

УДК 531.36:534.1

© 1991 г.

В. И. ГУЛЯЕВ, А. Л. ЗУБРИЦКАЯ, В. Л. КОШКИН

## УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ БИФУРКАЦИЙ УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА КОЛЕБАНИЙ СПУТНИКА, ПОРОЖДАЕМЫЕ НЕУСТОЙЧИВЫМ СТАЦИОНАРНЫМ СОСТОЯНИЕМ

1. В теории динамических систем одним из замечательных результатов последнего времени явилось открытие Фейгенбаумом свойства универсальности в последовательностях бифуркаций удвоения периода колебаний нелинейных детерминированных систем при изменении характерного параметра  $\lambda$  [1], определяющего, в частности, интенсивность возмущения. В результате исследований одномерных и двумерных отображений, обладающих свойствами диссипативных и гамильтоновых систем [4–5], было показано, что последовательности бифуркационных значений параметра  $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(i)}$ , при которых происходят удвоения периода, сходятся к некоторому предельному значению (точке накопления)  $\lambda^{(\infty)}$ . При этом показатель скорости сходимости, связывающий три соседних бифуркационных значения параметра

$$\delta^{(i)} = (\lambda^{(i+1)} - \lambda^{(i)}) / (\lambda^{(i+2)} - \lambda^{(i+1)}) \quad (1.1)$$

не зависит от вида отображения и при увеличении  $i$  стремится к универсальной постоянной Фейгенбаума  $\delta^{(i)} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \delta$ , значение которой для гамильтоновых систем  $\delta = 8,72109720 \dots$  [2]. Наличие универсальности позволяет по нескольким первым членам последовательности предсказать предельное значение параметра  $\lambda^{(\infty)}$ , при котором колебания будут носить хаотический характер

$$\lambda^{(\infty)} \approx \lambda^{(i)} + (\lambda^{(i+1)} - \lambda^{(i)}) \delta / (\delta - 1) \quad (1.2)$$

В диссипативных системах универсальные последовательности бифуркаций удвоения периода являются одним из путей возникновения странных аттракторов. Их глобальному исследованию в динамических моделях радиофизики, физики плазмы, химической кинетики, метеорологии и др. посвящено большое число работ (см., например, [4–7]). Между тем, для ряда гамильтоновых систем классической и небесной механики представляет интерес локальное исследование отдельных областей фазового пространства с целью определения устойчивых периодических движений, путей развития неустойчивости и хаотических движений.

Ранее [8], при исследовании эволюции периодических движений спутника относительно центра масс при изменении эксцентриситета эллиптической орбиты была показана возможность возникновения хаотических колебаний через универсальную последовательность бифуркаций удвоения периода. При рассмотрении в качестве порождающего решения  $2\pi$ -периодических колебаний спутника в окрестности устойчивого стационарного состояния была построена последовательность из восьми первых бифуркаций удвоения периода.

В настоящей работе найден ряд универсальных последовательностей бифуркаций удвоения периода колебаний спутника, порождаемых неустойчивым стационарным состоянием и приводящих к хаотическим режимам движения различной степени упорядоченности.

2. Поставим задачу об эволюции и исследовании устойчивости периодических решений уравнения плоских колебаний спутника относительно центра масс, движущегося в центральном силовом поле, при изменении эксцентриситета эллиптической орбиты. Обозначив через  $\gamma = \gamma(v)$  удвоенный угол между радиусом-вектором, проведенным из притягивающего центра в центр масс спутника, и главной центральной осью инерции спутника, соответствующей его максимальному моменту

инерции, уравнение движения запишем в виде [9]

$$(1+l \cos v) \gamma'' - 2l \sin v \cdot \gamma' + n^2 \sin v = 4l \sin v \quad (2.1)$$

где  $l$  — эксцентриситет орбиты (обозначение отличается от стандартного по техническим причинам);  $n^2 = 3(A-C)/B$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — главные центральные моменты инерции спутника,  $v$  — истинная аномалия, штрихом обозначено дифференцирование по  $v$ .

При  $l=0$  уравнение (2.1) имеет три стационарных решения: одно устойчивое  $\gamma_1=0$  и два неустойчивых  $\gamma_{2,3}=\pm\pi$ . При малом изменении эксцентриситета орбиты в окрестности каждого из стационарных состояний возникают малые  $2\pi$ -периодические колебания, устойчивость которых зависит от устойчивости соответствующего порождающего решения. Дальнейшее увеличение эксцентриситета может привести к смене типа устойчивости и к бифуркациям периодических решений уравнения (2.1).

Для исследования эволюции периодических решений уравнения (2.1), их устойчивости и бифуркаций воспользуемся методом продолжения решения по параметру в форме [8, 10, 11]. С этой целью представим уравнение (2.1) в виде

$$x' = f(x, l, v), \quad x = \text{col}(\gamma(v), \gamma'(v)) \quad (2.2)$$

Пусть при некотором значении эксцентриситета орбиты  $l=l_{(0)}$  спутник совершает колебания относительно центра масс с периодом  $T=2\pi$ . Соответствующее решение уравнения (2.2)  $x_{(0)}(v)$  удовлетворяет условиям  $T$ -периодичности. Принимая во внимание непрерывную зависимость решения  $x(v)$  уравнения (2.2) от начальных условий  $x(0)$  и параметра  $l$ , условия  $T$ -периодичности запишем в виде

$$x(0) = x[x(0), l, T] \quad (2.3)$$

Задача построения периодического решения уравнения (2.3) при значении эксцентриситета  $l_{(1)} = l_{(0)} + \delta l$  заключается в определении вектора начальных условий  $x_{(1)}(0) = x_{(0)}(0) + \delta x(0)$ , удовлетворяющего соотношениям (2.3). Рассматривая начальные условия  $x(0)$  как вектор параметров, разложим правую часть (2.3) в ряд Тейлора в окрестности точки  $x(0) = x_{(0)}(0)$ ,  $l = l_{(0)}$ :

$$\begin{aligned} x(0) + \delta x(0) &= x[x_{(0)}(0), l_{(0)}, T] + \frac{\partial x(T)}{\partial x(0)} \delta x(0) + \frac{\partial x(T)}{\partial l} \delta l + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 x_i(T)}{\partial x_j(0) \partial x_k(0)} \delta x_j(0) \delta x_k(0) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 x_i(T)}{\partial x_j(0) \partial l} \delta x_j(0) \delta l + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 x_i(T)}{\partial l^2} (\delta l)^2 + \dots \quad (2.4) \end{aligned}$$

Для определения вариаций начальных условий  $\delta x(0)$  ограничимся в (2.4) членами первого порядка малости, что с учетом (2.3) приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений

$$[Y(T) - E] \delta x(0) = y_i(T) \delta l \quad (2.5)$$

где  $Y(T) = \partial x(T) / \partial x(0)$  — матрица монодромии, определяемая из решения однородного матричного уравнения

$$Y' = f_x Y \quad (Y(0) = E) \quad (2.6)$$

$f_x = \partial f / \partial x$ ,  $E$  — единичная матрица;  $y_i(T) = \partial x(T) / \partial l$  — вектор, определяемый как решение системы уравнений в вариациях

$$y_i' = f_{xy_i} + f_l, \quad (y_i(0) = 0) \quad (2.7)$$

Решение задачи Коши для уравнения (2.2) с начальными условиями  $x_{(0)}(0) + \delta x(0)$  при  $l = l_{(0)} + \delta l$  и  $v = T$  будет удовлетворять условиям  $T$ -периодичности (2.3) с некоторой невязкой  $r_1(T)$ , имеющей порядок отброшенных в (2.4) членов разложения в ряд Тейлора. Уточнение начальных условий может быть произведено методом Ньютона — Канторовича

$$x_{(k)}(0) = x_{(0)}(0) + \delta x(0) + \sum_{i=1}^{k-1} \delta x_{r(i)}(0)$$

где  $\delta x_{r(i)} = -[Y(T) - E]^{-1} r(i)(T)$ ;  $k$  — число итераций.

Продолжая далее варьирование эксцентриситета  $l$ , можно найти соответствующие его значениям  $l_{(m)}$   $T$ -периодические решения (« $T$ -решения») системы (2.2).

Вычисляемая на каждом шаге продолжения по параметру матрица монодромии  $Y(T)$  определяет условия существования и единственности периодического решения уравнения (2.2) в рассматриваемой окрестности и позволяет на основании теоремы Флоке анализировать его устойчивость [12, 13].

Бифуркации удвоения периода в консервативной системе второго порядка имеют место в состояниях, для которых оба мультипликатора матрицы  $Y(T)$  равны  $\rho_{1,2} = -1$ . Так как в этом состоянии  $\det [Y(2T) - E] = 0$ , для нахождения ответвляющихся « $2T$ -решений» учтем в разложении (2.4) члены более высоких порядков малости. Учет высших членов разложения в (2.4) позволяет построить приближенные уравнения ветвления [13, 14] в форме

$$\begin{aligned} [Y(2T) - E] \delta x(0) + y_e(2T) \delta l + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 Z_{ijk}(2T) \delta x_j(0) \delta x_k(0) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 Z_{ije} \delta x_j(0) \delta e + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 z_{ie} (\delta e)^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $Z = \{Z_{ijk}\} = \partial^2 x_i(T) / \partial x_j(0) \partial x_k(0)$  — квадратная матрица размером  $2 \times 2 \times 2$  с векторными элементами,  $Z_i = \{Z_{ijl}\} = \partial^2 x_i(T) / \partial x_j(0) \partial l$  — матрица размером  $2 \times 2$ ,  $z_i = \{z_{il}\} = \partial^2 x_i(T) / \partial l^2$  — вектор.

Для определения коэффициентов разложения в (2.8) заметим, что

$$\begin{aligned} Z(v) &= \partial / \partial x(0) \partial x(v) / \partial x(0) = \partial Y(v) / \partial x(0) \\ Z_i(v) &= \partial / \partial l \partial x(v) / \partial x(0) = \partial Y(v) / \partial l \\ z_i(v) &= \partial / \partial l \partial x(v) / \partial l = \partial y_i(v) / \partial l \end{aligned} \quad (2.9)$$

Продифференцировав почленно матричное уравнение (2.6) и векторное уравнение (2.7) по начальным условиям  $x(0)$  и параметру  $l$ , изменяя порядок дифференцирования и принимая во внимание соотношения (2.9), приходим к следующей системе дифференциальных уравнений для определения искоемых коэффициентов

$$\begin{aligned} Z' &= (f_{xx} Y, Y) + f_x Z, \quad (Z(0) = 0) \\ Z_i' &= [(f_{xx} y_i + f_{xl}), Y] + f_x Z_i, \quad (Z_i(0) = 0) \\ z_i' &= [(f_{xx} y_i + f_{xl}), y_i] + f_x z_i + f_{lu}, \quad (z_i(0) = 0) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$i$	$l^{(i)}$	$\delta^{(i)}$
1	0,762623125431791	—
1'	0,809326278047066	1,3284731
2	0,807442898163178	—
2'	0,810447140728308	6,9848216
3'	0,811290862343759	8,5010219
4'	0,811411655916579	8,6872658
5'	0,811425865218358	8,7035162
6'	0,811427500865559	8,7337723
7'	0,811427688795030	8,7210075
8'	0,811427710312594	8,7210923
9'	0,811427712779919	—
10'	0,811427713062833	—
2''	0,831434877011949	8,6552383
3''	0,831757882147051	8,7106652
4''	0,831795201179918	8,7210916
5''	0,831799485471652	—
6''	0,831799976727952	—
4'''	0,828815677710357	8,7210648
5'''	0,828815886316338	—
6'''	0,828815910236118	—

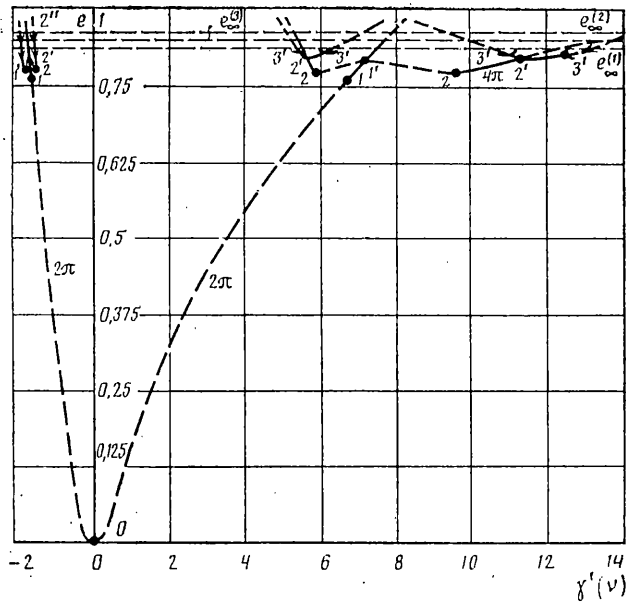
Уравнения для определения коэффициентов разложения в ряд Тейлора при членах более высокого порядка малости могут быть получены аналогично почленным дифференцированием соотношений (2.10).

Решение системы приближенных уравнений ветвления (2.8) при вычисленных из (2.6), (2.7), (2.10) значениях коэффициентов и заданном  $\delta l$  осуществляется путем отделения корней с последующим уточнением методом Ньютона. При отсутствии решений или в случае кратных корней в уравнениях (2.8) следует учесть члены разложения более высокого порядка малости.

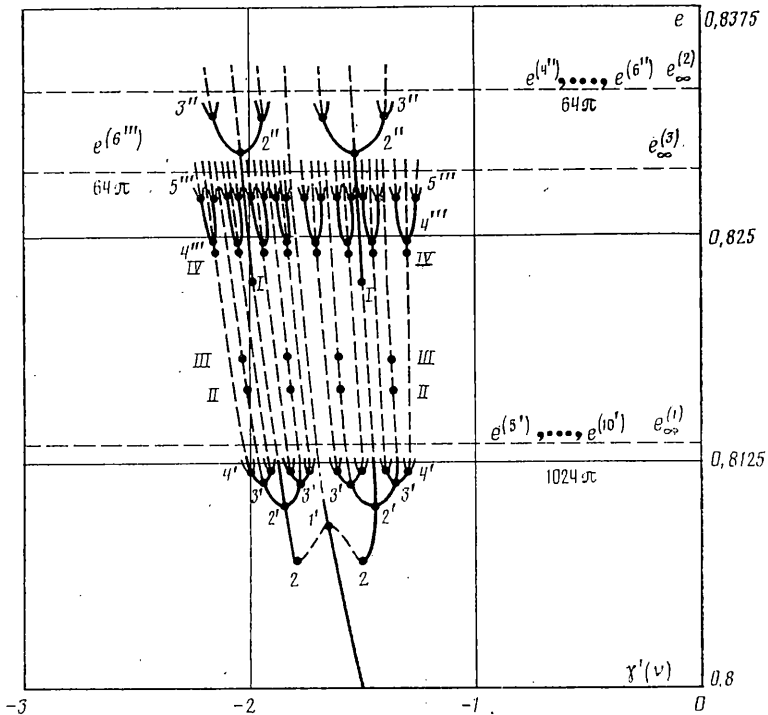
Построенные в окрестности бифуркационного значения параметра  $l=l^{(i)}$  ответвляющиеся «2T-решения» могут быть продолжены при дальнейшем варьировании эксцентриситета  $l$ . Анализ устойчивости «2T-решений» на каждой из ветвей позволяет найти бифуркационные значения параметра, при которых происходят следующие удвоения периода с возникновением «4T-решений» (если такие имеют место) и т. д.

Описанная методика построения дерева ветвлений периодических решений уравнения (2.1) требует применения высокоточных методов численного интегрирования. В настоящей работе системы уравнений (2.2), (2.6), (2.7) и в точках ветвления (2.10) интегрировались совместно методом Эверхарта 11–15 порядка [15] с удвоенной точностью.

3. Рассмотрим далее задачу о колебаниях относительно центра масс спутника, движущегося по эллиптической орбите в центральном силовом поле. Ранее, в [8], было построено дерево ветвлений и найдена сходящаяся универсальная последовательность бифуркаций удвоения периода периодических решений уравнения (2.1), порождаемых устойчивым стационарным состоянием  $l_{(0)}=0$ ,  $\gamma_{(0)}(v)=0$ ,  $\gamma'_{(0)}(v)=0$ . Исследуем теперь устойчивость и бифуркации периодических решений уравнения (2.1), приняв в качестве порождающего «2л-решения» неустойчивое стационарное состояние  $l=0$ ,  $\gamma_{(0)}(v)=\pi$ ,  $\gamma'_{(0)}(v)=0$ . Продолжение «2л-решения» по параметру  $l$  показывает, что при  $0 \leq l < l^{(1)}$  оно является неустойчивым. При значении эксцентриситета орбиты  $l=l^{(1)}$  (таблица) происходит смена устойчивости в результате наличия на ветви «2л-решений» регулярной экстремальной точки.



Фиг. 1



Фиг. 2

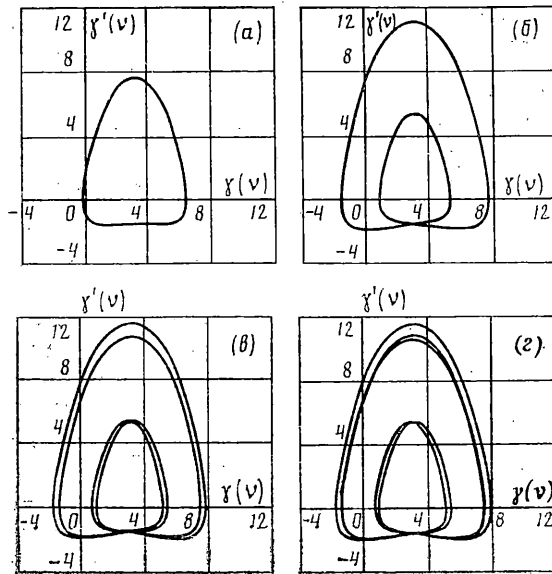
При значениях  $l^{(1)} \leq l < l^{(1')}$  (см. таблицу)  $2\pi$ -периодические колебания спутника устойчивы. При значении эксцентриситета орбиты  $l = l^{(1')}$  имеет место бифуркация удвоения периода. При дальнейшем увеличении эксцентриситета  $l > l^{(1')}$  « $2\pi$ -решения» уравнения (2.1) теряют устойчивость.

Наглядное представление об эволюции и бифуркациях « $2^i$ -решений» уравнения (2.1) дает дерево ветвлений (фиг. 1), представляющее собой сечение плоскостью  $\gamma(v) = \pi$  расширенного фазового пространства  $(\gamma(v), l, \gamma'(v))$ . Фрагмент левой ветви дерева ветвлений для интервала значений эксцентриситета  $0,8 < l < 0,85$  в увеличенном масштабе приведен на фиг. 2. На этой фигуре участки, соответствующие устойчивым траекториям, показаны сплошной линией, неустойчивым — пунктирной линией. Темными кружками на дереве ветвлений показаны некоторые начальные точки последовательности бифуркаций. Цифра со штрихом возле бифуркационной точки соответствует индексу  $i$  бифуркационного значения эксцентриситета в таблице, число штрихов — номеру обнаруженной последовательности.

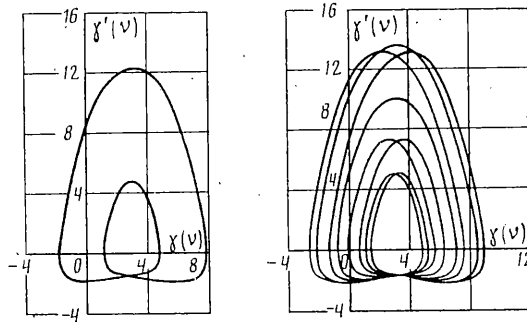
Ответвляющееся от ветви « $2l$ -решений» при  $l=l^{(1)}$  « $4l$ -решение» также является неустойчивым на интервале  $l^{(1')} > l > l^{(2)}$  (таблица). При  $l=l^{(2)}$  происходит смена устойчивости, и дальнейшее продолжение ветви « $4l$ -решений» возможно лишь при увеличении эксцентриситета  $l$ . Устойчивость  $4l$ -периодических колебаний спутника « $4l$ -колебаний» сохраняется при  $l^{(2)} \leq l < l^{(2')}$ . Бифуркация удвоения периода при  $l=l^{(2')}$  приводит к потере устойчивости « $4l$ -колебаний» и возникновению устойчивых « $8l$ -колебаний». Дальнейшее увеличение эксцентриситета  $l$  приводит к получению быстроходящейся последовательности бифуркаций удвоения периода (первая последовательность). При этом каждая  $i$ -я бифуркация удвоения периода сопровождается потерей устойчивости « $2^i l$ -колебаний» и возникновением устойчивых « $2^{i+1} l$ -колебаний» спутника. В таблице приведены значения эксцентриситета орбиты  $l^i$ , соответствующие первым десяти бифуркациям ( $i=1', 2', \dots, 10'$ ) удвоения периода первой последовательности уравнения (2.4) при  $l=l^{(i)}$ . Анализ бифуркационных значений  $l^{(i)}$  ( $i=1', 2', \dots, 10'$ ) показывает, что их последовательность сходится к некоторой предельной точке (точке накопления)  $l_{(\infty)}^1$  приближенно по закону геометрической прогрессии с показателем  $\delta^{(i)}$ , стремящимся с увеличением  $i$  к универсальной консервативной постоянной Фейгенбаума  $\delta$ . Отметим, что уже при  $i=10$  ( $\delta - \delta^{(i)} \approx \approx 5 \cdot 10^{-8}$ ). Это позволяет приближенно найти значение  $l_{(\infty)}^1$  (1.2), при котором колебания спутника будут носить хаотический характер. Для  $i=10$   $l_{(\infty)}^1 \approx 0,8114277130 \dots$  На фиг. 3,  $a$ – $g$  приведены фазовые портреты « $2^i l$ -колебаний», соответствующие бифуркационным значениям  $l^{(i)}$  для  $i=1', 2', 3', 8'$ . По фазовым портретам видно, что при удвоении периода ветви фазовых траекторий расщепляются, причем расстояние между соседними участками траектории уменьшается с увеличением  $i$ . Так, приведенная на фиг. 3,  $g$  фазовая траектория « $256l$ -колебаний» пересекает ось  $\gamma(v)$  в 256 точках.

На фрагменте левой ветви дерева ветвлений (фиг. 2) описанная выше быстро сходящаяся универсальная последовательность бифуркаций удвоения периода расположена в нижней трети.

Проследим теперь за эволюцией потерявших устойчивость в результате бифуркации удвоения периода « $4l$ -решений» уравнения (2.1) при увеличении эксцентриситета эллиптической орбиты  $l > l^{(2)}$ . Эти решения неустойчивы на интервале  $l^{(2)} < l \leq l^{(1)} = 0,8226132756$ . При  $l=l^{(1)}$  происходит смена устойчивости « $4l$ -решений» в результате бифуркации удвоения периода. Ответвляющиеся « $8l$ -решения» — неустойчивы и при продолжении не приводят к последующим бифуркациям удвоения периода. При дальнейшем увеличении эксцентриситета орбиты « $4l$ -колебания» спутника остаются устойчивыми до значения  $l=l^{(2')}$  (см. таблицу), при котором происходит бифуркация удвоения периода, на этот раз приводящая к последовательности бифуркаций и лавинообразному



Фиг. 3



Фиг. 4

развитию неустойчивости. Приведенные в таблице бифуркационные значения  $l^{(i)}$  ( $i=2'', 3'', \dots, 6''$ ) второй последовательности бифуркаций и показатели скорости сходимости  $\delta^{(i)}$  дают возможность убедиться, что и эта последовательность обладает свойством универсальности и сходится к точке накопления при  $l_{(\infty)}^2 \approx 0,8318000435\dots$  На фиг. 4, а показан фазовый портрет «64 $\pi$ -колебаний», соответствующий бифуркационному значению эксцентриситета  $l^{(6'')}$ . Анализ фазового портрета «64 $\pi$ -колебаний» (фиг. 4, а) позволяет сделать вывод, что траектория хаотических колебаний, порождаемых второй последовательностью бифуркаций при  $l \rightarrow l_{(\infty)}^2$ , обладает с механической точки зрения высокой степенью упорядоченности. В связи с этим отметим, что термин «хаотические колебания» (в настоящее время общепринятый [1–7]) в данном случае скорее отражает математическую, чем механическую суть процесса.

На фиг. 1, 2 горизонтальными штрихпунктирными линиями показаны «уровни насыщения», соответствующие предельным значениям эксцентриситета  $l_{(\infty)}^k$ , при которых сходящиеся последовательности бифуркаций приводят к возникновению хаотических колебаний. Верхний уровень насыщения (фиг. 2) соответствует второй последовательности бифуркаций удвоения периода.

Прежде чем продолжить исследование дерева ветвлений отметим, что вторая универсальная последовательность бифуркаций удвоения периода была найдена после продолжения и двукратной смены устойчивости ветви « $4\pi$ -решений» первой последовательности.

Аналогичное продолжение ветви потерявших устойчивость при  $l=l^3$  « $8\pi$ -решений» не привело к обнаружению новой сходящейся последовательности бифуркаций удвоения. Соответствующие этой ветви « $8\pi$ -колебания» спутника устойчивы при  $0,8175050082 < l < 0,8185026638$ . а далее остаются неустойчивыми вплоть до  $l \rightarrow 1$ .

По той же схеме была исследована ветвь « $16\pi$ -решений», потерявших устойчивость в результате бифуркации удвоения при  $l=l^{(4)}$ . Эти колебания остаются неустойчивыми в интервале  $l^{(4')} < l \leq 0,8288105160$ , а при дальнейшем увеличении эксцентриситета приводят к универсальному каскаду бифуркаций (см. третью последовательность  $l^{(i'')}$  в таблице). Уровень насыщения этой последовательности соответствует значению эксцентриситета  $l^{(3)} \approx 0,8288159133 \dots$ . Фазовый портрет  $64\pi$ -периодической траектории при  $l=l^{(6'')}$  приведен на фиг. 4, б.

Отметим, что при изменении эксцентриситета орбиты в интервале значений  $l^{(4')} < l < l^{(5'')}$  фазовая траектория неустойчивых « $16\pi$ -колебаний», сохраняя топологию; существенно меняет форму. Расстояния между соседними участками фазовой траектории увеличиваются, что приводит после серии бифуркаций удвоения периода к хаотическому движению, менее упорядоченному, чем в двух предыдущих случаях. Это позволяет предположить, что универсальные последовательности бифуркаций удвоения, возникающие на ветвях очень высокой кратности периода вслед за зоной неустойчивости, приводят к хаотическим колебаниям, траектория которых достаточно плотно заполняет целые области фазовой плоскости.

В заключение отметим следующее: установлено, что для фиксированных значений динамических характеристик спутника существует по крайней мере несколько режимов хаотического движения, переход к которым осуществляется из неустойчивого состояния равновесия через универсальную по Фейгенбауму последовательность бифуркаций удвоения периода при увеличении параметра эксцентриситета орбиты; различные режимы хаотических колебаний могут существенно отличаться степенью упорядоченности. Упорядоченность движения падает с увеличением кратности периода ветви, порождающей универсальную последовательность удвоений после двух- (много-)кратной смены устойчивости.

Авторы благодарят В. В. Белецкого и В. Ф. Журавлева за обсуждение полученных результатов и за полезные советы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Feigenbaum M. J. Universal behaviour in nonlinear systems / Los Alamos Sci. 1980. V. 1. № 1. P. 4–27.
2. Helleman R. H. G. Feigenbaum sequences in conservative and dissipative systems // Chaos and Order in Nature: Intern. Symp. of Synergetics. Boveria. 1981. Berlin: Springer, 1981. P. 232–248.
3. Лихтенберг А., Либман М. Регуляция и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
4. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 423 с.
5. Вул Е. Б., Синай Я. Г., Ханин К. М. Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // Успехи мат. наук. 1984. Т. 39. № 3. С. 3–37.
6. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику/От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.
7. Галонов-Грезов А. В., Рабинович М. И. Нелинейная физика/Стохастичность и структуры // Физика XX века: Развитие и перспективы. М.: Наука, 1984. С. 219–280.



8. Гуляев В. И., Зубрицкая А. Л., Кошкин В. Л. Универсальная последовательность бифуркаций удвоения периода колебаний спутника на эллиптической орбите // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 3. С. 3-8.
9. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
10. Устойчивость периодических процессов в нелинейных химических системах/Гуляев В. И., Баженов В. А., Гоцуляк Е. А. и др. Львов: Вища шк., 1983. 288 с.
11. Гуляев В. И., Зубрицкая А. Л., Кошкин В. Л. Последовательность бифуркаций удвоения периода решений плоской ограниченной задачи трех тел // Докл. АН УССР. Сер. А. 1989. № 3. С. 35-39.
12. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
13. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983. 300 с.
14. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.
15. Everhart E. An Implicit single sequence Methods for integrating orbits // Celest. Mech. 1974. V. 10. P. 35-55.

Киев

Поступила в редакцию  
23.XI.1989