_L f(\tau)\,\omega(t,\tau)\,d\tau/(\tau-t) \qquad (19)$$

При $t\notin S$ интеграл в правой части равенства (19) равен нулю. Поскольку $\Delta\Phi_1(\tau)=\lambda_1(2(z-d)+ir)$ является граничным значением ОАФ в области D_0, из (16) и (19) имеем:

$$\Phi_1(t)=\Phi(t)+\lambda_1(2(z-d)+ir) \quad (t\in D_0)$$
$$\Phi_1(t)=\Phi(t) \quad (t\notin D_0) \qquad (20)$$

Для нахождения $\Psi_*(t)$ воспользуемся представлением функции $\Delta\Psi_1(t)$ на контуре L_0 в виде суммы двух функций, являющихся граничными значениями ОАФ соответственно внутри и вне контура L_0. Известно [2], что любую ОАФ внутри и вне эллипса можно представить в виде ряда по функциям

$$\psi_n(t)=K_nP_n(\cos\eta)-iK_n'P_n'(\cos\eta)/(n(n+1)) \qquad (21)$$

где в случае вытянутого эллипсоида соответственно для внутренности и внешности контура L_0:

$$K_n=P_n(\operatorname{ch}\xi),\quad K_n=Q_n(\operatorname{ch}\xi) \tag{22}$$

для сплюснутого эллипсоида внутри и вне контура L_0

$$K_n=i^nP_n(i\operatorname{sh}\xi),\quad K_n=i^{n-1}Q_n(i\operatorname{sh}\xi) \tag{23}$$

$P_n(x)$ — полиномы Лежандра, $Q_n(x)$ — функции Лежандра второго рода:

$$Q_m(x)=P_m(x)\ln((x+1)/(x-1))/2-\sum_{k=1}^{m-1}P_{m-k}(x)P_{k-1}(x)/k \tag{24}$$

ξ, η — эллиптические координаты, c — эксцентриситет эллипса

$$z=c\operatorname{ch}\xi\cos\eta+d,\quad r=c\operatorname{sh}\xi\sin\eta\quad(a>b) \tag{25}$$

$$z=c\operatorname{sh}\xi\cos\eta+d,\quad r=c\operatorname{ch}\xi\sin\eta\quad(a<b) \tag{26}$$

Рассмотрим случай $a>b$. Тогда функции $\psi_n^+(t)=\psi_n(t)$ при $t\in D_0$ и $\psi_n^-(t)=\psi_n(t)$ при $t\notin D_0$ имеют вид

$$\psi_n^+(t)=P_n(\operatorname{ch}\xi)P_n(\cos\eta)-iP_n'(\operatorname{ch}\xi)P_n'(\cos\eta)/(n(n+1)) \tag{27}$$

$$\psi_n^-(t)=Q_n(\operatorname{ch}\xi)P_n(\cos\eta)-iQ_n'(\operatorname{ch}\xi)P_n'(\cos\eta)/(n(n+1)) \tag{28}$$

Из формул (27)—(28) легко видеть, что функция

$$\Delta\Psi_1(\tau)=a_1(z-d)+ib_1r+c_1=c(a_1\operatorname{ch}\xi_0\cos\eta+ib_1\operatorname{sh}\xi_0\sin\eta)+c_1$$

$$(\operatorname{ch}\xi_0=a/c,\ \operatorname{sh}\xi_0=b/c,\ \tau\in L_0)$$

представляется в виде

$$\Delta\Psi_1(\tau)=\beta^+\psi_1^+(\tau)+\beta^-\psi_1^-(\tau)+c_1 \tag{29}$$

$$\psi_1^+(\tau)=\operatorname{ch}\xi_0\cdot\cos\eta+i\operatorname{sh}\xi_0\cdot\sin\eta/2,$$

$$\psi_1^-(\tau)=Q_1(\operatorname{ch}\xi_0)\cos\eta+iQ_1'(\operatorname{ch}\xi_0)\sin\eta/2 \tag{30}$$

Используя выражение (14) для $\Delta\Psi_1(\tau)$ и формулы (30), из (29) получим

$$\beta^+=(\varkappa_1-7)ab^2c^{-2}\ln((a+c)/(a-c))/2-c^{-1}((\varkappa_1-5)a^2-2b^2)$$

$$\beta^-=(\varkappa_2-7)ab^2c^{-2}$$

Следовательно, учитывая (25):

$$\Psi_*(t)=(2\pi i)^{-1}\int_{L_0}\Delta\Psi_1(\tau)\omega(t,\tau)d\tau/(\tau-t)=\begin{cases}\beta^+\psi_1^+(t)+c_1 & (t\in D_0)\\ -\beta^-\psi_1^-(t) & (t\notin D_0)\end{cases} \tag{31}$$

$$\psi_1^+(t)=\operatorname{ch}\xi\cos\eta+i\operatorname{sh}\xi\sin\eta/2=c^{-1}(z+ir/2) \tag{32}$$

$$\psi_1^-(t)=Q_1(\operatorname{ch}\xi)\cos\eta+iQ_1'(\operatorname{ch}\xi)\sin\eta/2=$$
$$=c^{-1}(X(\xi)(z-d)+irY(\xi)/2) \tag{33}$$

$$X(\xi)=X^*(z,r)=\ln((\operatorname{ch}\xi+1)/(\operatorname{ch}\xi-1))/2-\operatorname{ch}^{-1}\xi$$
$$Y(\xi)=Y^*(z,r)=\ln((\operatorname{ch}\xi+1)/(\operatorname{ch}\xi-1))/2-\operatorname{ch}\xi/\operatorname{sh}^2\xi \tag{34}$$

$$\operatorname{ch}\xi=A(z,r)=2^{-1/2}c^{-1}(((z-d)^2+r^2+2c^2)+$$
$$+(((z-d)^2+r^2+2c^2)^2+4(z-d)^2c^2)^{1/2})^{1/2} \tag{35}$$

Используя (20) и (31), и, подставляя выражения для $\Phi_1(t)$ и $\Psi_1(t)$ из (16)—(17) в условия (9)—(10), будем иметь

$$\Phi(\tau)+\overline{\Psi(\tau)}=\Phi_2(\tau)+\overline{\Psi_2(\tau)}+\beta^-\overline{\psi_1^-(\tau)} \tag{36}$$

$$\varkappa_1\Phi(\tau)-\overline{\Psi(\tau)}=\gamma(\varkappa_2\Phi_2(\tau)-\overline{\Psi_2(\tau)})-\beta^-\overline{\psi_1^-(\tau)}+\lambda_2(1+\varkappa_2)\tau \quad (\tau\in L_1)$$

Произведя в (36) замену

$$\Phi_2(\tau)=\Phi_0(\tau)-2\lambda_2(z+ir/2)/\gamma$$

$$\Psi_2(\tau)=\Psi_0(\tau)-2\lambda_2(z+ir/2)/\gamma \tag{37}$$

получим

$$\Phi(\tau)+\overline{\Psi(\tau)}=\Phi_0(\tau)+\overline{\Psi_0(\tau)}+\beta^-\overline{\psi_1^-(\tau)} \tag{38}$$

$$\varkappa_1\Phi(\tau)-\overline{\Psi(\tau)}=\gamma(\varkappa_2\Phi_0(\tau)-\overline{\Psi_0(\tau)})-\beta^-\overline{\psi_1^-(\tau)} \tag{39}$$

причем $\Phi_0(t)$ и $\Psi_0(t)$, как это следует из представления (37) и выражений (3)—(4), исчезают на бесконечности $(z<0)$.

Умножая обе части равенства (38) на γ, а затем складывая обе части полученного равенства с соответствующими частями равенства (39), находим

$$(\varkappa_1+\gamma)\Phi(\tau)+(\gamma-1)\overline{\Psi(\tau)}=\gamma(\varkappa_2+1)\Phi_0(\tau)+\beta^-(\gamma-1)\overline{\psi_1^-(\tau)} \tag{40}$$

Взяв от обеих частей равенства (40) интеграл Коши по формуле (19), получим при $t\in D_0+D_1$:

$$(\varkappa_1+\gamma)\Phi(t)=(1-\gamma)(2\pi i)^{-1}\int_{L_1}\overline{\Psi(\tau)}\,\omega(t,\tau)\,d\tau/(\tau-t)+$$

$$+\gamma(\varkappa_2+1)(2\pi i)^{-1}\int_{L_1}\Phi_0(\tau)\,\omega(t,\tau)\,d\tau/(\tau-t)+$$

$$+\beta^-(\gamma-1)(2\pi i)^{-1}\int_{L_1}\overline{\psi_1^-(\tau)}\,\omega(t,\tau)\,d\tau/(\tau-t) \tag{41}$$

Первый и второй интегралы в правой части равенства (41) равны нулю. Действительно, взяв сопряженную величину от первого интеграла, получим

$$-(2\pi i)^{-1}\int_{L_1}\Psi(\tau)\,\omega(t,\tau)\,d\bar\tau/\overline{(\tau-t)}=-(2\pi i)^{-1}\int_{L_1}\Psi(\tau)\,\omega(\bar t,\bar\tau)\,d\tau/(\tau+\bar t)=$$

$$=-(2\pi i)^{-1}\int_{L_1}\Psi(\tau)\,\omega(-\bar t,\tau)\,d\tau/(\tau-(-\bar t))=0$$

Здесь использовались равенства $\omega(-t,-\tau)=\omega(t,\tau)$, $\bar\tau=-\tau$ при $z=0$, а также то, что $\Psi(t)$ — обобщенная аналитическая функция при $t\in D_0+D_1$, исчезающая на бесконечности, а $(-\bar t)\in D_2$ при $t\in D_0+D_1$. Таким образом, первый интеграл в правой части (41) равен нулю. По той же причине равен нулю и второй интеграл, а значит при $t\in D_0+D_1$:

$$\Phi(t)=\beta^-(\gamma-1)(2\pi(\varkappa_1+\gamma)i)^{-1}\int_{L_1}\overline{\psi_1^-(\tau)}\,\omega(t,\tau)\,d\tau/(\tau-t) \tag{42}$$

Складывая левые и правые части равенств (38)—(39), имеем

$$(\varkappa_1+1)\Phi(\tau)=(1+\gamma\varkappa_2)\Phi_0(\tau)+(1-\gamma)\overline{\Psi_0(\tau)}$$

$$\Phi_0(\tau)=((\varkappa_1+1)\Phi(\tau)+(\gamma-1)\overline{\Psi_0(\tau)})/(1+\gamma\varkappa_2) \tag{43}$$

Взяв интеграл Коши от обеих частей полученного равенства при $t \in D_2$, точно также, как и выше, получим, что интегралы от обоих слагаемых в правой части (43) равны нулю, а значит

$$\Phi_0(t)=0 \quad (t \in D_2) \tag{44}$$

Из (40) следует

$$\Psi(\tau)=(\gamma(\varkappa_2+1)\overline{\Phi_0(\tau)}-(\varkappa_1+\gamma)\overline{\Phi(\tau)})/(\gamma-1)+\beta^-\psi_1^-(\tau) \quad (\tau \in L_1)$$

и, используя ту же процедуру, получим

$$\Psi(t)=0 \quad (t \in D_0+D_1) \tag{45}$$

Наконец, из (38) с учетом (44)—(45) находим

$$\Psi_0(\tau)=\overline{\Phi(\tau)}-\beta^-\psi_1^-(\tau) \quad (\tau \in L_1)$$

$$\Psi_0(t)=-(2\pi i)\int_{L_1}\overline{\Phi(\tau)}\,\omega(t,\tau)\,d\tau/(\tau-t)+\beta^-\psi_1^-(t) \qquad (t \in D_2) \tag{46}$$

Для вычисления $\Phi(t)$ найдем значение, сопряженное к интегралу в правой части формулы (42):

$$-(2\pi i)^{-1}\int_{L_1}\psi_1^-(\tau)\overline{\omega(t,\tau)}\,d\bar{\tau}/\overline{(\tau-t)}=$$

$$=-(2\pi i)^{-1}\int_{L_1}\psi_1^-(\tau)\,\omega(-t,\tau)\,d\tau/(\tau-(-\bar{t}))=-\psi_1^-(-\bar{t})=-\psi_1^-(-z+ir)$$

а значит

$$\Phi(t)=\beta^-(\gamma-1)(\varkappa_1+\gamma)^{-1}\psi_1^-(-z+ir) \tag{47}$$

и учитывая (33), получим

$$\Phi(t)=\beta^-(\gamma-1)c^{-1}(\varkappa_1+\gamma)^{-1}(X^*(-z,\ r)(-r+d)+irY(-z,\ r)/2) \tag{48}$$

Теперь используя (47), из (46) получим

$$\Psi_0(t)=\beta^-(\gamma-1)(2\pi i(\varkappa_1+\gamma))^{-1}\int_{L_1}\psi_1^-(ir)\,\omega(t,\tau)\,d\tau/(\tau-t)+$$

$$+\beta^-\psi_1^-(t)=\beta^-(\varkappa_1+1)c^{-1}(\varkappa_1+\gamma)^{-1}(X^*(z,r)(z-d)+irY(z,r)/2) \tag{49}$$

Таким образом, функции $\Phi(t)$, $\Psi(t)$, $\Phi_0(t)$ и $\Psi_0(t)$, а значит, и функции $\Phi_j(t)$, $\Psi_j(t)$ $(j=1,\ 2)$, необходимые для вычисления по формулам (3)—(4) перемещений и напряжений, определены. Производные $\Phi'(t)$, $\Phi''(t)$ и $\Psi_0'(t)$ вычисляются по формуле (2) с использованием (48)—(49). В результате находим

$$\Phi'(t)=\beta^-c^{-1}(\varkappa_1+\gamma)^{-1}(\gamma-1)(X(\zeta_1)-X(\zeta_1)h_1(\zeta_1)(z+d)+irY_2(\zeta_1)h_1(\zeta_1))$$

$$\Phi''(t)=\beta^-c^{-1}(\varkappa_1+\gamma)^{-1}(\gamma-1)(2X_1(\zeta_1)h_1(\zeta_1)+(X_2(\zeta_1)h_1^2(\zeta_1)+$$

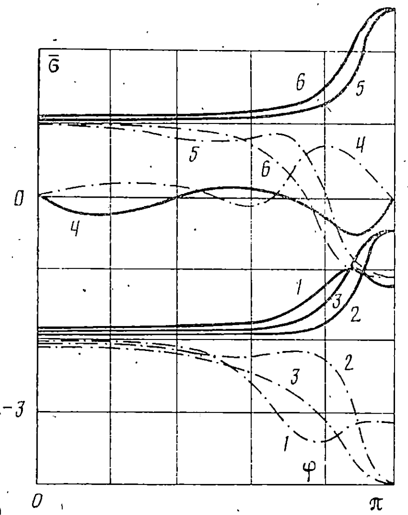
$$+X_1(\zeta_1)h_2(\zeta_1))(z+d)+ir(Y_2(\zeta_1)h_1^2(\zeta_1)+Y_1(\zeta_1)h_2(\zeta_1))) \tag{50}$$

$$\Psi_0'(t)=\beta^-c^{-1}(\varkappa_1+\gamma)^{-1}(\varkappa_1+1)(X(\zeta)+X_1(\zeta)h_1(\zeta)(z-d)+irY_1(\zeta)h_1(\zeta))$$

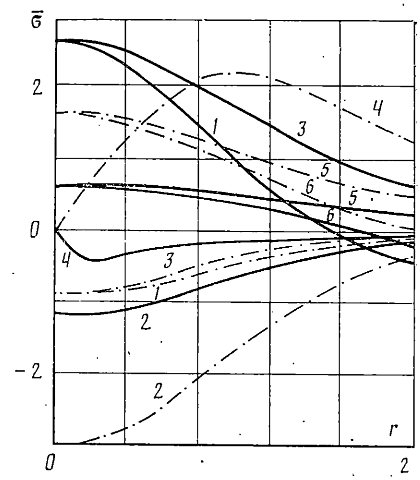
$$\zeta=A(z,\ r),\ \zeta_1=A(-z,\ r)=A_1(z,\ r) \tag{51}$$

$$X_1(y)=-y^{-2}(y^2-1)^{-2},\ Y_1(y)=2(y^2-1)^{-2}$$

$$X_2(y)=2y^{-3}(y^2-1)^{-2}(2y^2-1),\ Y_2(y)=-8y(y^2-1)^3 \tag{52}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$h_1(\zeta)=A^{-1}B/2,\ h_2(\zeta)=-A^{-3}B^2/4+$$
$$+A^{-1}(1-z'^2(z'^2+r'^2)E^{-3})/2,\ z'=(z-d)/c \tag{53}$$
$$B=z'(1+(z'^2+r'^2)E^{-1}),\ \ E=((z'^2+r'^2+1)^2/4-z'^2)^{1/2} \tag{54}$$

Для $h_j(\zeta)$ $(j=1,\ 2)$ справедливы формулы (53) с заменой A на A_1 и $z'=(z-d)/c$ на $z'=-(z+d)/c$. Функции $\Phi_j'(t)$, $\Phi_j''(t)$, $\Psi_j'(t)$ $(j=1,\ 2)$ равны

$$\Phi_1'(t)=\begin{cases}\Phi'(t)+2\lambda_1, & (t\in D_0)\\ \Phi'(t), & (t\in D_1)\end{cases}$$

$$\Psi_1'(t)=\begin{cases}\beta^+c^{-1}, & (t\in D_0)\\ -\beta^-c^{-1}, & (t\in D_1)\end{cases}$$

$$\Phi_1''(t)=\Phi''(t)\quad (t\in D_0+D_1)$$

$$\Phi_2'(t)=-\lambda_2/\gamma,\ \ \Psi_2'(t)=\Psi_0'(t)+\lambda_2/\gamma,\ \ \Phi_2''(t)=0\ \ (t\in D_2)$$

Для сплюснутого у полюсов эллипсоида с использованием (23) и (26) таким же образом получим формулы, аналогичные формулам (20), (31)–(35), (48)–(54), где следует положить

$$X(\xi)=i\ln((i\operatorname{sh}\xi+1)/(i\operatorname{sh}\xi-1))/2-1/\operatorname{sh}\xi$$
$$Y(\xi)=i\ln((i\operatorname{sh}\xi+1)/(i\operatorname{sh}\xi-1))/2-\operatorname{sh}\xi/\operatorname{ch}^2\xi$$
$$\operatorname{sh}\xi=A(z,\ r)=((z'^2+r'^2-1)/2+((z'^2+r'^2-1)^2/4+z'^2)^{1/2})^{1/2},\ z'=(z-d)/c$$
$$X_1(y)=y^{-2}(1+y^2)^{-2},\ \ X_2(y)=-2y^{-3}(y^2+1)^{-2}(2y^2+1)$$
$$Y_1(y)=-2(y^2+1)^{-2},\ \ Y_2(y)=8y(y^2+1)^{-3}$$
$$\beta^+=i2^{-1}(\varkappa_1-7)ab^2c^{-2}\ln((a-ic)/(a+ic))-((\varkappa_1-5)a^2-2b^2)c^{-1}$$
$$\beta^-=(\varkappa_1-7)ab^2c^{-2},\ \ E=((z'^2+r'^2-1)^2/4+z'^2)^{1/2}$$

При $\gamma\to\infty$ получаем решение для полупространства с включением, при $\gamma\to\infty$, $c=0$ — известное решение для полупространства со сферическим включением [1].

На фиг. 1 представлены графики напряжений в сферической системе координат на границе включения со средой для обоих контактируемых материалов, а на фиг. 2 — графики напряжений на линии раздела полупространств при различных значениях γ в случае $a=b=R$, $\varkappa_1=\varkappa_2=2$, $\alpha_1=\alpha_2$, $d=1{,}0001R$. На рисунках напряжения представлены в безразмерном виде в соответствии с формулой $\bar{\sigma}=\sigma/(2G_1(1-\nu_1)^{-1}(1+\nu_1)\times\times(\alpha_0-\alpha_1)\Delta T/3)$, сплошным линиям соответствует $\gamma=3$, штрих-пунктирным $\gamma=1/3$, цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответствуют на фиг. 1 напряжениям $\sigma_\rho^{(0)}$, $\sigma_\varphi^{(0)}$, $\sigma_\theta^{(0)}$, $\sigma_{\rho\varphi}^{(0)}$, $\sigma_\varphi^{(1)}$, $\sigma_\theta^{(1)}$ и напряжениям $\sigma_r^{(1)}, \sigma_z^{(1)}, \sigma_\theta^{(1)}, \sigma_{rz}^{(1)}, \sigma_r^{(2)}, \sigma_\theta^{(2)}$ на фиг. 2, где верхний индекс в круглых скобках означает принадлежность области D_j $(j=0,\ 1,\ 2)$, ρ, φ, θ — сферические координаты $(t-d=\rho e^{i\varphi})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мелан Э., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958. 167 с.
2. *Александров А. Я., Соловьев Ю. И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Наука, 1978. 462 с.

Москва

Поступила в редакцию 12.VI.1989