

УДК 531.36

© 1991 г.

В. Г. ВЕРБИЦКИЙ, Л. Г. ЛОБАС

БИФУРКАЦИИ И УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ПНЕВМОКОЛЕСНЫХ МАШИН В ПОСТОЯННЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЯХ

В [1] изучены бифуркации и обнаружены катастрофы складки и сборки в многообразиях стационарных состояний при плоскопараллельном движении машин с постоянной скоростью. В данной работе исследована топологическая структура фазового пространства указанной механической системы при наличии внешних силовых воздействий: постоянных боковых сил и моментов.

1. Постановка задачи. Введем обозначения: $Oxyz$ — инерциальная система координат; $Cx_0y_0z_0$ — подвижная система, ось Cx_0 которой направлена вдоль продольной оси BA машины, ось Cz_0 вертикальная; i_0, j_0, k_0 — орты этих осей; C, m, I — центр масс, масса и момент инерции машины относительно оси Cz_0 ; θ — угол поворота передних колес относительно корпуса; φ — курсовой угол; x, y — абсцисса и ордината центра масс; $v = x' \cos \varphi + y' \sin \varphi$, $u = -x' \sin \varphi + y' \cos \varphi$; $Y_1(\delta_1), Y_2(\delta_2)$, δ_1, δ_2 — боковые реакции и углы увода [2]; $\omega = \varphi'$; a, b — расстояния точки C до середин A, B передней и задней осей соответственно; $Q = j_0 Q$ — боковая сила, приложенная в точке C ; $M = k_0 M$ — момент сил. Переменные u, ω удовлетворяют системе

$$m(u' + v\omega) = Y_1 \cos \theta + Y_2 + Q, I\omega' = Y_1 a \cos \theta - Y_2 b + M \quad (1.1)$$

Функции $Y_i(\delta_i)$, имеющие эмпирическое происхождение, являются обычно монотонными, нечетными, причем $Y_i'(0) = k_i > 0$; их предельные значения ограничены условиями сцепления беговой поверхности колес с поверхностью полотна дороги, так что кривые $Y_i = Y_i(\delta_i)$ имеют горизонтальные асимптоты $Y_i = \pm \varphi_i G_i$, где φ_1, φ_2 — коэффициенты сцепления колес передней и задней осей соответственно, $G_1 = mgb l^{-1}$, $G_2 = mgal^{-1}$, $l = a + b$. Углы увода определяются выражениями [3] $\delta_1 = \theta - (u + a\omega)v^{-1}$, $\delta_2 = (-u + b\omega)v^{-1}$, откуда

$$\omega = vl^{-1}(\theta + \delta_2 - \delta_1) \quad (1.2)$$

Стационарными движениями машины на плоскости xu являются прямолинейное ($\omega = 0$) и круговое ($\omega = \omega_* \neq 0$), где ω_* , u_* — решение системы уравнений

$$mv\omega = Y_1 \cos \theta + Y_2 + Q, Y_1 a \cos \theta - Y_2 b + M = 0 \quad (1.3)$$

Управляющих параметров четыре: v, θ, Q, M . Ограничимся рассмотрением значений θ , для которых $\cos \theta \approx 1$, $\sin \theta \approx \theta$. Обозначив

$$Y_i^* = Y_i G_i^{-1}, \kappa_i = k_i G_i^{-1}, Q^* = Q(mg)^{-1}, M^* = Ml(mgab)^{-1}$$

и используя (1.2), запишем систему (1.3) в виде

$$Y_1^* = v^2(gl)^{-1}(\theta + \delta_2 - \delta_1) - M^* a l^{-1} - Q^*, Y_1^* = Y_2^* - M^* \quad (1.4)$$

Последнее уравнение задает функцию $Y_1^*(\delta_2 - \delta_1)$, каждому значению Y_1^{*0} которой ставится в соответствие аргумент $\delta_2^0 - \delta_1^0$, причем

$$\delta_1^0: Y_1^{*0} = Y_1^*(\delta_1^0); \delta_2^0: Y_2^*(\delta_2^0) - M^* = Y_1^{*0} \quad (1.5)$$

По алгоритму (1.5) на основании кривых $Y_i^* = Y_i^*(\delta_i)$ и в соответствии со вторым уравнением (1.4) строим кривую

$$Y_1^* = Y_1^*(\delta_2 - \delta_1) \quad (1.6)$$

Поскольку она не зависит от параметра v , то в дальнейшем называется неподвижной. Угловой коэффициент прямой, задаваемой первым уравнением (1.4), на координатной плоскости $\delta_2 - \delta_1$ и Y_1^* всегда положителен и с увеличением скорости движения машины растет от 0 до $+\infty$, т. е. при варьировании v кривая (1.6) остается неподвижной, прямая поворачивается против хода часовой стрелки. Точки пересечения кривой с прямой являются особыми точками системы (1.1). Дивергенция векторного поля фазовых скоростей, задаваемого системой (1.1), отрицательна во всей фазовой плоскости ω и [4]. Поэтому анализ бифуркаций особых точек поля позволяет выяснить их устойчивость или неустойчивость. Потеря устойчивости движения происходит при появлении кратной особой точки системы (1.1) (в результате бифуркаций слияния или рождения особых точек). Величину критической скорости v_+ , при которой точка (ω_*, u_*) является кратной особой точкой, определим на основе [5].

При наличии в (1.1) аддитивных постоянных Q и M уравнения возмущенного движения остаются теми же, что и для $Q=0, M=0$. Следовательно, сохраняется прежняя [4, 5] геометрическая интерпретация условий устойчивости: для устойчивости необходимо, а в случае монотонных зависимостей $Y_i(\delta_i)$ и достаточно, чтобы угловой коэффициент неподвижной кривой в точке, соответствующей стационарному режиму, превосходил угловой коэффициент подвижной прямой. Форма неподвижной кривой и расположение подвижной прямой при $Q \neq 0, M \neq 0$ могут существенно отличаться от таковых при $Q=0, M=0$.

2. Влияние постоянной поперечной силы, приложенной в центре масс. Из (1.3) для определения особых точек получаем систему

$$mv\omega = Y_1(\delta_1) + Y_2(\delta_2) + Q, \quad aY_1(\delta_1) - bY_2(\delta_2) = 0$$

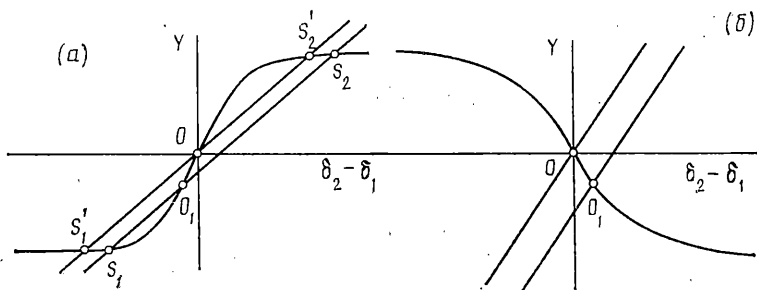
которую на основании (1.4), (1.6) запишем так

$$Y = v^2(gl)^{-1}(\theta + \delta_2 - \delta_1) - Q^*, \quad Y = Y(\delta_2 - \delta_1)$$

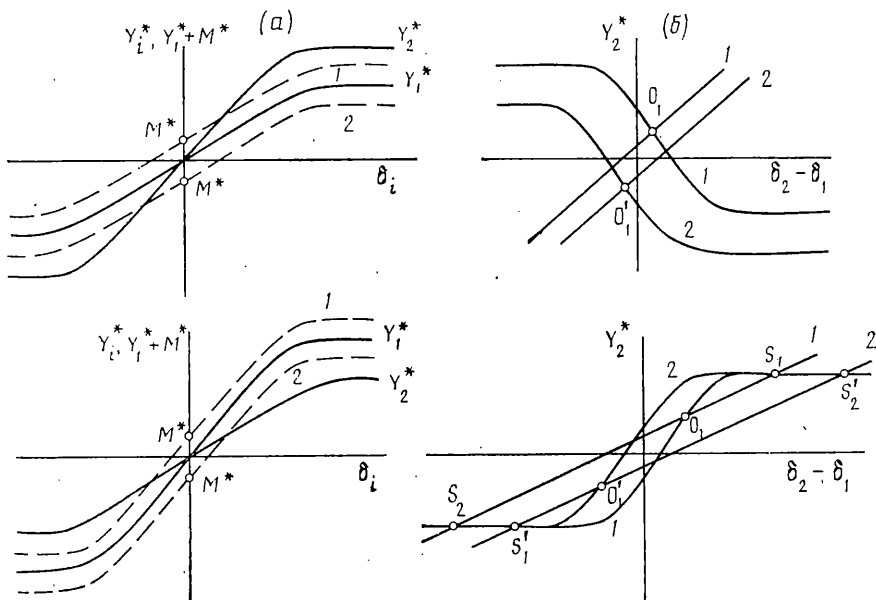
Вид неподвижной кривой и расположение подвижной прямой в различных случаях указаны на фиг. 1.

1°. Пусть $\kappa_1 > \kappa_2$ (машина с избыточной поворачиваемостью [2]). Прямая на фиг. 1, а, не проходящая через начало координат, может соответствовать нескольким случаям, в частности $Q=0, \theta < 0$. При заданном θ значение v_+ находится приравниванием величины $v^2(gl)^{-1}$ угловому коэффициенту касательной к неподвижной кривой. Каждому θ соответствует свое v_+ . Максимальное значение v_+ получается при $\theta=0$ (поскольку при этом $\delta_2 - \delta_1 = 0$, то машина движется прямолинейно), с увеличением $|\theta|$ (круговое движение машины) значение v_+ уменьшается. При $v < v_+$ имеем три особые точки: O_1 — устойчивый узел, S_1, S_2 — седла. С ростом v при $\theta \neq 0$ точки S_1 и O_1 сближаются и при $v = v_+$ сливаются, остается лишь точка S_2 ; если $\theta=0$, то при $v = v_+$ все три точки сливаются в начале координат.

Проинтерпретируем указанную прямую как соответствующую случаю $Q > 0, \theta = 0$. Устойчивым стационарным движением машины может быть лишь круговое, оно отвечает точке O_1 . При изменении θ в любую сторону две особые точки (S_1 и O_1 при $\theta < 0$, O_1 и S_2 при $\theta > 0$) сливаются и исчезают, так что для больших значений $|\theta|$ есть лишь одно стационарное состояние машины (неустойчивое). Все это имеет место при достаточно малых значениях $|Q|$ и $v = \text{const} < (v_+)_{\text{max}}$. Для каждой скорости машины $v < (v_+)_{\text{max}}$ можно указать такое значение $Q = Q_*$, что при повороте колес



Фиг. 1

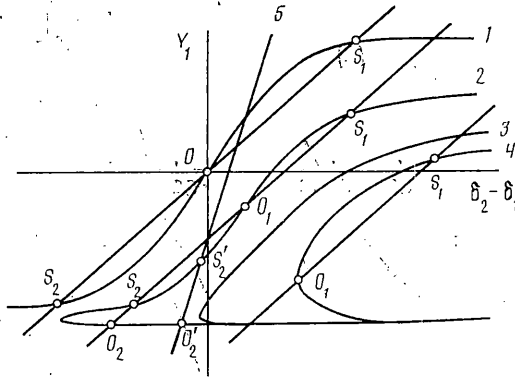


Фиг. 2

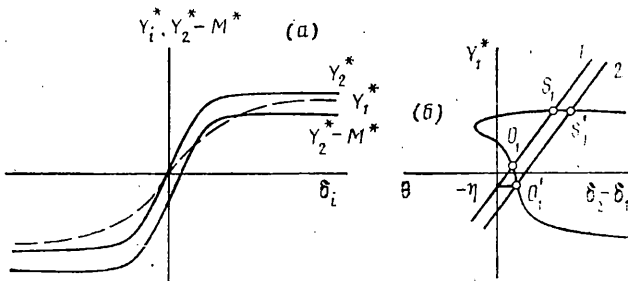
в одну из сторон (вправо при $Q_* > 0$ и влево при $Q_* < 0$) возможно лишь одно стационарное состояние (неустойчивое), тогда как при повороте колес в противоположную сторону возможны следующие последовательно сменяющиеся ситуации: 1) одна неустойчивая особая точка, 2) бифуркация рождения кратной особой точки, 3) три особых точки, среди которых одна устойчивая, 4) бифуркация слияния устойчивой и неустойчивой точек, 5) одна неустойчивая особая точка.

2°. Пусть $\kappa_1 < \kappa_2$ (машина с недостаточной поворачиваемостью [2]). При всех θ имеется (фиг. 1, б) одна особая точка (устойчивая), которая при $Q=0, \theta=0$ совпадает с началом координат. Если хотя бы одна из величин Q или θ отлична от нуля, машина описывает на плоскости дороги, вообще говоря, круговую траекторию. С ростом скорости происходит деформация узел — фокус без потери устойчивости.

Поскольку между случаями $Q=0, \theta \neq 0$ и $Q \neq 0, \theta$ — любое существует указанная выше аналогия, то поворотом передних колес в надлежащую сторону на подходящий угол можно парировать влияние боковой силы и получить желательный режим движения. Так, для устранения бокового увода колес при действии на машину постоянной боковой силы Q передние колеса должны быть повернуты на угол $\theta = Ql(mv^2)^{-1}$, машина при этом движется по окружности радиуса $R = mv^2 Q^{-1}$. При $v < (v_+)_{\max}$ значе-



Фиг. 3



Фиг. 4

ние угла θ , которое парирует влияние силы Q без нарушения прямолинейности движения, есть $\theta_0 = -(\delta_2 - \delta_1)_0$, где $(\delta_2 - \delta_1)_0$ — решение уравнения $Y(\delta_2 - \delta_1) = -Q^*$. При $v > (v_+)_{\max}$ надлежащим выбором угла θ можно получить стационарный режим машины, соответствующий прямолинейному движению, однако он будет неустойчивым.

3. Влияние постоянного момента сил относительно вертикальной оси.

Из (1.3) следует, что стационарные режимы движения машины удовлетворяют системе

$$vg^{-1}\omega = (Y_1^*b + Y_2^*a)l^{-1}, Y_1^* - Y_2^* + M^* = 0 \quad (3.1)$$

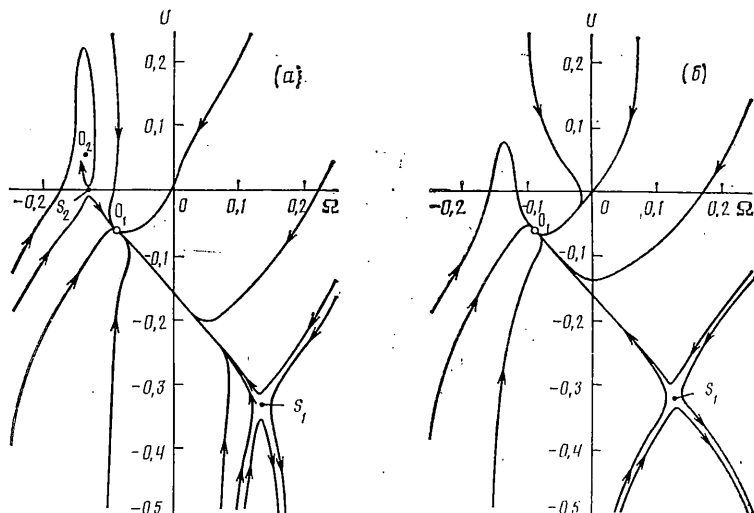
Уравнения (3.1) можно представить в одной из форм

$$Y_1^* = v^2(gl)^{-1}(\theta + \delta_2 - \delta_1) - M^*al^{-1}, Y_1^* = Y_2^* - M^* \quad (3.2)$$

$$Y_2^* = v^2(gl)^{-1}(\theta + \delta_2 - \delta_1) + M^*bl^{-1}, Y_2^* = Y_1^* + M^* \quad (3.3)$$

Каждое из вторых уравнений систем (3.2) и (3.3) определяет кривую $Y_1^* = Y_1^*(\delta_2 - \delta_1)$ и $Y_2^* = Y_2^*(\delta_2 - \delta_1)$ соответственно. Момент M , во-первых, сдвигает подвижную прямую вверх или вниз и, во-вторых, меняет неподвижную кривую (в отличие от силы Q).

Если момент M не очень большой ($M^* \ll \varphi_1$, $M^* \ll \varphi_2$), а кривые $Y_i^* = Y_i^*(\delta_i)$ имеют общие наклонные участки линейности, то на неподвижной кривой также есть наклонный участок линейности (фиг. 2). В этом случае расположение и характер особых точек при $M \neq 0$ такие же, как и при $M = 0$. При больших значениях M неподвижная кривая может не иметь линейных участков. На фиг. 2 цифрами 1 и 2 обозначены линии, для которых $M^* > 0$ и $M^* < 0$ соответственно; фиг. 2, а, б относятся к случаю $\kappa_1 < \kappa_2$, фиг. 2, в, г — к случаю $\kappa_1 > \kappa_2$. Штриховые линии являются графиками величин $Y_1^* + M^*$ как функций δ_1 . Особые точки O_1 (при $M^* > 0$) и O_1' (при



Фиг. 5

$M^* < 0$) на фиг. 2, б расположены симметрично относительно начала координат. Они устойчивы при Vv . Точки O_1 и O_1' , S_1 и S_1' , S_2 и S_2' на фиг. 2, г попарно симметричны относительно начала координат, причем S_1 , S_2 , S_1' , S_2' — седла; особые точки O_1 и O_1' асимптотически устойчивы при $v < v_+$, где v_+ определяется по угловому коэффициенту $v_+^2 (gl)^{-1}$ подвижной прямой, касающейся кривой $Y_2^* = Y_2^*(\delta_2 - \delta_1)$ на фиг. 2, г. Критическая скорость кругового движения, получающегося при $M \neq 0$, $\theta = 0$, меньше критической скорости прямолинейного движения, получающегося при $M = 0$, $\theta = 0$. Если $M \neq 0$, $\theta \neq 0$, то можно выбрать угол θ таким, что машина движется прямолинейно, а ее критическая скорость равна v_+ при $M = 0$, т. е. поворотом передних колес на соответствующий угол можно парировать момент M без изменения величины критической скорости.

Рассмотрим случай произвольных (в том числе достаточно больших) значений M , воспользовавшись уравнениями стационарных состояний в форме (3.2). На совмещенных координатных плоскостях $\delta_1 Y_1^*$ и $\delta_2 Y_2^*$ построим кривые $Y_i^* = f_i(\delta_i)$. Если $\varphi_2 - M^* \leq -\varphi_1$, то кривая $Y_1^* = f_1(\delta_1)$ лежит выше кривой $Y_2^* = f_2(\delta_2) - M^*$. Поэтому при $M^* \geq \varphi_1 + \varphi_2$ геометрическое место точек, удовлетворяющих второму уравнению системы (3.2), есть пустое множество. Таким образом, стационарные состояния движения машины существуют лишь при значениях $M < m g a b l^{-1} (\varphi_1 + \varphi_2)$.

Пусть $M > 0$, $\kappa_1 > \kappa_2$, $\varphi_1 = \varphi_2$, $Y_1^*(\delta_1) - Y_2^*(\delta_2) > 0$ при одинаковых значениях $\delta_i > 0$; вид соответствующих кривых $Y_i^* = Y_i^*(\delta_i)$ указан в [4]. При $M = 0$ кривая (1.6) симметрична относительно начала координат (кривая 1 на фиг. 3). При $M \neq 0$ у нее может появиться «клюв», она становится асимметрична (кривая 2 на фиг. 3). С ростом M клюв уменьшается, а затем исчезает (кривая 3). При дальнейшем увеличении M кривая (1.6) переходит в правую полуплоскость (кривая 4).

Если нелинейности в обеих кривых $Y_i^* = Y_i^*(\delta_i)$ проявляются, начиная с точек, абсолютные значения ординат которых не меньше некоторого значения Y_0 , то при действии внешнего момента $M^* \geq Y_0$ кривая (1.6) не имеет линейных участков. При $M^* \ll Y_0$ он существует, а система (3.2) для $v < v_+$ (v_+ — критическая скорость прямолинейного движения при $M = 0$) имеет четыре стационарных режима S_1 , O_1 , S_2 , O_2 , основным из которых есть O_1 . Точки O_1 и O_2 устойчивы, точки S_1 и S_2 — седла. При $v > v_+$ (прямая 5 на фиг. 3) стационарные режимы S_1 и O_1 исчезают, остаются два

круговых режима, отвечающих точкам S_2' (седло) и O_2' (устойчивая точка). При малых значениях v есть только верхняя пара точек (S_1 и O_1). Таким образом, с ростом v происходят две бифуркации: рождения особых точек S_2 и O_2 (которые остаются при последующих значениях v), слияния (с последующим исчезновением) особых точек S_1 и O_1 . Количество особых точек с ростом v такое: две (S_1, O_1), четыре (S_1, O_1, S_2, O_2), две (S_2, O_2). Если момент M превысил определенное значение, так что кривая (1.6) перешла в правую полуплоскость, то имеются две особые точки: S_1 — седло, O_1 — устойчивая точка (кривая 4 на фиг. 3), а с ростом скорости возможна лишь одна бифуркация — слияния этих точек.

В случае $\kappa_1 < \kappa_2$ (фиг. 4, а) для каждого значения скорости v имеются два стационарных режима: O_1 — устойчивый круговой, S_1 — неустойчивый круговой (фиг. 4, б). Для прямых 1 и 2 $\theta=0$ и $\theta=\theta_0 < 0$ соответственно. Взяв $\theta_0 = -(\delta_2 - \delta_1)_0$, где $(\delta_2 - \delta_1)_0$ — решение уравнения $Y_1^*(\delta_2 - \delta_1) = -\eta$, получим устойчивый прямолинейный ($\omega=0$) режим O_1' и неустойчивый круговой режим S_1' . При достаточно больших значениях угла $\theta > 0$ стационарных режимов нет, при всех $\theta < 0$ имеются два стационарных режима. В случае достаточно больших значений момента M кривая (1.6) переходит в правую полуплоскость. Если же $M^* \geq \varphi_1 + \varphi_2$, стационарных режимов нет.

На фиг. 5 показан характерный фазовый портрет, построенный для следующих значений параметров машины: $m=2717$ кг, $I=4061$ кг·м², $a=1,14$ м, $b=1,6$ м, $k_1=1177200$ Н/рад, $k_2=103496$ Н/рад, $\varphi_1=\varphi_2=0,8$, $v=8$ м/с, при этом $v_+=16,9154$ м/с. Фазовые кривые отнесены к безразмерным координатам $\Omega=\omega av^{-1}$, $U=uv^{-1}$. Для фиг. 5, а $M^*=0,03$; особыми точками являются устойчивый фокус O_2 с координатами $-0,134704$ и $0,0556733$, седло S_2 с координатами $-0,129315$ и $0,000854876$, узел O_1 с координатами $-0,0928212$ и $-0,0583442$, седло S_1 с координатами $0,1345534$ и $-0,3326462$. На фиг. 3 эти особые точки принадлежат кривой 2. Правая часть сепаратрисы, выходящей из седла S_2 , входит в узел O_1 , левая — обвивается вокруг фокуса O_2 . Нижняя часть сепаратрисы, входящей в седло S_2 , попадает непосредственно в него из третьего квадранта; верхняя также попадает в третьем квадранте, но попадает в седло S_2 , огибая область притяжения фокуса O_2 . Для фиг. 5, б $M^*=0,06$; особыми точками являются устойчивый узел O_1 с координатами $-0,089512$ и $-0,061863$, а также седло S_1 с координатами $0,131338$ и $-0,318117$. На фиг. 3 эти особые точки принадлежат кривой 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вербицкий В. Г., Лобас Л. Г. Бифуркации и устойчивость стационарных движений колесного экипажа // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 1. С. 57–63.
2. Рокар И. Неустойчивость в механике. Автомобили. Самолеты. Висячие мосты. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 287 с.
3. Расейка Н. В. Tyre factors and vehicle handling. [Paper]. Delft University of Technology, 1978, No. 108. 31 p.
4. Вербицкий В. Г., Лобас Л. Г. Области притяжения в задаче о плоском движении систем с качением // ПММ. 1984. Т. 48, вып. 3. С. 498–503.
5. Вербицкий В. Г., Лобас Л. Г. Метод определения особых точек и их характера в задаче о плоском движении колесного экипажа // ПММ. 1981. Т. 45, вып. 5. С. 944–948.

Киев

Поступила в редакцию
12.IX.1988