МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1991

УДК 539.3


Ю. М. МАМЕДОВ

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Для трехмерных квазистатических задач несвязанной термоупругости построены[1] формулы взаимности отличная от формулы взаимности Майзеля и новые гранично-временные интегральные уравнения. Эти уравнения оказались эффективными в приложениях. Как нам известно, такая теория для трехмерных квазистатических задач связанной термоупругости до сих пор не построена.

Настоящая работа посвящается построению интегральных представлений общего решения и гранично-временных интегральных уравнений для трехмерных квазистатических задач связанной термоупругости.

Построение этих уравнений осуществляется на основе рассмотрения системы дифференциальных уравнений вышеупомянутой задачи термоупругости как несамосопряженного дифференциального оператора. Вторая формула Грина для этого оператора строится путем введения в рассмотрение сопряженного оператора и трактуется как теорема взаимности. На основе построенной формулы взаимности сконструированы гранично-временные интегральные уравнения для начально-краевых задач связанной квазистатической термоупругости, которые могут быть эффективно использованы в приложениях.

**1. Основные уравнения.** Система линеаризованных дифференциальных уравнений для трехмерных квазистатических задач связанной термоупругости, как известно [1—6], имеет вид (для однородных анизотропных сред):

$$-C_{ijkl}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_j}+\beta_{ij}T_{,j}=X_i \tag{1.1}$$

$$c_\varepsilon \dot{T}-\lambda_{ij}T_{,ji}+\Theta_0\beta_{ij}\dot{u}_{i,j}=G \qquad (i,j,k,l=1,2,3) \tag{1.2}$$

Здесь $u_i$ — компоненты вектора смещения; $X_i$ — компоненты вектора массовых сил; $G$ — плотность источника тепла; $T$ — отклонение текущей абсолютной температуры от абсолютной температуры $\Theta_0$ недеформированного состояния; $C_{ijkl}$ изотермические упругие постоянные; $C_\varepsilon$ — теплоемкость при постоянной деформации; $\lambda_{ij}$ — коэффициенты теплопроводности, а величины $\beta_{ij}$ — связаны и с механическими и с температурными константами тела. В уравнении притока тепла (1.2) член $\Theta_0\beta_{ij}\dot{u}_{i,j}$ отражает влияние связанности поля деформаций и поля температуры. При этом выражение Дюгамеля — Неймана для напряжений имеет вид

$$\sigma_{ij}={}^1/_2C_{ijkl}(u_{k,l}+u_{l,k})-\beta_{ij}T \tag{1.3}$$

Рассмотрим систему уравнений (1.1) и (1.2) в пространстве $R^3$, а также в $V\subset R^3$. Предполагается, что область $V$ обладает кусочно-гладкой границей $S$. Точки $R^3$ обозначаются через $\mathrm{x}=(x_1, x_2, x_3)$ и $\mathrm{y}=(y_1, y_2, y_3)$. Считается, что тензоры $C_{ijkl}$, $\beta_{ij}$, $\lambda_{ij}$ симметричны: $C_{ijkl}=C_{klij}=C_{jikl}=C_{ijlk}$, $\beta_{ij}=\beta_{ji}$, $\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$.

[1] См. *Мамедов Ю. М.* К теории потенциала для квазистатических задач несвязанной термоупругости. М., 1984. 18 с.— Деп. в ВИНИТИ 27.09.84, № 3103–84.

Пусть граница $S$ области $V$ разбивается на четыре части $S^1$, $S^2$, $S^3$, $S^4$ на первой из которых заданы перемещения и температура, на второй поверхностные силы и тепловой поток, на третьей перемещения и тепловой поток, на четвертой поверхностные силы и температура. Тогда $S=S^1\cup S^2\cup S^3\cup \cup S^4$, $S^i\cap S^j=\varnothing$ $(i, j=1, 2, 3, 4)$.

$$\mathbf{u}=\mathbf{f}, \quad T=g \quad \text{на} \quad S^1 \tag{1.4}$$

$$\mathbf{p}=\mathbf{h}, \quad T=g \quad \text{на} \quad S_R^2 \tag{1.5}$$

$$\mathbf{u}=\mathbf{f}, \quad Q=d \quad \text{на} \quad S_R^3 \tag{1.6}$$

$$\mathbf{p}=\mathbf{h}, \quad T=g \quad \text{на} \quad S_R^4 \tag{1.7}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)=\mathbf{u}^\circ(\mathbf{x}), \quad T(\mathbf{x}, 0)=T^\circ(\mathbf{x}) \tag{1.8}$$

$$\mathbf{p}=\mathbf{T}_\mathbf{n}\mathbf{u}-\beta\mathbf{n}T, \quad Q=\partial/\partial n^+(\mathbf{x})T \tag{1.9}$$

Здесь $\mathbf{T}_\mathbf{n}$ — оператор напряжения; $S_R^2$, $S_R^3$, $S_R^4$ — множества всех точек соответственно на $S^2$, $S^3$ и $S^4$, в которых определена нормаль; $g$, $d$, $\mathbf{f}=(f_1, f_2, f_3)$ и $\mathbf{h}=(h_1, h_2, h_3)$, заданные на границе тела скалярные и векторные функции и

$$\frac{\partial}{\partial n^+(\mathbf{x})}=\sum_{i,j}^{3}\lambda_{ij}n_i(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_j}$$

Начально краевые задачи для связанной термоупругой квазистатики формулируются следующим образом. Найти термоупругое состояние $[\mathbf{u}, \sigma, T]$ среды $V$ в промежутке времени $[t_0, t_1]$ соответствующее массовой силе $\mathbf{X}$ — тепловому источнику $G$ и начальному условию (1.8) и по граничным условиям (1.4) при $S^1=S$, в случае первой задачи, (1.5) при $S^2=S$ в случае второй задачи, (1.6) при $S^3=S$ в случае третьей задачи, (1.7) при $S^4=S$ в случае четвертой задачи. Будем говорить, что имеет место смешанная начально краевая задача для связанной термоупругой квазистатики, если рассматривается по крайней мере две из четырех частей $S^1$, $S^2$, $S^3$, $S^4$ границы $S$.

**2. Теорема взаимности.** Для построения теоремы взаимности выпишем сопряженную к (1.1) и (1.2) систему линейных дифференциальных уравнений

$$-C_{ijkl}\frac{\partial^2 u_k'}{\partial x_l\partial x_j}-\Theta_0\beta_{ij}T_{,j}^{\bullet\prime}=X_i'$$

$$c_\varepsilon T^{\bullet\prime}-\lambda_{ij}T'_{,ij}-\beta_{ij}u'_{i,j}=G'$$

Для сопряженной системы

$$\sigma_{ij}'={}^1/{}_2C_{ijkl}(u'_{k,l}+u'_{l,k})+\Theta_0\beta_{ij}T^{\bullet\prime}, \qquad p_i'=\sigma_{ij}'n_j \tag{2.1}$$

Применим к соотношениям [(2.1) и (1.3)] Дюгамеля — Неймана преобразование Лапласа. Тогда получим

$$\left.\begin{aligned}\bar\sigma_{ij}&=C_{ijkl}\bar\varepsilon_{kl}-\beta_{ij}\bar T\\ \bar\sigma_{ij}'&=C_{ijkl}\bar\varepsilon_{kl}'+\Theta_0\beta_{ij}\bar T^{\bullet\prime}\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

С помощью уравнений (2.2) не трудно показать, что

$$\int_V(\bar u_i'\bar X_i-\bar u_i\bar X_i')dV+\int_S(\bar u_i'\bar p_i-\bar u_i\bar p_i')dS=-\int_V\beta_{ij}\bar\varepsilon_{ij}'\bar T\,dV-$$

$$-\int_V\Theta_0\bar\varepsilon_{ij}\beta_{ij}(p^*\bar T'-T'^0)\,dV \tag{2.3}$$

Здесь $p^*$ — является параметром преобразования. Полученное уравнение (2.3) является первой частью теоремы взаимности. Вторую часть теоремы взаимности мы получим, рассмотрев уравнение теплопроводности. Оно имеет следующий вид

$$\int_S [\overline{T}\overline{Q}'-\overline{T}'\overline{Q}]\,dS-\int_V [\overline{G}\overline{T}'-\overline{G}'\overline{T}]\,dV-\int_V c_\varepsilon T^0\overline{T}'\,dV-$$
$$-\int_V \Theta_0\beta_{ij}\overline{T}'\overset{0}{u}_{i,j}\,dV=-\left(\int_V \beta_{ij}\overline{T}\overline{u}'_{i,j}\,dV+\int_V \Theta_0\beta_{ij}\overline{T}'p^*\overline{u}_{i,j}\,dV\right) \qquad (2.4)$$

Исключая из соотношений (2.3) и (2.4) интеграл $\int_V [\beta_{ij}\overline{T}\overline{u}'_{i,j}+$ $+\Theta_0\beta_{ij}\overline{T}'p^*\overline{u}_{i,j}]\,dV$ и применяя к полученному уравнению обратное преобразование Лапласа, получим теорему взаимности для трехмерных квазистатических задач связанной термоупругости.

$$\int_0^t\int_V [\overline{u}_i'(\mathbf{x},t-\tau)X_i(\mathbf{x},\tau)-u_i(\mathbf{x},\tau)X_i'(\mathbf{x},t-\tau)]\,dV_{\mathbf{x}}\,d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_V [G(\mathbf{x},\tau)T'(\mathbf{x},t-\tau)-G'(\mathbf{x},t-\tau)T(\mathbf{x},\tau)]\,dV_{\mathbf{x}}\,d\tau+$$
$$+\int_V c_\varepsilon T^0(\mathbf{x})T'(\mathbf{x},t)\,dV_{\mathbf{x}}+\int_V \Theta_0\beta_{ij}\varepsilon_{ij}{}^0T'(\mathbf{x},t)\,dV_{\mathbf{x}}=$$
$$=\int_0^t\int_S [T(\mathbf{x},\tau)Q'(\mathbf{x},t-\tau)-T'(\mathbf{x},t-\tau)Q(\mathbf{x},\tau)]\,dS_{\mathbf{x}}\,d\tau-$$
$$-\int_0^t\int_S [u_i'(\mathbf{x},t-\tau)p_i(\mathbf{x},\tau)-u_i(\mathbf{x},\tau)p_i'(\mathbf{x},t-\tau)]\,dS_{\mathbf{x}}\,d\tau \qquad (2.5)$$

**3. Формулы типа формулы Сомильяны.** Для построения формулы типа формулы Сомильяны используются фундаментальные решения сопряженной системы.

Заменив в формуле (2.5) $\mathbf{x}$ на $\mathbf{y}$, и положив в ней

$$X_i'=\delta_{im}\delta(\mathbf{y}-\mathbf{x})\delta(t),\quad G'=0$$
$$u_i'=U_{im}(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau),\quad p_i=T_{im}(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)$$
$$T'=T_m^*(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau),\quad Q'=Q_m^*(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)$$

получим

$$u_m(\mathbf{x},t)=\int_0^t\int_V U_{im}(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)X_i(\mathbf{y},\tau)\,dV_{\mathbf{y}}\,d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_V T_m^*(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)G(\mathbf{y},\tau)\,dV_{\mathbf{y}}\,d\tau+\int_V c_\varepsilon T^0(\mathbf{y})T_m^*(\mathbf{y},\mathbf{x},t)\,dV_{\mathbf{y}}+$$
$$+\int_V \Theta_0\beta_{ij}\varepsilon_{ij}{}^0T_m^*(\mathbf{y},\mathbf{x},t)\,dV_{\mathbf{y}}-\int_0^t\int_S [Q_m^*(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)T(\mathbf{y},\tau)-$$
$$-T_m^*(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)Q(\mathbf{y},\tau)]\,dS_{\mathbf{y}}\,d\tau+\int_0^t\int_S [U_{im}(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)p_i(\mathbf{y},\tau)$$
$$-T_{im}(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)u_i(\mathbf{y},\tau)]\,dS_{\mathbf{y}}\,d\tau,\qquad \mathbf{x}\in V \qquad (3.1)$$

Подставляем теперь в теореме взаимности (2.5) (после замены $\mathbf{x}$ на $\mathbf{y}$) $X_i'=0$, $G'=\delta(\mathbf{y}-\mathbf{x})\delta(t-\tau)$, $u_i'=W_i(\mathbf{y},\mathbf{x},t)$, $p_i'=H_i(\mathbf{y},\mathbf{x},t)$, $T'=T_*(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)$, $Q'=Q_*(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)$. Тогда получим

$$
\begin{gathered}
T(\mathbf{x},t)=\int_0^t\int_V T_*(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)G(\mathbf{y},\tau)\,dV_{\mathbf{y}}\,d\tau+\\
+\int_V c_\varepsilon T^0(\mathbf{y})T_*(\mathbf{y},\mathbf{x},t)\,dV_{\mathbf{y}}+\int_V \Theta_0\beta_{ij}\varepsilon_{ij}{}^0 T_*(\mathbf{y},\mathbf{x},t)\,dV_{\mathbf{y}}+\\
+\int_0^t\int_V W_i(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)X_i(\mathbf{y},\tau)\,dV_{\mathbf{y}}\,d\tau-\\
-\int_0^t\int_S [Q_*(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)T(\mathbf{y},\tau)-T_*(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)Q(\mathbf{y},\tau)]\,dS_{\mathbf{y}}\,d\tau+\\
+\int_0^t\int_S [W_i(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)p_i(\mathbf{y},\tau)-H_i(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)u_i(\mathbf{y},\tau)]\,dS_{\mathbf{y}}\,d\tau,\quad \mathbf{x}\in V
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

С помощью полученных формул вычисляются смещения и температура внутри тела через их граничные значения и граничные значения их первых производных.

Установим связь между фундаментальными решениями исходной и сопряженной системы. На основе равенство (2.5) нетрудно показать, что [5] $U_{mi}'(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=U_{im}(\mathbf{y},\mathbf{x},t)$; $U_m'(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=T_m^*(\mathbf{y},\mathbf{x},t)$; $T_*'(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=T_*(\mathbf{y},\mathbf{x},t)$; $T_i'(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=W_i(\mathbf{y},\mathbf{x},t)$, причем через $U_{mi}'$, $U_m'$, $T_*'$, $T_i'$ обозначены компоненты фундаментальных решений исходной системы [(1.1) и (1.2)].

**4. Изотропная среда. Квазистатические термоупругие потенциалы.** В случае изотропного однородного тела уравнения квазистатических задач связанной термоупругости значительно упрощаются [1]:

$$-\mu u_{i,kk}-(\lambda+\mu)u_{k,ki}+\beta_0 T_{,i}=X_i$$

$$c_\varepsilon \dot T-\lambda_0\Delta T+\Theta_0\beta_0\dot u_{i,i}=G$$

В этом случае смещения и температуры, вызванные действием в безграничной среде сосредоточенных медленно изменяющихся массовых сил и источников тепла, определяются по следующим формулам (они здесь приводятся без вывода).

$$
\begin{gathered}
U_{kj}'(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=\frac{\delta(t)}{4\pi r}(A_+\delta_{kj}+A_-r_{,k}r_{,j})+\frac{\delta_{kj}}{4\pi r}\left\{\frac{B}{r^2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{r}{2}\left(\frac{1}{k\varkappa t}\right)^{1/2}\right)-\right.\right.\\
\left.\left.-2r\left(\frac{1}{4\pi k\varkappa t}\right)^{1/2}\exp\left[-\left(\frac{1}{4\varkappa kt}\right)r^2\right]\right]\right\}+\frac{r_{,k}r_{,j}}{4\pi r}\left\{B\left[\left(\frac{1}{k\varkappa t}r+\frac{6}{r}\right)\times\right.\right.\\
\left.\left.\times\left(\frac{1}{4\pi\varkappa tk}\right)^{1/2}\exp\left[-\left(\frac{1}{4\varkappa kt}\right)r^2\right]-\frac{3}{r^2}\operatorname{erf}\left(\frac{r}{2}\left(\frac{1}{\varkappa tk}\right)^{1/2}\right)\right]\right\}
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

$$
\begin{gathered}
U_k'(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=-\frac{1}{c_\varepsilon}\frac{\beta_0 r_{,k}k}{4\pi(\lambda+2\mu)r}\left[\left(\frac{1}{\pi\varkappa tk}\right)^{1/2}\exp\left[-\left(\frac{1}{4\varkappa tk}\right)r^2\right]-\right.\\
\left.-\frac{1}{r}\operatorname{erf}\left(\frac{r}{2}\left(\frac{1}{k\varkappa t}\right)^{1/2}\right)\right]
\end{gathered}
\tag{4.2}
$$

$$T_*'(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=\frac{1}{c_\varepsilon}\left[\frac{1}{k(4\pi\varkappa t)^3}\right]^{1/2}\exp\left[-\left(\frac{1}{4\varkappa kt}\right)r^2\right]\tag{4.3}$$

$$A_{\pm}=\frac{\lambda+(2\pm k)\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}, \quad k=\frac{1}{(1+m\eta\varkappa)}$$

$$\eta=\Theta_0\beta_0/\lambda_0,\ \varkappa=\lambda_0/c_\varepsilon,\ m=\beta_0/(\lambda+2\mu)$$

$$r=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$$

Заметим, что перемещение $U_{kj}'$ складывается из двух членов: первого, который изменяется во времени как функция $\delta(t)$ и второго, характеризующего связанность поля деформаций и температурного поля. Введем обозначения

$$\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{y},\tau)=\begin{Vmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\T\end{Vmatrix},\quad \overline{\mathbf{p}}(\mathbf{y},\tau)=\begin{Vmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\Q\end{Vmatrix},\quad \overline{\mathbf{U}}(\mathbf{y}-\mathbf{x},t-\tau)=\begin{Vmatrix}U_{11}&U_{21}&U_{31}&T_1^*\\U_{12}&U_{22}&U_{32}&T_2^*\\U_{13}&U_{23}&U_{33}&T_3^*\\W_1&W_2&W_3&T_*\end{Vmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{T}}^*(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)=\begin{Vmatrix}T_1^*\\T_2^*\\T_3^*\\T_*\end{Vmatrix},\quad \overline{\mathbf{T}}(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)=\begin{Vmatrix}T_{11}&T_{21}&T_{31}&Q_1^*\\T_{12}&T_{22}&T_{32}&Q_2^*\\T_{13}&T_{23}&T_{33}&Q_3^*\\H_1&H_2&H_3&Q_*\end{Vmatrix}$$

Тогда систему формул (3.1) и (3.2) можно записать в векторной форме

$$\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)=\int_0^t\int_V\overline{\mathbf{U}}(\mathbf{y}-\mathbf{x},t-\tau)\overline{\mathbf{X}}(\mathbf{y},\tau)\,dV_{\mathbf{y}}\,d\tau+$$
$$+\int_V\{\Theta_0\beta_0[\overline{\mathbf{T}}^*(\mathbf{y}-\mathbf{x},t)\,\varepsilon^0(\mathbf{y})]+c_\varepsilon\overline{\mathbf{T}}^*(\mathbf{y}-\mathbf{x},t)T^0(\mathbf{y})\}\,dV_{\mathbf{y}}+$$
$$+\int_0^t\int_S\overline{\mathbf{U}}(\mathbf{y}-\mathbf{x},t-\tau)\overline{\mathbf{p}}(\mathbf{y},\tau)\,dS_{\mathbf{y}}\,d\tau-\int_0^t\int_S\overline{\mathbf{T}}(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{y},\tau)\,dS_{\mathbf{y}}\,d\tau \qquad (4.4)$$

$$\overline{T}(\mathbf{y},\mathbf{x},t)=(\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{n}}^*(\overline{\mathbf{U}}(\mathbf{y}-\mathbf{x},t))^T)^T$$

$$(\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{n}}^*\overline{\mathbf{u}}')_i=\begin{cases}T_{ik}(n_{\mathbf{y}},\partial_{\mathbf{y}})u_k'+\Theta_0\beta_0n_iT'', & i=\overline{1,3}\\ \lambda_0\partial T'/\partial y_jn_j(\mathbf{y}), & i=4\end{cases}$$

$$T_{ik}(n_{\mathbf{y}},\partial_{\mathbf{y}})=\mu\delta_{ik}n_j\partial_j+\mu n_k\partial_i+\lambda n_i\partial_k$$

причем знак $T$ над $\mathbf{U}$ и $\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{n}}^*\overline{\mathbf{U}}^T$ означает операцию транспонирования.

В формуле (4.4) выделены четыре потенциала:

$$\overline{\mathbf{\Omega}}_V(\mathbf{x},t,\overline{\mathbf{X}})=\int_0^t\int_V\overline{\mathbf{U}}(\mathbf{y}-\mathbf{x},t-\tau)\overline{\mathbf{X}}(\mathbf{y},\tau)\,dV_{\mathbf{y}}\,d\tau \qquad (4.5)$$

квазистатический термоупругий объемный потенциал с плотностью $\overline{\mathbf{X}}$.

$$\overline{\mathbf{\Omega}}_V{}^0(\mathbf{x},t;\varepsilon^0,T^0)=\int_V\{\Theta_0\beta_0[\overline{\mathbf{T}}^*(\mathbf{y}-\mathbf{x},t)\,\varepsilon^0(\mathbf{y})]+c_\varepsilon\overline{\mathbf{T}}^*(\mathbf{y}-\mathbf{x},t)T^0(\mathbf{y})\}\,dV_{\mathbf{y}} \qquad (4.6)$$

квазистатический термоупругий начальный потенциал с плотностью $\{\varepsilon^0,\ T^0\}$:

$$\overline{\Omega}(\mathbf{x};t;\overline{\mathbf{p}})=\int_0^t\int_S\overline{\mathbf{U}}(\mathbf{y}-\mathbf{x},t-\tau)\overline{\mathbf{p}}(\mathbf{y},\tau)\,dS_{\mathbf{y}}\,d\tau \qquad (4.7)$$

квазистатический термоупругий потенциал простого слоя с плотностью $\overline{\mathbf{p}}$:

$$\overline{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, t; \overline{\mathbf{u}}) = \int_0^t \int_S \overline{\mathbf{T}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau)\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, \tau)\, dS_y\, d\tau \tag{4.8}$$

квазистатический термоупругий потенциал двойного слоя с плотностью $\overline{\mathbf{u}}$.

Свойства этих потенциалов аналогичны свойствам одноименных потенциалов трехмерной несвязанной термоупругой квазистатики.

**5. Граничные свойства квазистатических термоупругих потенциалов.** Очевидно, что функции $U_{ik}$, $T_k^*$, $T_*$, $W_k$, $T_{ik}$, $H_k$, $Q_k^*$, $Q_*$ являются составляющими матриц — ядер потенциалов простого и двойного слоя (см. (4.7), (4.8)).

Анализируя формулы (4.1), (4.2), (4.3) и (4.4), легко заметить, что в ядрах этих потенциалов при $r\to 0$ содержатся функции со слабыми особенностями $(1/r)$ и особенностями вида $1/r^2$. При этом имеет место следующее заключение [2].

Если $S$ является кусочно-гладкой замкнутой поверхностью Ляпунова и $\overline{\varphi}$ — четырехмерный вектор достаточной гладкости, то существуют угловые граничные значения потенциалов $\overline{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, t; \overline{\varphi})$ и $\overline{\mathbf{R}}_n\overline{\Omega}(\mathbf{x}, t; \overline{\varphi})$ почти всюду на $S$ при $t>0$ и они вычисляются по формулам

$$\overline{\mathbf{W}}^{\pm}(\mathbf{x}, t; \overline{\varphi}) = \mp\frac{1}{2}\overline{\varphi}(\mathbf{x}, t) + \int_0^t\int_S \overline{\mathbf{T}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau)\overline{\varphi}(\mathbf{y}, \tau)\, dS_y\, d\tau \tag{5.1}$$

$$[\overline{\mathbf{R}}_n\overline{\Omega}(\mathbf{x}, t; \overline{\varphi})]^{\pm} = \pm\frac{1}{2}\overline{\varphi}(\mathbf{x}, t) + \overline{\mathbf{R}}_n \int_0^t\int_S \overline{\mathbf{U}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}, t-\tau)\times$$

$$\times\overline{\varphi}(\mathbf{y}, \tau)\, dS_y\, d\tau, \qquad \overline{\mathbf{p}} = \overline{\mathbf{R}}_n\overline{\mathbf{u}}. \tag{5.2}$$

Интегралы в правых частях равенства (5.1) и (5.2) понимаются в смысле главного значения. Индекс + (—) обозначает предельные изнутри (извне) значения функции от $\mathbf{x}$. Отметим, что потенциалы (4.5), (4.6), (4.7) при достаточной гладкости своих плотностей непрерывно продолжимы почти всюду на $S$.

**6. Интегральные уравнения первой и второй основных краевых задач.** Пусть граница $S$ состоит из конечного числа гладких поверхностей Ляпунова. Тогда осуществляя предельный переход в формуле (4.4) и учитывая равенства (5.1) и (5.2), получим почти везде на $S$ интегральное тождество

$$\frac{1}{2}\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t\int_V \overline{\mathbf{U}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}, t-\tau)\overline{\mathbf{X}}(\mathbf{y}, \tau)\, dV_y\, d\tau +$$

$$+ \int_V \{\Theta_0\beta_0[\overline{\mathbf{T}}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)\varepsilon^0(\mathbf{y})] + c_\varepsilon\overline{\mathbf{T}}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)T^0(\mathbf{y})\}\, dV_y +$$

$$+ \int_0^t\int_S \overline{\mathbf{U}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}, t-\tau)\overline{\mathbf{p}}(\mathbf{y}, \tau)\, dS_y\, d\tau - \int_0^t\int_S \overline{\mathbf{T}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau)\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, \tau)\, dS_y\, d\tau. \tag{6.1}$$

Предположим, что рассматривается вторая краевая задача. Тогда краевые значения функции $p_i$ и $Q$ выражаются через известные функции $h_i(\mathbf{x}, t)$ и $d(\mathbf{x}, t)$. При этом равенство (6.1) становится сингулярным интегральным уравнением второго рода относительно неизвестных граничных функций $u_i$ и $T$. Если рассматривается первая краевая задача (т. е. задаются граничные значения функции $u_i$ и $T$), то интегральное тождество (6.1) представляет собой регулярное интегральное уравнение первого рода относительно $p_i$, $Q$.

Интегральные уравнения для остальных краевых задач можно построить также с помощью тождества (6.1) с учетом соответствующих краевых условий.

**7. Формулы представления для напряжений и теплого потока.** Заменяя в равенстве (3.1) обозначения индекса $m$ на $l$ и воздействуя на обе части этого равенства оператором $C_{mrlr}\partial/\partial x_k$ и беря во внимание формулы (1.9), получим интегральную формулу представления для напряжений

$$\sigma_{mr}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_V D_{mri}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau) X_i(\mathbf{y}, \tau)\, dV_{\mathbf{y}}\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_V V_{mr}{}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau) G(\mathbf{y}, \tau)\, dV_{\mathbf{y}}\, d\tau + \int_V c_\varepsilon T^0(\mathbf{y})\, V_{mr}{}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)\, dV_{\mathbf{y}} +$$

$$+ \int_V \Theta_0 \beta_{ij} \varepsilon_{ij}{}^0 V_{mr}{}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)\, dV_{\mathbf{y}} - \int_0^t \int_S [S_{mr}{}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau) T(\mathbf{y}, \tau) -$$

$$- V_{mr}{}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau) Q(\mathbf{y}, \tau)]\, dS_{\mathbf{y}}\, d\tau + \int_0^t \int_S [D_{mri}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau) p_i(\mathbf{y}, \tau) -$$

$$- S_{mri}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau) u_i(\mathbf{y}, \tau)]\, dS_{\mathbf{y}}\, d\tau - T(\mathbf{x}, t)\beta_{mr}, \qquad \mathbf{x} \in V \tag{7.1}$$

$$D_{mri}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t) = C_{mrlk} \frac{\partial}{\partial x_k} U_{il}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t),$$

$$S_{mri}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t) = C_{mrlk} \frac{\partial}{\partial x_k} T_{il}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)$$

$$S_{mr}{}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t) = C_{mrlk} \frac{\partial}{\partial x_k} Q_l{}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t),$$

$$V_{mr}{}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t) = C_{mrlk} \frac{\partial}{\partial x_k} T_l{}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)$$

Теперь воздействуя на обе части равенства (3.2) оператором $\partial/\partial n^+(\mathbf{x})$ получим интегральную формулу представления для теплового потока

$$Q(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_V \frac{\partial}{\partial n^+(\mathbf{x})} T_*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau) G(\mathbf{y}, \tau)\, dV_{\mathbf{y}}\, d\tau +$$

$$+ \int_V c_\varepsilon \frac{\partial}{\partial n^+(\mathbf{x})} T_*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t) T^0(\mathbf{y})\, dV_{\mathbf{y}} + \int_V \Theta_0 \beta_{ij} \varepsilon_{ij}{}^0(\mathbf{y}) \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial n^+(\mathbf{x})} T_*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)\, dV_y + \int_0^t \int_V \frac{\partial}{\partial n^+(\mathbf{x})} W_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau) X_i(\mathbf{y}, \tau)\, dV_y\, d\tau -$$

$$-\int_0^t \int_S \left[ \frac{\partial}{\partial n^+(\mathbf{x})} Q_*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau) T(\mathbf{y}, \tau) - \frac{\partial}{\partial n^+(\mathbf{x})} T_*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau) Q(\mathbf{y}, \tau) \right] \times$$

$$\times dS_y\, d\tau + \int_0^t \int_S \left[ \frac{\partial}{\partial n^+(\mathbf{x})} W_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau) p_i(\mathbf{y}, \tau) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial n^+(\mathbf{x})} H_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau) u_i(\mathbf{y}, \tau) \right] dS_y\, d\tau, \quad \mathbf{x} \in V \qquad (7.2)$$

С помощью представлений (7.1) и (7.2) можно вычислить значения напряжений и теплового потока через их граничные значения и граничные значения перемещений и температуры.

Отметим, что изложенный выше подход можно распространить без особого труда на соответствующие краевые задачи теории консилидации [7].

Автор искренне благодарит Р. В. Гольдштейна за внимание к работе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976, 662 с.
3. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981, 686 с.
4. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. Киев: Наук. думка, 1976. 310 с.
5. *Угодчиков А. Г., Хуторянский Н. М.* Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань. Изд-во Казан. ун-та. 1986. 295 с.
6. *Победря Б. Е., Димитриенко Ю. Н.* Связанные задачи линейной термомеханики деформируемого твердого тела. // Успехи механики. 1987, т. 10. Вып. 2. С. 97–137.
7. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.

Баку

Поступила в редакцию
2.VIII.1989