

УДК 624.072.21

© 1991 г.

А. М. ЦАЛИК

**КВАТЕРНИОННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ  
В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ**

Рассматриваются системы, составленные из пространственно ориентированных стержней, подверженных совместному воздействию нормальных усилий, кручения, изгиба и сдвига с учетом деформации сечения. Условия композиции стержней записываются в терминах кватернионных преобразований систем координат, связанных с осями отдельных стержней, в систему координат всей стержневой системы. В отличие от матричных преобразований поворота, выражаемых в терминах углов Эйлера, кватернионные преобразования, использующие «самолетные» углы, более компактны и просты при вычислениях на ЭВМ, а их обратные преобразования не требуют обращения матриц.

**1. Основные понятия.** Пусть  $P = p_0 + i_1 p_1 + i_2 p_2 + i_3 p_3$  — кватернион, определенный в трехмерном пространстве  $R^3$  с таблицей умножения символов  $i_1 i_1 = i_2 i_2 = i_3 i_3 = -1$ ,  $i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3$ ,  $i_2 i_3 = -i_3 i_2 = i_1$ ,  $i_3 i_1 = -i_1 i_3 = i_2$ . У кватерниона  $P = \text{Sc}(P) + \text{Ve}(P)$  различают скалярную часть  $\text{Sc}(P) = p_0$  и векторную часть  $\text{Ve}(P) = i_1 p_1 + i_2 p_2 + i_3 p_3$ . Известно [1], что кватернионное преобразование

$$P' = TP\bar{T}, \quad T = \cos \frac{\Phi}{2} + \sin \frac{\Phi}{2} I \tag{1.1}$$

$$\bar{T} = \cos \frac{\Phi}{2} - \sin \frac{\Phi}{2} I, \quad |T| = T\bar{T} = 1$$

осуществляет в трехмерном пространстве  $R^3$  поворот вектора  $\text{Ve}(P)$  вокруг вектора  $\text{Ve}(I)$  на угол  $\Phi$ .

Кватернионное преобразование  $T$  может быть представлено в мультиэкспоненциальном виде

$$T = \prod_{k=1}^3 e^{i_k \Phi_k / 2} = \prod_{k=1}^3 \left( \cos \frac{\Phi_k}{2} + i_k \sin \frac{\Phi_k}{2} \right) \tag{1.2}$$

где  $\Phi_k$  — угол поворота относительно оси  $OX_k$ .

Под кватернионнозначными вектором  $S$  и матрицей  $D$  будем понимать соответственно вектор и матрицу с кватернионнозначными элементами

$$S = (S_1, S_2, \dots, S_n)$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & & & \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}, \quad S_l = \sum_{k=1}^3 i_k^s s_{kl}, \quad d_{lm} = \sum_{k=1}^3 i_k d_{klm}$$

$$\text{Sc}(DS) = \left( \text{Sc} \sum_j d_{1j} s_j, \text{Sc} \sum_j d_{2j} s_j, \dots \right)$$

$Sc(\bar{D}S)$  — есть кватернионнозначный вектор, равносильный действительному вектору  $D^*S^*$ , полученному умножением действительной матрицы

$$D^* = \begin{bmatrix} d_{11m} & d_{12m+1} & \dots & \dots \\ d_{21m} & d_{22m+1} & \dots & \dots \\ d_{31m} & d_{32m+1} & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

на действительный вектор  $S^* = (s_{11}, s_{21}, s_{31}, s_{12}, s_{22}, s_{32}, \dots)$ .

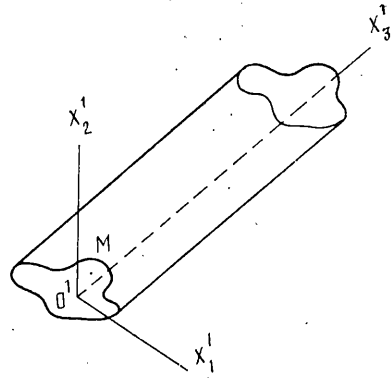
Преобразование (1.1) оказалось удобным инструментом в некоторых задачах ориентирования материальных систем, связанных с преобразованием поворота, и ранее использовалось в ряде исследований [2, 3].

Ниже кватернионное преобразование (1.1) используется для описания основных уравнений механики стержневых систем, связанных с преобразованиями систем координат отдельных стержней при их композиции в систему стержней.

**2. Механика стержня.** Уравнения механики отдельного стержня в правой системе координат  $x'_1 x'_2 x'_3$ , связанной с осью стержня (фиг. 1), можно получить путем осреднения деформаций отдельных точек его поперечного сечения. Если  $U = i_1 U_1 + i_2 U_2 + i_3 U_3$  — перемещение произвольной точки  $M$  поперечного сечения, то

$$U = u + Ve(\varphi r) + i_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \Phi$$

где  $u$  — перемещение начала координат;  $\varphi$  — угол поворота стержня вокруг оси  $Ox'_3$ ;  $r = i_1 x_1 + i_2 x_2$  — кватернион точки  $(x'_1, x'_2)$ ,  $\Phi$  — функция кручения, учитывающая перемещение точки  $M$ , вызванное деформацией сечения.



Фиг. 1

Из представления для  $U$  следуют формулы для деформаций

$$\varepsilon_{13} = \frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} x_2 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \varphi_2 \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} x_1 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \varphi_1 \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_3^2} \Phi + x_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} - x_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} \quad (2.3)$$

При этом предполагается, что  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = 0$ ,  $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$ ,  $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$ . Исходя из уравнений (2.1)–(2.3), находим выражения для моментов и сил, действующих на поперечное сечение стержня

$$M_1 = \int_F E \varepsilon_{33} x_2 dF = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} A_{11} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} A_{12} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_3^2} A_{13} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} A_{16} \quad (2.4)$$

$$M_2 = \int_F E \varepsilon_{33} x_1 dF = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} A_{21} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} A_{22} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_3^2} A_{23} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} A_{26} \quad (2.5)$$

$$M_3 = \int_F G(\varepsilon_{23}x_1 - \varepsilon_{13}x_1) dF = A_{31}\varphi_1 + A_{32}\varphi_2 + A_{33} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} -$$

$$- A_{34} \partial u_1 / \partial x_3 + A_{35} \partial u_2 / \partial x_3, \quad A_{31} = A_{35}, \quad A_{32} = A_{34} \quad (2.6)$$

$$Q_1 = \int_F G \varepsilon_{13} dF = -A_{42}^* \varphi_2 + A_{43} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} + A_{44}^* \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, \quad A_{42}^* = A_{44}^* \quad (2.7)$$

$$Q_2 = \int_F G \varepsilon_{23} dF = -A_{51}^* \varphi_1 + A_{53} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} + A_{55}^* \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \quad A_{51}^* = A_{55}^* \quad (2.8)$$

$$Q_3 = \int_F E \varepsilon_{33} dF = A_{61} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} - A_{62} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} + A_{63} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} + A_{66} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (2.9)$$

В представлениях (2.7) и (2.8) жесткости  $A_{42}^*$  и  $A_{51}^*$  обычно [4] умножают на коэффициенты неравномерного распределения касательных напряжений по сечению  $k_1$  и  $k_2$ , так что вместо величин  $A_{42}^*$  и  $A_{51}^*$  используются величины  $A_{42} = k_1 A_{42}^*$ ,  $A_{51} = k_2 A_{51}^*$ . Кроме того, из уравнений (2.6), (2.7) и (2.8) можно получить уравнение

$$\partial \varphi_3 / \partial x_3 = (M_3 - (A_{31}/A_{51}) Q_2 + (A_{34}/A_{42}) Q_1) / C \quad (2.10)$$

$$C = (A_{33} + (A_{31} A_{53} / A_{51}) - A_{34} A_{43} / A_{42})$$

с помощью которого из уравнений (2.4) и (2.5) можно исключить вторую производную  $\partial^2 \varphi_3 / \partial x_3^2$ . В результате получим

$$M_1 = \frac{\partial M_3}{\partial x_3} B_{13} + \frac{\partial Q_1}{\partial x_3} B_{14} - \frac{\partial Q_2}{\partial x_3} B_{15} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} A_{11} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} A_{12} \quad (2.11)$$

$$M_2 = -\frac{\partial M_3}{\partial x_3} B_{23} - \frac{\partial Q_1}{\partial x_3} B_{24} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_3} B_{25} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} A_{21} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} A_{22} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} A_{26} \quad (2.12)$$

$$Q_3 = \frac{\partial M_3}{\partial x_3} B_{63} + \frac{\partial Q_1}{\partial x_3} B_{64} - \frac{\partial Q_2}{\partial x_3} B_{65} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} A_{61} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} A_{62} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} A_{66} \quad (2.13)$$

$$B_{13} = A_{13} / C, \quad B_{14} = A_{13} A_{34} / (A_{42} C), \quad B_{15} = A_{13} A_{31} / (A_{51} C)$$

$$B_{23} = A_{23} / C, \quad B_{24} = A_{23} A_{34} / (A_{42} C), \quad B_{25} = A_{23} A_{31} / (A_{51} C)$$

$$B_{63} = A_{63} / C, \quad B_{64} = A_{63} A_{34} / (A_{42} C), \quad B_{65} = A_{63} A_{31} / (A_{51} C)$$

К уравнениям (2.10), (2.11), (2.6)–(2.8), (2.12), (2.13) присоединяются дифференциальные уравнения движения

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_3} - Q_2 - \varphi_1 \ddot{R}_{17} + \varphi_2 \ddot{R}_{18} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \ddot{R}_{19} - u_3 \ddot{R}_{1,12} = F_1(x_3, t) \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial x_3} + Q_1 + \varphi_1 \ddot{R}_{27} - \varphi_2 \ddot{R}_{28} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \ddot{R}_{29} + u_3 \ddot{R}_{2,12} = F_2(x_3, t) \quad (2.15)$$

$$\partial M_3 / \partial x_3 - \varphi_3 \ddot{R}_{3,9} + u_1 \ddot{R}_{3,10} - u_2 \ddot{R}_{3,11} = F_3(x_3, t) \quad (2.16)$$

$$\partial Q_1 / \partial x_3 + \varphi_3 \ddot{R}_{4,9} - u_1 \ddot{R}_{4,10} = H_1(x_3, t) \quad (2.17)$$

$$\partial Q_2 / \partial x_3 - \varphi_3 \ddot{R}_{5,9} - u_2 \ddot{R}_{5,11} = H_2(x_3, t) \quad (2.18)$$

$$\partial Q_3 / \partial x_3 - \varphi_1 \ddot{R}_{6,7} + \varphi_2 \ddot{R}_{6,8} - \partial \varphi_3 / \partial x_3 \ddot{R}_{6,9} - u_3 \ddot{R}_{6,12} = H_3(x_3, t) \quad (2.19)$$

С учетом представления (2.10) уравнения (2.14), (2.15) и (2.19) можно заменить следующими

$$\begin{aligned} \partial M_1 / \partial x_3 - Q_2 - M_3 \cdot W_{13} - Q_1 \cdot W_{14} + Q_2 \cdot W_{15} - \varphi_1 \cdot R_{17} + \\ + \varphi_2 \cdot R_{18} - u_3 \cdot R_{1,12} = F_1(x_3, t) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \partial M_2 / \partial x_3 + Q_1 + M_3 \cdot W_{23} + Q_1 \cdot W_{24} - Q_2 \cdot W_{25} + \\ + \varphi_1 \cdot R_{27} - \varphi_2 \cdot R_{28} + u_3 \cdot R_{2,12} = F_2(x_3, t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \partial Q_3 / \partial x_3 - M_3 \cdot W_{63} - Q_1 \cdot W_{64} + Q_2 \cdot W_{65} - \varphi_1 \cdot R_{67} + \\ + \varphi_2 \cdot R_{68} - u_3 \cdot R_{6,12} = H_3(x_3, t) \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$W_{13} = R_{19}/C, \quad W_{14} = R_{19}A_{34}/(A_{42}C), \quad W_{15} = R_{19}A_{31}/(A_{51}C)$$

$$W_{23} = R_{29}/C, \quad W_{24} = R_{29}A_{34}/(A_{42}C), \quad W_{25} = R_{29}A_{31}/(A_{51}C)$$

$$W_{63} = R_{69}/C, \quad W_{65} = R_{69}A_{34}/(A_{42}C), \quad W_{65} = R_{69}A_{31}/(A_{51}C)$$

В приведенных формулах  $A_{ij}$  и  $R_{ij}$  — соответственно статические и инерционные жесткости, вычисляемые при интегрировании в формулах (2.4) — (2.9) и (2.14) — (2.19).

Введем кватернионнозначную вектор-функцию

$$S = (M, Q, \varphi, u):$$

$$M = \sum_{k=1}^3 i_k M_k, \quad Q = \sum_{k=1}^3 i_k Q_k, \quad \varphi = \sum_{k=1}^3 i_k \varphi_k, \quad u = \sum_{k=1}^3 i_k u_k$$

Рассмотренная выше система дифференциальных уравнений может быть представлена в кватернионном виде

$$\text{Sc}(\bar{B} \partial S / \partial x_3 + \bar{A} S + \bar{W} S') = L$$

$$L = (0, 0, F, H), \quad F = \sum_{k=1}^3 i_k F_k, \quad H = \sum_{k=1}^3 i_k H_k \quad (2.23)$$

где кватернионнозначные матрицы  $B$ ,  $A$  и  $W$  определяются из уравнений (2.11), (2.24), (2.6) — (2.10), (2.20), (2.24), (2.16) — (2.18) и (2.22). При  $L=0$  задача (2.23) есть задача о собственных колебаниях стержня и ее решение имеет вид

$$S(x_3) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{12} c_k s_k e^{\alpha_k x_3 / l}, & \beta_k = 0 \\ \sum_{k=1(2)}^{12} c_k (\text{Re } s_k \cos(\beta_k x_3 / l) - \text{Im } s_k \sin(\beta_k x_3 / l)) - \\ - c_{k+1} (\text{Re } s_k \sin(\beta_k x_3 / l) + \text{Im } s_k \cos(\beta_k x_3 / l)), & \alpha_k = 0 \end{cases}$$

Здесь  $\alpha_k + i\beta_k = \lambda_k$  — собственные числа уравнения  $|\text{Sc}(\lambda \bar{B} + \bar{A} - \bar{W} \omega^2)| = 0$ ,  $S = (M^0, Q^0, \varphi^0, u^0)$  — кватернионнозначные собственные векторы этого же уравнения,  $\omega$  — круговая частота собственных колебаний,  $l$  — длина стержня.

Концевые значения вектора  $S$  имеют вид

$$S(0) = \begin{cases} \sum_{h=1}^{12} c_h S_h, & \beta_h = 0 \\ \sum_{h=1(2)}^{12} c_h \operatorname{Re} s_h - C_{h+1} \operatorname{Im} S_h, & \alpha_h = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

$$S(l) = \begin{cases} \sum_{h=1}^{12} c_h S_h e^{\alpha_h l}, & \beta_h = 0 \\ \sum_{h=1(2)}^{12} c_h (\operatorname{Re} s_h \cos \beta_h - \operatorname{Im} s_h \sin \beta_h) - \\ - c_{h+1} (\operatorname{Re} s_h \sin \beta_h + \operatorname{Im} s_h \cos \beta_h), & \alpha_h = 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

При  $W=0$  задача (2.23) есть задача о статической нагрузке на стержень и ее решение имеет вид  $S=S_0+Sc(\bar{P}(x_3)S_0)+F(L(x_3))$ , где  $P(x_3)$  и  $F(L(x_3))$  — соответственно кватернионнозначные матрица и вектор, получаемые в результате интегрирования уравнения (2.23).

Концевые значения вектора  $S$  для этой задачи имеют вид

$$S(0)=S_0, \quad S(l)=S_0+Sc(\bar{P}(l)S_0)+F(L(l)) \quad (2.26)$$

В представлениях (2.24), (2.25) и (2.26) кватернионнозначные величины  $c_h$  и  $S_0$  подлежат определению из условий композиции стержней в систему.

**3. Механика системы стержней.** Условия композиции стержневой системы, образованной из множества стержней, соединяемых в узлах, состоят из условий равновесия этих узлов и условий совместности перемещений и углов поворота соответствующих стержней.

Условия равновесия узлов имеют вид

$$\sum_k^N T_k M_k \bar{T}_k + \operatorname{Ve}(e_k T_k Q_k \bar{T}_k) + \sum_j^M b_j t_j \langle \bar{t}_j (T_m \varphi_m \bar{T}_m) t_j \rangle_3 \bar{t}_j = 0 \quad (3.1)$$

$$\sum_k^N T_k Q_k \bar{T}_k + \sum_j^M c_j (t_j \langle \bar{t}_j (T_l u_l \bar{T}_l - \operatorname{Ve}(e_l T_l \varphi_l \bar{T}_l)) t_j \rangle_3 \bar{t}_j) = 0 \quad (3.2)$$

Здесь  $\langle A \rangle_k = Sc(\bar{A} \cdot i_k)$ ,  $N$  — количество стержней в узле;  $M$  — количество связей на узел;  $b_j$  — жесткость  $j$ -й связи на угловое перемещение;  $c_j$  — жесткость  $j$ -й связи на поступательное перемещение;  $T$  — кватернион преобразования системы координат, связанной со стержнем;  $t_j$  — кватернион преобразования системы координат, связанной со связью, в глобальную систему координат;  $l$  — номер стержня, не имеющего податливых связей на поступательное движение;  $m$  — номер стержня, не имеющего податливых связей на угловое перемещение;  $e_k, e_l$  — эксцентриситеты прикрепления стержней.

При наличии абсолютно жестких связей на угловое перемещение, наложенных на узел ( $b_j = \infty$ ), уравнения (3.1) примут вид

$$\langle \bar{t}_j (T_m \varphi_m \bar{T}_m) t_j \rangle_3 = 0 \quad (3.3)$$

для всех  $j$ , для которых  $b_j = \infty$ . При этом количество таких связей, не лежащих в одной плоскости, не может быть больше трех. Случай, когда количество связей типа (3.3) меньше трех, рассматриваются особо. При наличии одной абсолютно жесткой связи типа (3.3) с номером  $j$  к уравнениям (3.3) добавляется следующее

$$\left\langle \bar{t}_j \left( \sum_{h=1}^N T_h M_h \bar{T}_h + \text{Ve}(e_h T_h Q_h \bar{T}_h) \right) + \left( \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^M b_s t_s \langle \bar{t}_s (T_m \Phi_m \bar{T}_m) t_s \rangle_s \bar{t}_j \right) \right\rangle_i = 0, \quad i=1, 2 \quad (3.4)$$

При наличии двух абсолютно жестких связей типа (3.3) в уравнении (3.3) следует заменить кватернион  $t_j$  на кватернион  $t_n$  преобразования системы координат, образованной плоскостью, в которой лежат направления двух жестких связей, и нормалью к ней, в глобальную систему координат и положить  $i=3$ .

При наличии абсолютно жестких связей на поступательное перемещение, наложенных на узел ( $c_j = \infty$ ), уравнения (3.2) заменяются выражением

$$\langle \bar{t}_j (T_l u_l \bar{T}_l - \text{Ve}(e_l T_l \Phi_l \bar{T}_l) t_j) \rangle_s = 0 \quad (3.5)$$

а дополнительными к этому уравнению в случаях, аналогичных описанным для абсолютно жестких связей на угловое перемещение, будут уравнения

$$\left\langle \bar{t}_r \left( \sum_{h=1}^N T_h Q_h \bar{T}_h + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^M c_s t_s \langle \bar{t}_s (T_l u_l \bar{T}_l - \text{Ve}(e_l T_l u_l \bar{T}_l) t_s) \rangle_s \bar{t}_s \right) t_r \right\rangle_i = 0 \quad (3.6)$$

где  $t_r = t_j$  и  $i=1, 2$  при наличии одной абсолютно жесткой связи и  $t_r = t_n$ ,  $i=3$  при наличии двух абсолютно жестких связей.

Рассмотрим условия совместности перемещений и углов поворота стержней.

При абсолютно жестком прикреплении стержня к узлу должны выполняться равенства

$$T_h \Phi_h \bar{T}_h - T_m \Phi_m \bar{T}_m = 0 \quad (3.7)$$

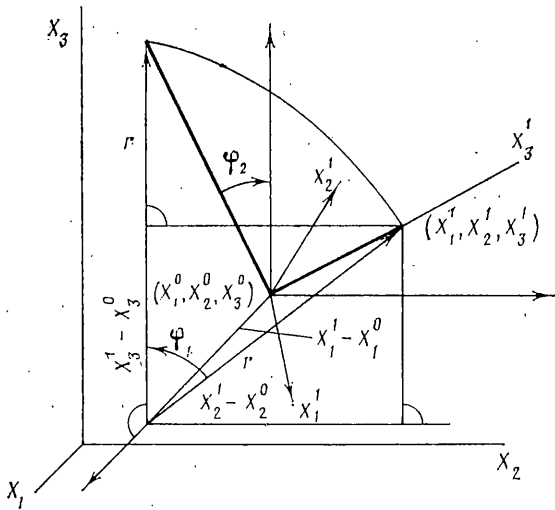
$$T_h u_h \bar{T}_h - \text{Ve}(e_h T_h \Phi_h \bar{T}_h) - (T_l u_l \bar{T}_l - \text{Ve}(e_l T_l \Phi_l \bar{T}_l)) = 0 \quad (3.8)$$

для всех стержней  $k$ , входящих в узел. Если стержень прикрепляется к узлу с помощью податливой связи, то вместо уравнений (3.7) и (3.8) или части из них, следует использовать уравнение связи

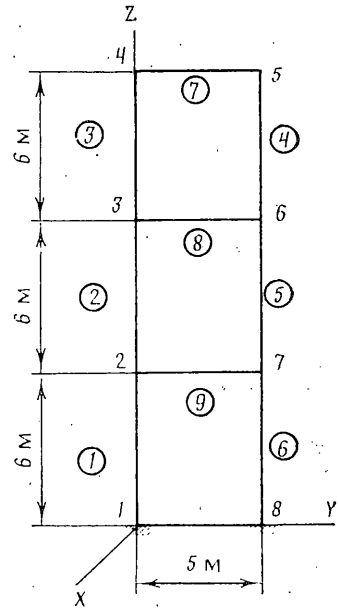
$$M_k + \bar{T}_k \left( \sum_j b_j \bar{t}_j \langle t_j (T_h \Phi_h \bar{T}_h - T_m \Phi_m \bar{T}_m) \bar{t}_j \rangle_s t_j \right) T_k = 0, \quad b_j \neq \infty \quad (3.9)$$

$$Q_k + \bar{T}_k \left( \sum_j c_j \bar{t}_j \langle t_j (T_h u_h \bar{T}_h - T_l u_l \bar{T}_l) - \text{Ve}(e_h T_h \Phi_h \bar{T}_h - e_l T_l \Phi_l \bar{T}_l) \bar{t}_j \rangle_s t_j \right) T_k = 0, \quad c_j \neq 0 \quad (3.10)$$

Уравнения (3.4)–(3.10) при подстановке в них концевых значений соответствующих компонент вектора  $S$  из представлений (2.24), (2.25) или (2.26) образуют систему алгебраических уравнений вида:  $\det C(\omega^2) = 0$  в задаче о свободных колебаниях,  $TS = F$  в задаче о статическом нагружении, где матрицы  $C$  и  $S$  принимают значения соответственно из (2.24), (2.25) и (2.26).



Фиг. 2



Фиг. 3

4. Построение кватерниона преобразования системы координат стержня в систему координат стержневой системы (глобальную). Пусть  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  и  $(x_1^1, x_2^1, x_3^1)$  — координаты начала и конца стержня в глобальной системе координат  $Ox_1x_2x_3$  (фиг. 2). Требуется найти кватернионное преобразование системы координат  $Ox_1'x_2'x_3'$ , образованной плоскостью поперечного сечения стержня  $Ox_1'x_2'$  и осью стержня  $Ox_3'$ , в систему координат  $Ox_1x_2x_3$  такое, что, например, ось  $Ox_3'$  переходит в ось  $Ox_3$ , а плоскость  $Ox_1'x_2'$  поворачивается вокруг оси  $Ox_3'$  на угол  $\varphi_3$ .

Исходя из мультиэкспоненциального представления искомого преобразования (1.2), из фиг. 2 находим

$$\varphi_1 = \arctg \frac{x_2^1 - x_2^0}{x_3^1 - x_3^0}, \quad \varphi_2 = -\arctg \frac{x_1^1 - x_1^0}{((x_2^1 - x_2^0)^2 + (x_3^1 - x_3^0)^2)^{1/2}}$$

$$\cos \frac{\varphi_1}{2} = \left( \frac{r + x_3^1 - x_3^0}{2r} \right)^{1/2}, \quad \sin \frac{\varphi_1}{2} = \left( \frac{r - x_3^1 + x_3^0}{2r} \right)^{1/2},$$

$$\cos \frac{\varphi_2}{2} = \left( \frac{R+r}{2R} \right)^{1/2}, \quad \sin \frac{\varphi_2}{2} = \left( \frac{R-r}{2R} \right)^{1/2}$$

$$R = ((x_1^1 - x_1^0)^2 + (x_2^1 - x_2^0)^2 + (x_3^1 - x_3^0)^2)^{1/2}, \quad r = ((x_2^1 - x_2^0)^2 + (x_3^1 - x_3^0)^2)^{1/2}$$

Таким образом, искомое кватернионное преобразование имеет вид

$$T = \left[ \left( \frac{r + x_3^1 - x_3^0}{2r} \right)^{1/2} - i_1 \left( \frac{r - x_3^1 + x_3^0}{2r} \right)^{1/2} \right] \left[ \left( \frac{R+r}{2R} \right)^{1/2} + i_2 \left( \frac{R-r}{2R} \right)^{1/2} \right] \times \\ \times \left( \cos \frac{\varphi_3}{2} - i_3 \sin \frac{\varphi_3}{2} \right)$$

5. Построение кватерниона преобразования системы координат, образованной плоскостью, определяемой двумя векторами, и нормалью к ней, в систему координат стержневой системы (глобальную). Пусть  $t_1$  и  $t_2$  — два кватернионных преобразования вектора  $V$ , соответствующую

щие двум векторам  $V_1$  и  $V_2$ , лежащим в одной плоскости, т. е.  $V_1=t_1V\bar{t}_1$ ,  $V_2=t_2V\bar{t}_2$ ,  $|t_1|=|t_2|=1$ . Для определенности будем полагать  $|V|=1$ . Требуется найти такое кватернионное преобразование  $t_N$ , что  $V_N=t_NV\bar{t}_N$  есть нормаль к плоскости, в которой расположены векторы  $V_1$  и  $V_2$ .

Для простоты изложения положим  $V=i_3$ . Тогда для требуемого преобразования получим уравнение

$$t_N i_3 \bar{t}_N = \text{Ve} \{t_1 i_3 \bar{t}_1 \cdot t_2 i_3 \bar{t}_2\} = i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_3 a_3$$

из которого следует

$$t_{N0} t_{N2} + t_{N1} t_{N3} = a_1/2, \quad -t_{N0} t_{N1} + t_{N2} t_{N3} = a_2/2 \quad (4.1)$$

$$t_{N0}^2 - t_{N1}^2 - t_{N2}^2 + t_{N3}^2 = a_3, \quad t_{N0}^2 + t_{N1}^2 + t_{N2}^2 + t_{N3}^2 = 1$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \quad (4.2)$$

Из двух последних уравнений (4.1) следует

$$t_{N0}^2 + t_{N3}^2 = (a_3 + 1)/2, \quad t_{N1}^2 + t_{N2}^2 = (1 - a_3)/2$$

Так как искомое кватернионное преобразование определяется с точностью до поворота вектора  $V$  вокруг самого себя, то можно положить, например,  $t_{N3} = 0$ . Отсюда следует

$$t_{N0}^2 = \frac{a_3 + 1}{2}, \quad t_{N0} t_{N2} = \frac{a_1}{2}, \quad -t_{N0} t_{N1} = \frac{a_2}{2}$$

$$t_{N0} = ((a_3 + 1)/2)^{1/2}, \quad t_{N1} = -a_2 / (2(a_3 + 1))^{1/2},$$

$$t_{N2} = a_1 / (2(a_3 + 1))^{1/2}$$

где величины  $a_i$  связаны соотношением (4.2).

Если вектор  $V$  имеет общий вид, то вводя преобразование  $t^* V \bar{t}^* = i_3$ ,  $V = \bar{t}^* i_3 t^*$  получим  $V_1 = t_1^0 \bar{t}_1^* i_3 t_1^0$ ,  $V_2 = t_2^0 \bar{t}_2^* i_3 t_2^0$ ,  $V_N = t_N^0 \bar{t}_N^* i_3 t_N^0$  откуда

$$t_N^0 t^* = t_N, \quad t_N^0 = t_N \bar{t}^*$$

$$t_N = (a_3 + 1 - i_1 a_2 + i_2 a_1) / (2(a_3 + 1))^{1/2}$$

**6. Численная реализация.** Для рамной системы (фиг. 3), заимствованной из [5], определяются частоты собственных колебаний. Для отстройки частот собственных колебаний, связанных с движением из плоскости рисунка, изгибные жесткости стоек и ригелей из плоскости рамы, а также их крутильные жесткости выбраны достаточно большими.

Кватернионы преобразований систем координат стержней в глобальную систему имеют вид

для стоек 1, 2, 3 —  $T_1 = 1$  (тождественное преобразование),

для стоек 4, 5, 6 —  $T_2 = i_1$  (поворот вокруг оси  $x_1$  на угол  $\pi$ ),

для ригелей 7, 8, 9 —  $T_3 = \pi(1 + i_1)/4$  (поворот вокруг оси  $x_1$  на угол  $\pi/2$ ).

Условия композиции для рассматриваемой стержневой системы таковы:

узлы 1 и 8 —  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = u_1 = u_2 = u_3 = 0$ ;

узел 2

$$-T_1 M_1^4(l) \bar{T}_1 + T_1 M_1^2(0) \bar{T}_1 + T_3 M_1^9(0) \bar{T}_3 = 0$$

$$-T_1 Q_3^4(l) \bar{T}_1 + T_1 Q_3^2(0) \bar{T}_1 - T_3 Q_3^9(0) \bar{T}_3 = 0$$

$$-T_1 Q_2^4(l) \bar{T}_1 + T_1 Q_2^2(0) \bar{T}_1 + T_3 Q_3^9(0) \bar{T}_3 = 0$$

$$u_1^4(l) = \varphi_2^4(l) = \varphi_3^4(l) = 0, \quad T_j u^j \bar{T}_j = u_0^j, \quad T_j \varphi^j \bar{T}_j = \varphi_0^j.$$

Условия композиции в остальных узлах имеют вид, аналогичный условиям композиции в узле 2.

Вычисления выполнены на ЭВМ по разработанному комплексу программ динамического расчета стержневых систем при следующих численных значениях:

для стоек  $\rho F = 2000 \text{ кг/м}$ ,  $EJ_{x_1} = 2,06 \cdot 10^8 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$ ,  $EJ_{x_2} = 6,02 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$ ,  $EF = 5,25 \cdot 10^{10} \text{ Н}$ ,  $GJ_x = 1 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{м}^2$ ,  $k_{x_1} GF = 2,13 \cdot 10^{10} \text{ Н}$ ,  $k_{x_2} GF = 2,13 \cdot 10^{10} \text{ Н}$ ,  $\rho J_{x_1} = 7,85 \text{ кгм}$ ,  $\rho J_{x_2} = 229,7 \text{ кгм}$ ,  $\rho J_x = 237,5 \text{ кгм}$ ;



№	$f_1$	$f_2$	№	$f_1$	$f_2$
1	8-10	8,41	5	124-126	126,25
2	25-27	25,8	6	154-156	155,44
3	43-45	42,4	7	156-158	157,0
4	102-105	103,7	8	158-160	нет данных

для ригелей  $\rho F=5000$  кг/м,  $EJ_{x_1'}=4,12 \cdot 10^8$  Нм<sup>2</sup>,  $EJ_{x_2'}=1,18 \cdot 10^{10}$  Нм<sup>2</sup>,  $EF=1,31 \cdot 10^{11}$  Н,  $GJ_k=2 \cdot 10^{10}$  Нм<sup>2</sup>,  $k_{x_1'}GF=5,33 \cdot 10^{10}$  Н,  $k_{x_2'}GF=5,33 \cdot 10^{10}$  Н,  $\rho J_{x_1'}=15,7$  кгм,  $\rho J_{x_2'}=448,2$  кгм,  $\rho J_p=463,9$  кгм.

Сравнение спектров собственных частот, вычисленного по приведенному алгоритму, ( $f_1$ , с<sup>-1</sup>) и приведенного в [5] ( $f_2$ , с<sup>-1</sup>), выполнено в таблице. При этом для отыскания численных значений частот собственных колебаний стержневой системы с распределенными параметрами используется итерационный процесс с заданной точностью вычислений.

Преимущества кватернионных преобразований поворота перед матричными особенно ощутимы в стержневых системах с пространственной ориентацией стержней. При задании трех углов поворота  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  относительно декартовых координат соответствующий кватернион имеет простой и наглядный вид (1.2) и для своего вычисления требует восемь операций умножения и четыре операции сложения. Матричное представление поворота в этом случае есть произведение трех матриц третьего порядка [6], результат которого получается после 36 умножений и 36 сложений. В нелинейных задачах, решение которых строится итерациями, учитывающими изменение ориентации стержня в процессе деформации, а также в задачах с многократным поворотом стержня относительно различных векторов, использование кватернионных преобразований существенно снижает время счета и экономит память ЭВМ. Можно ожидать, что создание процессоров с кватернионной алгеброй обеспечит расширение круга задач, связанных с кватернионными преобразованиями в механике стержневых систем.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. 759 с.
2. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
3. Челноков Ю. Н. Кватернионные методы в задачах относительного движения динамически симметричных материальных систем. I // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 30-37. II. Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 23-31.
4. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
5. Колоушек В. Динамика строительных конструкций. М.: Стройиздат, 1965. 632 с.
6. Халфман Р. Л. Динамика. М. Наука, 1972. 567 с.

Киев

Поступила в редакцию  
30.XII.1988