

УДК 534.1

© 1991 г.

Е. П. КУБЫШКИН

УСТОЙЧИВОСТЬ И АВТОКОЛЕБАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СООСНЫХ РОТОРНЫХ СИСТЕМ

Соосные роторные системы (соосные валы) достаточно распространены в машиностроении и отличаются разнообразием конструкций (привода винтов вертолетов, многоступенчатые газотурбинные двигатели и т. п.). В связи с этим, вопросы изучения устойчивости и автоколебаний таких систем представляет весьма актуальную задачу. Некоторые типы соосных роторов рассматривались в [1-4]. Так, например, в [4] рассмотрена система двух соосных роторов с сосредоточенными массами, связанных между собой через амортизированный корпус. Исследована устойчивость этой системы и автоколебания.

В публикуемой работе рассматривается система из двух распределенных соосных роторов (один внутри другого), которые связаны между собой через подшипниковые узлы. Изучается устойчивость и автоколебательные режимы такой системы. Показана возможность взаимной стабилизации роторов, существования периодических и двухчастотных автоколебательных режимов, для которых получены асимптотические формулы. Исследована устойчивость автоколебательных режимов, отмечена существенная зависимость областей устойчивости в пространстве параметров системы и характера автоколебательных режимов от упругих свойств подшипниковых узлов.

1. Рассматривается механическая система, состоящая из двух соосных однородных идеально уравновешенных гибких роторов постоянного сечения, концы каждого из которых опираются на одинаковые подшипники (фиг. 1). Связь между роторами осуществляется через подшипниковые узлы, жесткость которых считаем конечной. Материал роторов предполагаем вязкоупругим (модель Фойгта). Предполагаем также, что в системе действует внешнее нелинейное вязкое трение. В рамках гипотезы плоских сечений [5] уравнения поперечных колебаний $u_j(z, t) = x_j(z, t) + iy_j(z, t)$ ($i = \sqrt{-1}$, $j = 1, 2$) соответственно внутреннего и внешнего роторов, а также соответствующие краевые условия будут иметь вид

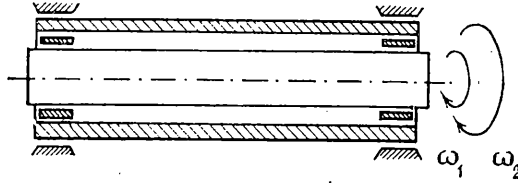
$$m_j \partial^2 u_j / \partial t^2 + a_j (|\partial u_j / \partial t|^2) \partial u_j / \partial t + \partial^2 M_j / \partial z^2 = 0 \quad (1.1)$$

$$M_j = E_j J_j [\partial^2 u_j / \partial z^2 + \nu_j (\partial^3 u_j / \partial z^2 \partial t - i \omega_j \partial^2 u_j / \partial z^2)] \\ \partial u_j / \partial z|_{z=0} = \partial u_j / \partial z|_{z=l} = 0 \quad (j=1, 2) \quad (1.2)$$

$$[\partial M_1 / \partial z + c_1 (u_1 - u_2)]|_{z=0} = 0, \quad [\partial M_2 / \partial z - c_1 (u_1 - u_2) + c_2 u_2]|_{z=0} = 0$$

$$[\partial M_1 / \partial z - c_1 (u_1 - u_2)]|_{z=l} = 0, \quad [\partial M_2 / \partial z + c_1 (u_1 - u_2) - c_2 u_2]|_{z=l} = 0$$

В (1.1) - (1.2) координата z отсчитывается вдоль оси ротора, l - длина роторов. Далее, соответственно $x_j(z, t)$, $y_j(z, t)$ смещения средних линий роторов в двух взаимно перпендикулярных плоскостях; $E_j J_j$ - изгибные жесткости сечений роторов; m_j - погонные массы роторов; ν_j - коэффициенты внутреннего трения материала роторов; ω_j - угловые скорости вращения роторов; функции $a_j(\xi) = a_{j0} + a_{j1}\xi + \dots$ ($a_{jk} > 0$) характеризуют внешнее вязкое трение, коэффициенты c_1 и c_2 характеризуют линейно-упругие свойства соответственно внутренних и внешних подшипниковых узлов.



Фиг. 1

В дальнейшем изучаются устойчивость нулевого решения краевой задачи (1.1)–(1.2) в зависимости от ω_1, ω_2 , а также характер автоколебательных решений, возникающих при потере устойчивости нулевого решения.

2. Перейдем в (1.1)–(1.2) к безразмерным переменным, положив: $s=z/l, u_j'=u_j/l, t'=t/T, J_j'=J_j/J_0, E_j'=E_j/E_0, \nu_j'=\nu_j/T, \omega_j'=\omega_j/T, m_j'=m_j/m_0, c_j'=c_j T^2/l, a_j'(\xi)=a_{j0}'+a_{j1}'\xi+\dots, a_{jh}'=a_{jh}{}^{2h}/(m_0 T^{2h-1}), T=l^2[m_0/(E_0 J_0)]^{1/2}$, где J_0, E_0, m_0 – характерные размерные величины. В результате, опустив штрихи в новых безразмерных переменных и введя обозначения $b_j=E_j J_j, a_j(\xi)=a_{j0}+a_{j*}(\xi)$, будем иметь следующую краевую задачу

$$m_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + \left(a_{j0} + a_{j*} \left(\left| \frac{\partial u_j}{\partial t} \right|^2 \right) \right) \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial^2 M_j}{\partial s^2} = 0 \quad (2.1)$$

$$M_j = b_j \left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial s^2} + \nu_j \left(\frac{\partial^3 u_j}{\partial s^2 \partial t} - i \omega_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial s^2} \right) \right]$$

$$\partial u_j / \partial s|_{s=0} = \partial u_j / \partial s|_{s=1} = 0 \quad (j=1, 2) \quad (2.2)$$

$$[\partial M_1 / \partial s + c_1(u_1 - u_2)]_{s=0} = 0, \quad [\partial M_2 / \partial s - c_1(u_1 - u_2) + c_2 u_2]_{s=0} = 0$$

$$[\partial M_1 / \partial s - c_1(u_1 - u_2)]_{s=1} = 0, \quad [\partial M_2 / \partial s + c_1(u_1 - u_2) - c_2 u_2]_{s=1} = 0$$

Естественно считать, что приведенные коэффициенты внутреннего трения $\nu_1, \nu_2 \ll 1, \nu_1 \sim \nu_2$. В связи с этим, введем малый параметр $\varepsilon > 0$, положив $\nu_1 = n_1 \varepsilon, \nu_2 = n_2 \varepsilon$, где n_1, n_2 некоторые величины (в частности, в качестве ε может быть взят один из ν_j). Будем также предполагать, что линейные коэффициенты внешнего трения a_{j0} пропорциональны ε . В связи с этим положим $a_{j0} = \check{a}_j \varepsilon$. Запишем краевую задачу (2.1)–(2.2) в более компактном виде. Введем для этого в рассмотрение вектор-функцию $\mathbf{u}(s, t) = (u_1(s, t), u_2(s, t))$, диагональные матрицы $M = \text{diag}(m_1, m_2), B = -\text{diag}(b_1, b_2), B* = \text{diag}(b_1 n_1, b_2 n_2), \Omega = \text{diag}(\omega_1, \omega_2), A = \text{diag}(a_1, a_2), G(\xi) = \text{diag}(a_{1*}(\xi_1), a_{2*}(\xi_2))$ ($\xi = (\xi_1, \xi_2)$) и матрицу

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix}$$

В этих обозначениях краевая задача (2.1)–(2.2) запишется в виде

$$M \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(A \mathbf{u} + B* \frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial s^4} \right) + (B - \varepsilon i B* \Omega) \frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial s^4} + G \left(\left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_*^2 \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$$

$$\left(\left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_*^2 = \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|^2, \left| \frac{\partial u_2}{\partial t} \right|^2 \right) \right) \quad (2.3)$$

$$\partial \mathbf{u} / \partial s|_{s=0} = \partial \mathbf{u} / \partial s|_{s=1} = 0 \quad (2.4)$$

$$\left[B \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial s^3} + \varepsilon B* \left(\frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial s^3 \partial t} - i \Omega \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial s^3} \right) + C \mathbf{u} \right] \Big|_{s=0} = 0$$

$$\left[B \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial s^3} + \varepsilon B* \left(\frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial s^3 \partial t} - i \Omega \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial s^3} \right) - C \mathbf{u} \right] \Big|_{s=1} = 0$$

Отметим, что краевая задача (2.3)–(2.4) является сингулярно возмущенной. Сингулярность обусловлена сменой типа краевой задачи (с параболической на гиперболическую) при нулевом значении ε . Отметим также, что решение (2.3)–(2.4) определяется с точностью до умножения на $\exp(i\alpha)$.

Изучим устойчивость нулевого решения краевой задачи (2.3)–(2.4). С этой целью рассмотрим линейное уравнение

$$M \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(A\mathbf{u} + B_* \frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial s^4} \right) + (B - \varepsilon i B_* \Omega) \frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial s^4} = 0 \quad (2.5)$$

с краевыми условиями (2.4). При $\varepsilon=0$ краевая задача (2.4)–(2.5) переходит в краевую задачу

$$M \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 + B \partial^4 \mathbf{u} / \partial s^4 = 0 \quad (2.6)$$

$$\partial \mathbf{u} / \partial s |_{s=0} = \partial \mathbf{u} / \partial s |_{s=1} = 0 \quad (2.7)$$

$$[B \partial^3 \mathbf{u} / \partial s^3 + C\mathbf{u}]_{s=0} = [B \partial^3 \mathbf{u} / \partial s^3 - C\mathbf{u}]_{s=1} = 0$$

Введем в рассмотрение функциональное гильбертово пространство $L_2(0, 1)$ комплекснозначных функций (скалярное произведение $(*, *)_{L_2}$ и норма $\|*\|_{L_2}$ введены стандартным образом) и пространство \mathbf{H} комплекснозначных вектор-функций $\mathbf{v}(s) = (v_1(s), v_2(s))$, $v_j(s) \in L_2(0, 1)$.

Для $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}$ определим скалярное произведение: $(\mathbf{v}, \mathbf{w})_{\mathbf{H}} = (v_1, w_1)_{L_2} + (v_2, w_2)_{L_2}$. Введем в рассмотрение оператор $\mathbf{B}\mathbf{v} \equiv \mathbf{B}\mathbf{v}^{\text{IV}}$ с областью определения $D(\mathbf{B}) = \{\mathbf{v} = (v_1, v_2) \mid v_j \in \tilde{W}_2^4(0, 1), \mathbf{v}'(0) = \mathbf{v}'(1) = 0, \mathbf{B}\mathbf{v}''(0) = -C\mathbf{v}(0), \mathbf{B}\mathbf{v}''(1) = C\mathbf{v}(1)\}$ (штрихи обозначают производную).

Оператор \mathbf{B} является замкнутым, самосопряженным и положительно определенным. Обозначим через σ_n^2 ($0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots$) и $\mathbf{v}_n(s) = (v_{n1}(s), v_{n2}(s))$ соответственно точки спектра и собственные функции оператора \mathbf{B} (δ_{nm} – символ Кронекера):

$$\mathbf{B}\mathbf{v}_n = \sigma_n^2 M\mathbf{v}_n, \quad (M\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_m)_{\mathbf{H}} = \delta_{nm} \quad (2.8)$$

Отсюда следует, что функции $\mathbf{u}_n(s, t) = \mathbf{v}_n(s) \exp(i\sigma_n t)$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) $\mathbf{v}_{-n}(s) = \mathbf{v}_n(s)$, $\sigma_{-n} = -\sigma_n$ образуют полную систему базисных решений краевой задачи (2.6)–(2.7).

Построим теперь систему базисных решений краевой задачи (2.4)–(2.5). Будем искать $\mathbf{u}_n(s, t; \varepsilon)$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) в виде разложения

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n(s, t; \varepsilon) &= (\mathbf{v}_n(s) + \varepsilon \mathbf{v}_n^1(s) + \dots) \exp(\lambda_n(\varepsilon) t) \\ \lambda_n(\varepsilon) &= i\sigma_n + \varepsilon \sigma_{n1} + \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подставим теперь разложение (2.9) в краевую задачу (2.4)–(2.5) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . В результате получим для определения $\mathbf{v}_n^j(s)$ и σ_{nj} рекуррентную последовательность краевых задач

$$B d^4 \mathbf{v}_n^j / ds^4 - \sigma_n^2 M \mathbf{v}_n^j + i 2 \sigma_n M \mathbf{v}_n(s) \sigma_{nj} + \mathbf{F}_n^j(s) = 0 \quad (2.10)$$

$$d \mathbf{v}_n^j / ds |_{s=0} = d \mathbf{v}_n^j / ds |_{s=1} = 0 \quad (2.11)$$

$$[B d^3 \mathbf{v}_n^j / ds^3 + C \mathbf{v}_n^j] |_{s=0} = \mathbf{f}_n^{j0}, \quad [B d^3 \mathbf{v}_n^j / ds^3 - C \mathbf{v}_n^j] |_{s=1} = \mathbf{f}_n^{j1}$$

($j = \pm 1, \pm 2, \dots$), где $\mathbf{F}_n^j(s)$, \mathbf{f}_n^{j0} , \mathbf{f}_n^{j1} соответственно известные вектор-функции, определяемые $\mathbf{v}_n^q(s)$, σ_{nq} ($q < j$) и коэффициентами краевой задачи (2.4)–(2.5).

Для разрешимости краевой задачи (2.10)–(2.11) выполним замену $\mathbf{v}_n^j(s) = \mathbf{w}_n^j(s) + \mathbf{P}_n^j(s)$, где $\mathbf{P}_n^j(s) = \mathbf{P}_n^{j0} s^3 + \mathbf{P}_n^{j1} s^2 + \mathbf{P}_n^{j2} s + \mathbf{P}_n^{j3}$ ($\mathbf{P}_n^j(s) = (\mathbf{P}_{n1}^j(s), \mathbf{P}_{n2}^j(s))$) – векторный многочлен, коэффициенты которого выберем таким образом, чтобы он удовлетворял краевым условиям (2.11).

С необходимостью получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n^{j0} &= 2C^{-1}(\mathbf{f}_n^{j0} - \mathbf{f}_n^{j1}), \quad \mathbf{P}_n^{j1} = 3C^{-1}(\mathbf{f}_n^{j1} - \mathbf{f}_n^{j0}) \\ \mathbf{P}_n^{j2} &= 0, \quad \mathbf{P}_n^{j3} = C^{-1}[42BC^{-1}(\mathbf{f}_n^{j1} - \mathbf{f}_n^{j0}) + \mathbf{f}_n^{j0}] \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_n^1(s) &= i\sigma_n(A + \sigma_n^2 M_* - \sigma_n M_* \Omega) \mathbf{v}_n(s) \\ \mathbf{f}_n^{10} &= i(\sigma_n I - \Omega) C_* \mathbf{v}_n(0), \quad \mathbf{f}_n^{11} = -i(\sigma_n I - \Omega) C_* \mathbf{v}_n(1) \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $M_* = \text{diag}(m_1 n_1, m_2 n_2)$, I — единичная двумерная матрица

$$C_* = \begin{bmatrix} c_1 n_1 & -c_1 n_1 \\ -c_1 n_2 & (c_1 + c_2) n_2 \end{bmatrix}$$

В связи с этим, многочлен $\mathbf{P}_n^1(s) = i(\sigma_n I - \Omega) \mathbf{Q}_n^1(s)$

$$\mathbf{Q}_n^1(s) = (n_1 q_{n1}^1(s), n_2 q_{n2}^1(s)), \quad q_{-nj}^1(s) \equiv q_{nj}^1(s)$$

В результате замены имеем краевую задачу

$$Bd^4 \mathbf{w}_n^j / ds^4 - \sigma_n^2 M \mathbf{w}_n^j + i2\sigma_n M v_n(s) \sigma_{nj} - \sigma_n^2 M \mathbf{P}_n^j(s) + \mathbf{F}_n^j(s) = 0 \quad (2.14)$$

$$d\mathbf{w}_n^j / ds|_{s=0} = d\mathbf{w}_n^j / ds|_{s=1} = 0 \quad (2.15)$$

$$(Bd^3 \mathbf{w}_n^j / ds^3 + C \mathbf{w}_n^j)|_{s=0} = (Bd^3 \mathbf{w}_n^j / ds^3 - C \mathbf{w}_n^j)|_{s=1} = 0$$

Согласно (2.8), однородная часть краевой задачи (2.14) — (2.15) имеет нетривиальное решение $\mathbf{v}_n(s)$. Отсюда следует, что для разрешимости краевой задачи (2.14) — (2.15) в пространстве \mathbf{H} необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство [6]:

$$(i2\sigma_n M \mathbf{v}_n(s) \sigma_{nj} - \sigma_n^2 M \mathbf{P}_n^j(s) + \mathbf{F}_n^j(s), \mathbf{v}_n(s))_{\mathbf{H}} = 0 \quad (2.16)$$

из которого однозначно определяется величина σ_{nj} . Решение краевой задачи (2.14) — (2.15) определяется неоднозначно. Выбирая решения $\mathbf{w}_n^j(s)$, удовлетворяющим условию $(\mathbf{w}_n^j(s), \mathbf{v}_n(s))_{\mathbf{H}} = 0$ обеспечим, тем самым, сходимость рядов в представлении (2.9) при малых ε . Доказательство этого утверждения опирается на теорему о неявной функции для операторных уравнений [6].

Отсюда и в силу базисности функций $\mathbf{v}_n(s)$ в функциональном пространстве $D(\mathbf{B})$ следует, что функции (2.9) образуют полную систему базисных решений краевой задачи (2.4) — (2.5).

Таким образом, решения краевой задачи (2.4) — (2.5) будут устойчивы при выполнении неравенств

$$\text{Re } \lambda_n(\varepsilon) \leq 0 \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.17)$$

и неустойчивы, если хотя бы одно из неравенств (2.17) будет нарушено. Отметим, что строгие неравенства в (2.17) обеспечивают асимптотическую устойчивость решений (2.4) — (2.5), которые определяются условиями: $\text{Re } \sigma_{n1} < 0$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$). Согласно (2.12), (2.13) и (2.16) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{n1} = \sigma_{n1}(\boldsymbol{\omega}) &= -\{a_1 \sqrt{\|v_{n1}\|_{L_2}^2} + a_2 \sqrt{\|v_{n2}\|_{L_2}^2} + \sigma_n [(\sigma_n - \omega_1) n_1 m_1 (v_{n1} + q_{n1}^1, v_{n1})_{L_2} + \\ &+ (\sigma_n - \omega_2) n_2 m_2 (v_{n2} + q_{n2}^1, v_{n2})_{L_2}]\} / 2, \quad \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Уравнения $\sigma_{n1}(\boldsymbol{\omega}) = 0$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) определяют в плоскости $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$ (при фиксированных других параметрах) прямые линии. Это дает возможность построить область устойчивости решений краевой задачи (2.4) — (2.5) в плоскости $\boldsymbol{\omega}$, которая, как легко видеть, будет симметричной относительно начала координат.

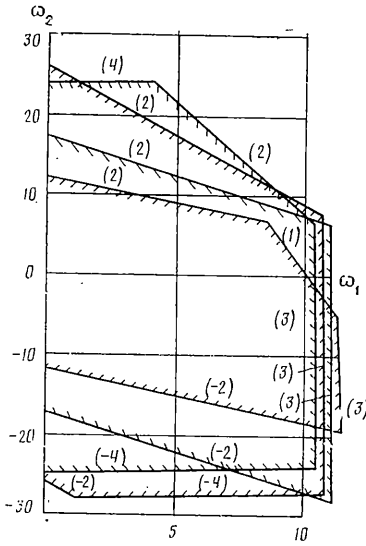
В качестве примера рассмотрим систему соосных роторов, изготовленных из одного материала. Таким образом $v_1 = v_2 = \varepsilon$. Характерное время

n	σ_n	$\ v_{n1}\ _{L_2}^2$	$\ v_{n2}\ _{L_2}^2$	$(v_{n1} + q_{n1}^1, v_{n1})_{L_2}$	$(v_{n2} + q_{n2}^1, v_{n2})_{L_2}$
	$c_1=10$		$c_2=70$		
1	$0,3568 \cdot 10^1$	$0,9195 \cdot 10^2$	$0,1171 \cdot 10^2$	$0,1778 \cdot 10^1$	$0,6270 \cdot 10^2$
2	$0,6432 \cdot 10^1$	$0,4984 \cdot 10^2$	$0,7285 \cdot 10^2$	$0,5425 \cdot 10^1$	$0,8078 \cdot 10^1$
3	$0,1151 \cdot 10^2$	$0,9643 \cdot 10^2$	$0,5197 \cdot 10^1$	$0,7249$	$0,1223 \cdot 10^1$
4	$0,3999 \cdot 10^2$	$0,9976 \cdot 10^2$	$0,3430$	$0,9721$	$0,1866 \cdot 10^2$
	$c_1=40$		$c_2=10$		
1	$0,2253 \cdot 10^1$	$0,6862 \cdot 10^2$	$0,5431 \cdot 10^2$	$0,5535 \cdot 10^2$	$0,2308 \cdot 10^2$
2	$0,1232 \cdot 10^2$	$0,6168 \cdot 10^2$	$0,5581 \cdot 10^2$	$0,3298$	$0,1128$
3	$0,1315 \cdot 10^2$	$0,6672 \cdot 10^2$	$0,4841 \cdot 10^2$	$0,4285$	$0,1198$
4	$0,4155 \cdot 10^2$	$0,9906 \cdot 10^2$	$0,1366 \cdot 10^1$	$0,8909$	$0,8460 \cdot 10^2$

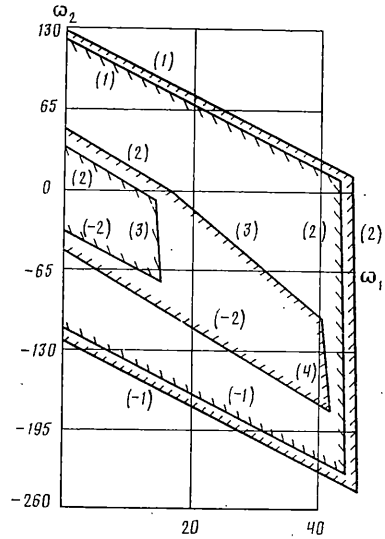
здесь удобнее выбрать $T = l^2 [m_0 / (EJ_1)]^{1/2}$ ($m_0 = \rho \pi l^2 / 4$, ρ — линейная плотность материала). В результате будем иметь $m_1 = d_1^2$, $m_2 = d_3^2 - d_2^2$, $b_1 = 1$, $b_2 = (d_3^4 - d_2^4) / d_1^2$, где d_1 , d_2 , d_3 соответственно безразмерные диаметры внутреннего ротора и внутренний и внешний диаметры внешнего ротора. Выберем следующие параметры системы $d_1 = 0,1$, $d_2 = 0,125$, $d_3 = 0,15$, $a_1 = 0,3 \cdot 10^{-2}$, $a_2 = 0,825 \cdot 10^{-2}$ (a_1 , a_2 — выбраны пропорционально площади поверхности соответствующих роторов). Для реальных подшипниковых узлов, можно считать $c_1, c_2 \sim 1 \div 10^2$. Значения характерных величин, определяющих прямые (2.18) вычислялись на ЭВМ. В таблице 1 приведены эти величины для двух значений c_1 и c_2 и первых четырех номеров n . При этом соответствующие собственные функции вычислялись методом начальных параметров [7].

На фиг. 2, 3 представлена динамика областей устойчивости решений краевой задачи (2.4) — (2.5) при изменении одного из параметров, соответственно для случаев $c_1 = 10$; $c_2 = 70, 20, 10, 8$ и $c_1 = 30, 40, 70, 90$; $c_2 = 10$. Области устойчивости на фиг. 2, 3 заштрихованы вблизи границы и приведены в порядке возрастания площадей. Номер в круглых скобках характеризует значение величины n соответствующей прямой, определяющей элемент границы. Отметим, что, как показали вычисления на ЭВМ и асимптотический анализ при $n \rightarrow \infty$, прямые $\sigma_{n1}(\omega) = 0$ при других значениях n расположены вне областей, представленных на фиг. 2, 3.

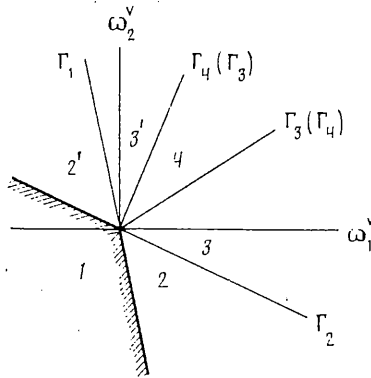
Анализ областей устойчивости, представленных на фиг. 2, 3 позволяет отметить следующее. Во-первых, потеря устойчивости решений краевой задачи (2.4) — (2.5) может происходить либо по одной, либо одновременно по двум собственным формам консервативной краевой задачи (2.6) — (2.7) (базисным решениям (2.9)). Номер формы определяется соотношением ω_1 и ω_2 и равен абсолютной величине n . Во-вторых, номера форм, по которым происходит потеря устойчивости решений (2.4) — (2.5) зависят от жесткости подшипниковых узлов. Так в случае $c_1 = 10$, потеря устойчивости по первой форме наблюдается лишь при $c_2 = 70$, а в случае $c_2 = 10$, лишь при $c_1 = 70, 90$. В-третьих, отметим расширение областей устойчивости одного из роторов при вращении другого в обратном направлении. При этом возможна ситуация ($c_1 = 90, c_2 = 10$), когда вращение одного из роторов с незначительной скоростью может приводить к существенному увеличению области устойчивости другого ротора. Отметим также эффект взаимной стабилизации роторов при вращении в разных направлениях ($c_1 = 40, c_2 = 10$). Расширение областей устойчивости при вращении роторов в разных направлениях отмечалось и для системы соосных роторов, рассмотренных в [4].



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

3. Изучим характер автоколебательных решений краевой задачи (2.3)–(2.4), возникающих при потере устойчивости нулевого решения. Как следует из п. 2, потеря устойчивости нулевого решения краевой задачи (2.3)–(2.4) при изменении ω может происходить, в основном, либо по одной, либо одновременно по двум базисным функциям (2.9). Для анализа автоколебательных решений краевой задачи (2.3)–(2.4) воспользуемся методикой [8]. Рассмотрим сначала случай потери устойчивости по одной (k_1 -й) базисной функции (2.9). Согласно [8], введем в рассмотрение выражение

$$\begin{aligned} U(s, z_1, z_{-1}; \varepsilon) = & z_1(v_{k_1}(s) + \varepsilon v_{k_1}(s)) + z_{-1}(v_{-k_1}(s) + \varepsilon v_{k_1}(s)) + \\ & + z_1|z_1|^2 u_{11}(s) + z_1|z_{-1}|^2 u_{12}(s) + \bar{z}_1 z_{-1}^2 u_{13}(s) + z_{-1}|z_1|^2 u_{-11}(s) + \\ & + z_{-1}|z_{-1}|^2 u_{-12}(s) + \bar{z}_{-1} z_1^2 u_{-13}(s) \end{aligned} \quad (3.1)$$

и комплексную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$z_p \dot{z}_p = [\lambda_p \check{\varepsilon} - d_{pp}(|z_p|^2/2 + |z_{-p}|^2)] z_p \quad (p = -1, 1) \quad (3.2)$$

$$\lambda_p \check{\varepsilon} = i\sigma_{k_p} + \varepsilon \sigma_{k_p 1}(\omega) \quad (k_{-p} = -k_p), \quad |z|^2 = z\bar{z}$$

Функции $u_*(s)$ и коэффициенты d_{pp} определяются следующим образом. Вычислим $\partial^2 U(s, z_1, z_{-1}; \varepsilon) / \partial t^2$ в силу системы уравнений (3.2) и

$\partial^4 U(s, z_1, z_{-1}; \varepsilon) / \partial s^4$. Подставим теперь эти выражения в краевую задачу (2.3)–(2.4) и приравняем коэффициенты при $z_1 |z_1|^2, z_1 |z_{-1}|^2, \dots, \bar{z}_{-1} z_1^2$. В результате получим последовательность краевых задач вида

$$\begin{aligned} Bd^4 \mathbf{u}_* / ds^4 - (l\sigma_{kp})^2 \mathbf{u}_* + \mathbf{F}_*(s, d_{pp}) &= 0 \\ du_* / ds|_{s=0} = du_* / ds|_{s=1} &= 0 \\ (Bd^3 \mathbf{u}_* / ds^3 + C\mathbf{u}_*)|_{s=0} = (Bd^3 \mathbf{u}_* / ds^3 - C\mathbf{u}_*)|_{s=1} &= 0 \end{aligned}$$

$p = -1, 1, l = 1, 3, \mathbf{F}_*(s, d_{pp}) \in \mathbf{H}$ и линейным образом зависит от d_{pp} . При $l = 3$ краевая задача однозначно разрешима. При $l = 1$ условие разрешимости (2.16) позволяет однозначно определить d_{pp} . По аналогии с (2.14)–(2.16) $\mathbf{u}_*(s)$ в этом случае определяется также однозначно. В результате имеем

$$d_{pp} = (a_{11}(v_{k_{p-1}}^2, v_{k_{p-1}}^2)_{L_2} + a_{21}(v_{k_{p-2}}^2, v_{k_{p-2}}^2)_{L_2}) / 2$$

Экспоненциально устойчивым (неустойчивым) автоколебательным решением $z_p^*(t; \varepsilon)$ (3.2) в краевой задаче (2.3)–(2.4) соответствует такое же автоколебательное решение и того же характера устойчивости, асимптотическая формула которого получается подстановкой $z_p^*(t; \varepsilon)$ в (3.1). Отметим также, что для получения более точной асимптотической формулы автоколебательных решений краевой задачи (2.3)–(2.4) разложения (3.4) и (3.2) по z_p и ε необходимо вести до более высоких порядков малости.

Если же потеря устойчивости нулевого решения краевой задачи (2.3)–(2.4) происходит по двум (k_1 -й и k_2 -й) базисным функциям (2.9), то автоколебательные решения краевой задачи (2.3)–(2.4) определяются установившимися решениями того же характера устойчивости следующей комплексной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{z}_p &= [\lambda_p^\sim(\varepsilon) - d_{pp}(|z_p|^2/2 + |z_{-p}|^2) - \\ &- d_{pq}(|z_q|^2 + |z_{-q}|^2)] z_p - d_{pq} z_q z_{-q} \bar{z}_{-p} \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\lambda_p^\sim(\varepsilon)$ и d_{pp} определены в (3.2), $(p, q) = (1, 2), (-1, 2), (2, 1), (-2, 1)$:

$$d_{pq} = (a_{11}(v_{k_{p-1}}^2, v_{k_{q-1}}^2)_{L_2} + a_{21}(v_{k_{p-2}}^2, v_{k_{q-2}}^2)_{L_2}) / 2$$

При этом выражение $U(s, z_1, z_{-1}, z_2, z_{-2}; \varepsilon)$ строится простым разложением по z_1, z_{-1}, z_2, z_{-2} по аналогии с (3.4).

Изучим теперь автоколебательные решения систем (3.2) и (3.3). Непосредственно легко проверяется, что система уравнений (3.2) имеет при $\sigma_{kp1}(\omega) > 0$ единственное асимптотически орбитально устойчивое периодическое решение

$$z_p^*(t; \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} r_{kp}^* \exp(i\sigma_{kp} t), \quad z_{-p}^*(t; \varepsilon) \equiv 0 \quad (r_{kp}^* = (2\sigma_{kp1}(\omega) / d_{pp})^{1/2})$$

$p = 1, -1$, которому в краевой задаче (2.3)–(2.4) отвечает периодическое решение вида [8]:

$$\mathbf{u}^*(s, t; \varepsilon) = (\varepsilon^{1/2} / \sigma_{kp} r_{kp}^* v_{kp}(s) + O(\varepsilon^{3/2})) \exp(i(\sigma_{kp} + O(\varepsilon)) t)$$

являющееся прямой асинхронной прецессией.

Для построения установившихся решений системы уравнений (3.3) выполним сначала полярную замену переменных $z_p = r_p \exp(i\sigma_{kp} \tau)$ ($r_p \geq 0$). Далее, введя новую переменную $\theta = \sigma_{k_1}(\tau_{-1} - \tau_1) + \sigma_{k_2}(\tau_2 - \tau_{-2})$ ($\theta \in [0, 2\pi)$)

k	$(v_{k1}^2, v_{k1}^2)_{L_2}$	$(v_{k2}^2, v_{k2}^2)_{L_2}$	(k_1, k_2)	$(v_{k1}^2, v_{k1}^2)_{L_2}$	$(v_{k2}^2, v_{k2}^2)_{L_2}$
1	$0,8483 \cdot 10^4$	$0,1650 \cdot 10^3$	(1, 2)	$0,4511 \cdot 10^4$	$0,1111 \cdot 10^4$
2	$0,2803 \cdot 10^4$	$0,7681 \cdot 10^4$	(1, 3)	$0,8698 \cdot 10^4$	$0,8460 \cdot 10^2$
3	$0,1388 \cdot 10^5$	$0,4793 \cdot 10^2$	(2, 3)	$0,4744 \cdot 10^4$	$0,5987 \cdot 10^3$
4	$0,1479 \cdot 10^5$	$0,3251 \cdot 10^1$	(3, 4)	$0,6936 \cdot 10^4$	$0,6024 \cdot 10^2$
2	$0,6938 \cdot 10^4$	$0,5266 \cdot 10^4$	(2, 3)	$0,7169 \cdot 10^4$	$0,4677 \cdot 10^4$
3	$0,7790 \cdot 10^4$	$0,4159 \cdot 10^4$	(2, 4)	$0,4003 \cdot 10^4$	$0,2834 \cdot 10^4$

получим систему уравнений «медленных» переменных

$$r_p \dot{=} [\varepsilon \sigma_{kp1}(\omega) - d_{pp}(r_p^2/2 + r_{-p}^2) - d_{pq}(r_q^2 + r_{-q}^2)] r_p - d_{pq} r_q r_{-q} r_{-p} \cos \theta$$

$$((p, q) = (1, 2), (-1, 2), (2, 1), (-2, 1)) \quad (3.4)$$

$$\theta \dot{=} d_{pq} [r_1 r_{-1} (r_{-2}/r_2 + r_2/r_{-2}) + r_2 r_{-2} (r_{-1}/r_1 + r_1/r_{-1})] \sin \theta \quad (3.5)$$

и систему уравнений «быстрых» переменных

$$r_p \dot{=} 1 + (-1)^p r_q r_{-q} r_{-p} / (\sigma_{kp} r_p) \sin \theta, \quad (p, q) = (1, 2), (-1, 2), (2, -1)$$

Таким образом, все сводится к анализу системы уравнений (3.4)–(3.5). Замечая теперь, что уравнение (3.5) имеет глобально устойчивое (с точностью до неустойчивого состояния равновесия $\theta=0$) состояние равновесия $\theta=\pi$ и в связи с этим, всегда $r_{-1}, r_{-2} < 0$, получим, что установившиеся решения системы (3.4)–(3.5) определяются установившимися решениями следующей системы уравнений

$$r_p \dot{=} (\varepsilon \sigma_{kp1}(\omega) - d_{pp} r_p^2/2 - d_{pq} r_q^2) r_p, \quad (p, q) = (1, 2), (2, 1) \quad (3.6)$$

которая подробно анализировалась в работе [9]. Отметим, что система (3.6) циклов не имеет, а каждому состоянию равновесия этой системы в системе (3.3) соответствуют либо периодическое решение, либо инвариантный тор T_2 (двухчастотное решение), того же характера устойчивости. Результаты анализа (3.6) применительно к краевой задаче (2.3)–(2.4) сформулируем следующим образом. Введем в рассмотрение величины

$$R_1^*(\omega) = [(\sigma_{k11}(\omega) d_{22}/2 - \sigma_{k21}(\omega) d_{12}) \Delta^{-1}]^{1/2}$$

$$R_2^*(\omega) = [(\sigma_{k21}(\omega) d_{11}/2 - \sigma_{k11}(\omega) d_{21}) \Delta^{-1}]^{1/2}$$

$$\Delta = d_{11} d_{22}/4 - d_{12} d_{21}$$

$$r_1^*(\omega) = (2\sigma_{k11}(\omega) d_{11}^{-1})^{1/2}, \quad r_2^*(\omega) = (2\sigma_{k21}(\omega) d_{22}^{-1})^{1/2}$$

Структура разбиения плоскости параметров ω в окрестности точки $\omega^* = (\omega_1^*, \omega_2^*)$ пересечения прямых $\Gamma_1: \sigma_{k11}(\omega) = 0$ и $\Gamma_2: \sigma_{k21}(\omega) = 0$, соответствующая различным типам автоколебательных решений краевой задачи (2.3)–(2.4) представлена на фиг. 4, где $\Gamma_3: R_1^*(\omega) = 0$, $\Gamma_4: R_2^*(\omega) = 0$, $\omega_j = \omega_j - \omega_j^*$ ($j=1, 2$). Обозначения в круглых скобках соответствуют случаю $\Delta < 0$. В области 1 решения краевой задачи (2.3)–(2.4) асимптотически устойчивы. В областях 2 и 2' краевая задача (2.3)–(2.4) имеет асимптотически орбитально устойчивые периодические решения, асимптотические формулы которых соответственно имеют вид ($j=1, 2$):

$$u_j^*(s, t; \varepsilon) = (\varepsilon^{1/2} / \sigma_{kj} r_j^*(\omega)) v_{kj}(s) + O(\varepsilon^{3/2}) \exp(i(\sigma_{kj} + O(\varepsilon))t) \quad (3.7)$$

В областях 3 и 3' краевая задача (2.3)–(2.4) имеет одновременно два периодических решения (3.7), одно из которых соответственно устойчиво, другое – неустойчиво. В области 4 наряду с периодическими решениями (3.7) краевая задача (2.3)–(2.4) имеет двумерный инвариантный тор, асимптотическая формула которого имеет вид

$$T_2(s, \tau_1, \tau_2; \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} (R_1^*(\omega) / \sigma_{h_1} \nu_{h_1}(s) \exp(i\sigma_{h_1} \tau_1) + R_2^*(\omega) / \sigma_{h_2} \nu_{h_2}(s) \exp(i\sigma_{h_2} \tau_2)) + O(\varepsilon^{3/2})$$

и который будет асимптотически орбитально устойчив (неустойчив), если $\Delta > 0$ ($\Delta < 0$). При этом устойчивость периодических решений (3.7) противоположна характеру устойчивости тора.

В примере, рассмотренном в п. 2, для случая $c_1=10$, $c_2=70$ и случая $c_1=40$, $c_2=10$ соответственно имеем значения (табл. 2).

Знак величины Δ определяется значениями a_{11} и a_{21} . Если положить в рассмотренном примере $a_{21}=2,75a_{11}$ (пропорционально площади поверхности соответствующего ротора), то будем иметь следующие значения величины $\Delta = \Delta_{h_1 h_2} a_{11}^2$. В первом случае: $\Delta_{12}=0,9319 \cdot 10^7$, $\Delta_{13}=0,1591 \cdot 10^8$, $\Delta_{23} = -0,3555 \cdot 10^8$; во втором случае: $\Delta_{23} = -0,7165 \cdot 10^8$, $\Delta_{24} = -0,1152 \cdot 10^8$, $\Delta_{34} = -0,1080 \cdot 10^7$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бауер В. О. Вынужденные колебательные системы соосных роторов с учетом гироскопического эффекта дисков // Прочность и динамика авиационных двигателей. М.: Машиностроение. 1965. Вып. 2. С. 201–254.
2. Бондаренко Н. И., Голосков Е. Г. Об автоколебаниях соосных роторах // Динамика и прочность машин. Харьков: Харьковский ун-т. 1966. Вып. 4. С. 73–79.
3. Овчарова Д. К., Голосков Е. Г. Автоколебания соосных роторов // Прикладная механика. 1971. Т. 7. Вып. 6. С. 85–90.
4. Поздняк Э. Л. Об устойчивости и автоколебаниях соосных роторов // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 2. С. 38–45.
5. Дименберг Ф. Н. Изгибные колебания вращающихся валов. М.: Изд-во АН СССР. 247 с.
6. Красносельский М. А., Вайнко Г. М., Забрейко П. П. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука. 1969. 455 с.
7. Вибрации в технике. Справочник. Т. 3. М.: Машиностроение. 1980. 545 с.
8. Кубышкин Е. П. Автоколебательные решения одного класса сингулярно возмущенных краевых задач // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 4. С. 674–685.
9. Кубышкин Е. П. Автоколебания роторов с распределенными параметрами // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 59–65.

Ярославль

Поступила в редакцию
21.VII.1988