

УДК 539.3:534.1

© 1991 г.

М. А. ДЗАМА, Н. Е. ЕГАРМИН

ПРЕЦЕССИЯ УПРУГИХ ВОЛН ПРИ ВРАЩЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК

Известно [1], что при вращении упругого кольца в результате действия сил Кориолиса происходит расщепление собственных частот колебаний, что приводит к прецессии стоячих волн и бегущим. В [2] показано, что прецессия стоячей волны в кольце имеет место и при переменной угловой скорости вращения основания. Аналогичные явления наблюдаются при вращении любой осесимметричной оболочки. В [3] выведена общая формула, определяющая скорость прецессии стоячей волны в произвольной осесимметричной оболочке, установленной на вращающемся основании. Там же даны расчеты этой величины для ряда конкретных типов оболочек. В настоящей работе определяется скорость прецессии в оболочках, имеющих форму поверхностей второго порядка положительной кривизны (эллипсоид, двухполостный гиперболоид, эллиптический параболоид), и в оболочках, меридианы которых представляют собой параболы произвольной степени.

1. Постановка задачи. Рассмотрим осесимметричную оболочку, вращающуюся вокруг своей оси симметрии. Будем предполагать, что угловая скорость вращения $\Omega(t)$ достаточно мала, так что центробежными силами и вызванными ими безмоментными деформациями можно пренебречь. Будем предполагать так же малость $\dot{\Omega}(t)$, в связи с чем пренебрежем и вызванным переносным ускорением начальным кручением.

Для описания деформаций оболочки введем на ее срединной поверхности ортогональную систему координат (α_1, α_2) . Параметр α_1 связан с углом между внутренней нормалью к оболочке и осью ее вращения (для эллипсоида, двухполостного гиперболоида и эллиптического параболоида) или с длиной оболочки z (для оболочек, меридианы которых представляют собой параболы произвольной степени). Эта связь будет конкретизирована в дальнейшем для каждого рассматриваемого здесь типа оболочек. Параметр α_2 — угол в окружном направлении ($0 \leq \alpha_2 \leq 2\pi$).

Для скорости прецессии Δ относительно инерциального пространства при дополнительном предположении о нерастяжимости параллели ($\epsilon_2 = 0$) имеет место формула [3]:

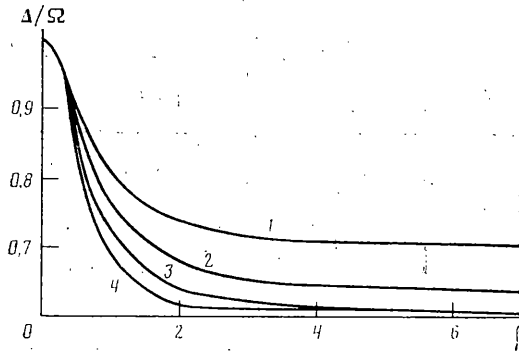
$$\Delta = \Omega \int (U_1^2 - U_2^2 + U_3^2) A_1 A_2 d\alpha_1 / \int (U_1^2 + U_2^2 + U_3^2) A_1 A_2 d\alpha_1 \quad (1.1)$$

где A_1, A_2 — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности. Величины U_1, U_2, U_3 , связанные с вектором перемещений \mathbf{u} следующим соотношением

$$\mathbf{u}(\alpha_1, \alpha_2, t) = (U_1(\alpha_1) \cos n\alpha_2, U_2(\alpha_1) \sin n\alpha_2, U_3(\alpha_1) \cos n\alpha_2) \cos \omega_0 t \quad (1.2)$$

где n — число волн по параллели, ищем для невращающейся оболочки. Тем самым мы ограничиваемся первым членом в разложении скорости прецессии Δ в ряд по степеням Ω .

2. Оболочки вращения второго порядка. Рассмотрим куполообразные оболочки со свободным краем, срединная поверхность которых имеет форму поверхности вращения второго порядка положительной гауссовой кривизны. Для определения вектора упругих перемещений \mathbf{u} воспользуемся



Фиг. 1

уравнениями изгиба оболочки. Они получаются приравнением нулю всех трех компонент тангенциальной деформации $\epsilon_1, \omega, \epsilon_2$. Эти величины, как показано в [4, стр. 189], удовлетворяют для оболочек рассматриваемого типа следующим уравнениям

$$\partial(\mu A_1 u_1) / \partial \alpha_1 - \partial(\mu A_2 u_2) / \partial \alpha_2 = \mu (A_1^2 \epsilon_1 - A_2^2 \epsilon_2) \quad (2.1)$$

$$\partial(\mu A_1 u_1) / \partial \alpha_2 + \partial(\mu A_2 u_2) / \partial \alpha_1 = \frac{1}{2} \mu A_1 A_2 \omega$$

Вид функции $\mu(\alpha_1)$ зависит от типа оболочки и будет конкретизирован в дальнейшем. Уравнения (2.1) при $\epsilon_1 = \omega = \epsilon_2 = 0$ решаем методом разделения переменных по формулам (1.2). Решение, ограниченное в вершине купола ($\alpha_1 \rightarrow -\infty$), имеет вид

$$U_1 = C e^{n\alpha_1} (\mu A_1)^{-1}, \quad U_2 = C e^{n\alpha_1} (\mu A_2)^{-1} \quad (2.2)$$

В дальнейшем будем считать константу C равной единице, как не влияющую на последующие результаты. Компоненту U_3 формы колебания по внутренней нормали к поверхности находим из условия $\epsilon_2 = 0$:

$$U_3 = - \left(n (L_{22} \mu)^{-1} + A_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (A_1^2 L_{22} \mu)^{-1} \right) e^{n\alpha_1} \quad (2.3)$$

где L_{22} — коэффициент второй квадратичной формы поверхности.

Рассмотрим эллипсоид вращения. Коэффициенты первой и второй квадратичной формы поверхности и функция $\mu(\alpha_1)$ имеют в этом случае следующий вид: $A_1 = a (\text{sh}^2 \alpha_1 + \beta^2)^{1/2} \text{ch}^{-2} \alpha_1$, $A_2 = a \text{ch}^{-1} \alpha_1$, $L_{11} = L_{22} = -a\beta (\text{sh}^2 \alpha_1 + \beta^2)^{1/2} \text{ch}^{-1} \alpha_1$, $\mu = \text{ch}^2 \alpha_1$, где $\beta = c/a$ — отношение полуосей эллипсоида ($\beta > 1$ для вытянутого эллипсоида). Параметр α_1 связан с углом между внутренней нормалью к оболочке и ее осью вращения соотношением $\cos \theta = -(\text{sh}^2 \alpha_1 + \beta^2)^{-1/2} \text{sh} \alpha_1$. Делая все необходимые подстановки в формулах (2.2), (2.3) и (1.1), для скорости прецессии стоячей волны получаем

$$\Delta = \Omega [(n^2 - 1) I_1^n + I_2^n / \beta^2] / [(n^2 + 1) I_1^n + I_2^n / \beta^2]$$

$$I_1^n = \int_{-\infty}^{\alpha_0} e^{2n\alpha_1} (\text{sh}^2 \alpha_1 + \beta^2)^{1/2} \text{ch}^{-5} \alpha_1 d\alpha_1 \quad (2.4)$$

$$I_2^n = \int_{-\infty}^{\alpha_0} e^{2n\alpha_1} (\text{sh}^2 \alpha_1 + \beta^2)^{1/2} \text{ch}^{-3} \alpha_1 (1 - n \text{th} \alpha_1)^2 d\alpha_1$$

Таблица 1

θ_0	$\beta=0,4$	$\beta=0,8$	$\beta=1$	$\beta=4$	$\beta=8$
70	0,9257	0,8351	0,8054	0,7075	0,6979
80	0,9146	0,8006	0,7632	0,6442	0,6319
90	0,9025	0,7656	0,7230	0,6104	0,6026
100	0,8884	0,7305	0,6806	0,6017	0,6005

Таблица 2

θ_0	70°	80°	90°	100°	110°
K_1	0,8054	0,7632	0,7230	0,6867	0,6560
K_2	0,1270	0,1588	0,1762	0,1732	0,1490

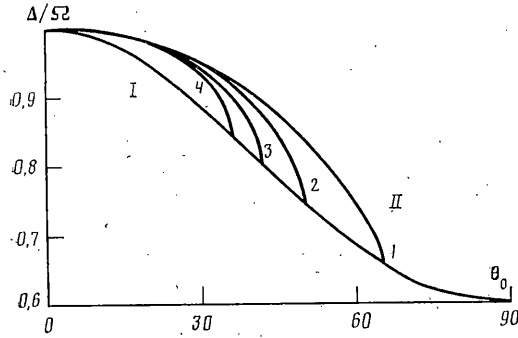
Таблица 3

e	$\theta_0=15^\circ$	$\theta_0=25^\circ$	$\theta_0=35^\circ$	$\theta_0=45^\circ$	$\theta_0=65^\circ$
1,1	0,9883	0,9660	0,9289	0,8726	0,6722
1,3	0,9881	0,9644	0,9214	0,8429	—
1,5	0,9879	0,9623	0,9087	—	—
1,7	0,9876	0,9594	0,8786	—	—

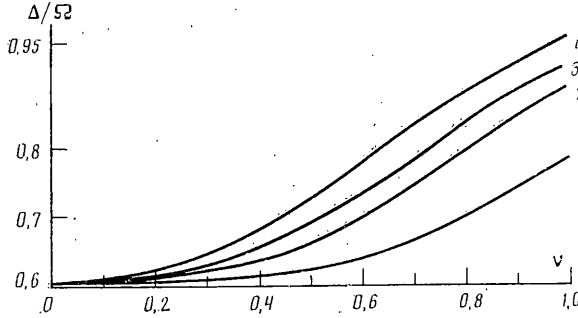
где α_0 — значение параметра α_1 на свободном крае оболочки. Интегралы I_1^n , I_2^n вычисляются аналитически. Получающиеся выражения в виду их громоздкости здесь не приводятся. Зависимость масштабного коэффициента Δ/Ω от значения параметра β при различных значениях θ_0 — угла между внутренней нормалью к оболочке и ее осью вращения на свободном крае, приведены на фиг. 1 и табл. 1 при $n=2$. Кривым 1, 2, 3, 4 на фиг. 1 соответствуют следующие значения параметра θ_0 : 70, 80, 90, 100°. Анализ формулы (2.4) позволяет сделать вывод, что для сильно вытянутого эллипсоида ($\beta \gg 1$) значение скорости прецессии близко к таковому в случае кольца. Этот факт объясняется тем, что эффективно участвует в колебаниях оболочки лишь ее малая часть вблизи свободного края, а геометрия этого участка близка к геометрии цилиндрической оболочки. Влияние же заделки резонатора в вершине купола незначительно, так как и в случае рассмотренного в [3] сферического сегмента на «ножке».

Если главные полуоси эллипсоида близки по величине, то, сохраняя в разложении скорости прецессии Δ в ряд по степеням $(a-c)/c$ лишь члены первого порядка малости, получим $\Delta = \Omega (K_1 + K_2 (a-c)/c)$. Коэффициенты K_1 и K_2 имеют громоздкий вид и поэтому здесь не приводятся. Зависимость их от краевого угла θ_0 при $n=2$ приведена в табл. 2.

В случае двухполостного гиперboloида коэффициенты первой и второй квадратичной формы поверхности и функция $\mu(\alpha_1)$ имеют следующий вид: $A_1 = a(e^2 - 1)^{-1/2} (e^2 \operatorname{ch}^2 \alpha_1 - \operatorname{sh}^2 \alpha_1)^{1/2} \operatorname{sh}^{-2} \alpha_1$, $A_2 = a \operatorname{sh}^{-1} \alpha_1$, $L_{11} = L_{22} = -a(e^2 \operatorname{ch}^2 \alpha_1 - \operatorname{sh}^2 \alpha_1)^{-1/2} \operatorname{sh}^{-1} \alpha_1$, $\mu = \operatorname{sh}^2 \alpha_1$, где e — эксцентриситет образующей гиперboloида. Параметр α_1 связан с углом между внутренней нормалью к оболочке и ее осью симметрии соотношением $\cos \theta = -\operatorname{ch} \alpha_1 (e^2 \operatorname{ch}^2 \alpha_1 - \operatorname{sh}^2 \alpha_1)^{-1/2} (e^2 - 1)^{1/2}$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Делая все необходимые подстановки в формуле (1.1), для скорости прецессии получаем

$$\Delta = \Omega [(n^2 - 1)J_1^n + (e^2 - 1)J_2^n] / [(n^2 + 1)J_1^n + (e^2 - 1)J_2^n]$$

$$J_1^n = \int_{-\infty}^{\alpha_0} e^{2n\alpha_1} (e^2 \operatorname{ch}^2 \alpha_1 - \operatorname{sh}^2 \alpha_1)^{1/2} \operatorname{sh}^{-5} \alpha_1 d\alpha_1$$

(2.5)

$$J_2^n = \int_{-\infty}^{\alpha_0} e^{2n\alpha_1} (e^2 \operatorname{ch}^2 \alpha_1 - \operatorname{sh}^2 \alpha_1)^{1/2} \operatorname{sh}^{-3} \alpha_1 (1 - n \operatorname{cth} \alpha_1)^2 d\alpha_1$$

где α_0 — значение параметра α_1 на свободном крае оболочки. Результаты вычислений по формулам (2.5) сведены в табл. 3, в каждой клетке которой стоит значение масштабного коэффициента Δ/Ω при $n=2$. На фиг. 2 представлена зависимость Δ/Ω от значения угла θ на краю оболочки (θ_0) также при $n=2$. Кривые II соответствуют двухполостным гиперboloидам с различными эксцентриситетами их образующих (кривым 1, 2, 3, 4 соответствуют следующие значения эксцентриситета e : 1,1; 1,3; 1,5; 1,7). Точки, которыми заканчиваются эти кривые, соответствуют гиперboloидам бесконечной длины. Кривую I можно интерпретировать как качественную зависимость скорости прецессии Δ в конической оболочке от угла между внутренней нормалью и осью вращения. Действительно, наибольший вклад в колебания вносят части оболочки вблизи ее свободного края, где геометрия близка к конической.

Рассмотрим эллиптический параболоид. Коэффициенты первой и второй квадратичной формы поверхности и функция $\mu(\alpha_1)$ имеют следующий вид: $A_1 = e^{\alpha_1} (a^2 + e^{2\alpha_1})^{1/2}$, $A_2 = ae^{\alpha_1}$, $L_{11} = L_{22} = ae^{2\alpha_1} (e^{2\alpha_1} + a^2)^{-1/2}$, $\mu = e^{-2\alpha_1}$. Пара-

λ	$\nu=0,2$	$\nu=0,4$	$\nu=0,6$	$\nu=0,8$	$\nu=0,9$
0,27	0,6002	0,6009	0,6030	0,6087	0,6144
1,00	0,6032	0,6122	0,6376	0,6942	0,7349
1,73	0,6095	0,6345	0,6952	0,7923	0,8417

метр α_1 связан с углом между внутренней нормалью к поверхности и ее осью симметрии формулой $\cos \theta = a(a^2 + e^{2\alpha_1})^{1/2}$. Для скорости прецессии второй формы стоячей волны получаем

$$\Delta = \Omega \frac{1/3 - 9/5 (\cos \theta_0)^4 + 2 (\cos \theta_0)^6 - 8/15 (\cos \theta_0)^9}{5/9 - 6/7 (\cos \theta_0)^2 - 3/5 (\cos \theta_0)^4 + 4/3 (\cos \theta_0)^6 - 136/315 (\cos \theta_0)^9} \quad (2.6)$$

где θ_0 — значение угла θ на свободном краю оболочки ($0 \leq \theta_0 < \pi/2$).

3. Параболические оболочки вращения. Рассмотрим теперь оболочки, образующая срединной поверхности которых в декартовой системе координат задается уравнением: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \lambda z^\nu$, где $\lambda > 0$, $0 < \nu < 1$. Для оболочек рассматриваемого типа имеют место следующие соотношения [4, стр. 202]

$$\frac{\partial q}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial p}{\partial \alpha_2} = \frac{\omega}{\lambda^2} z^{1-2\nu\sqrt{1+(r')^2}} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{\lambda^2 \nu (1-\nu)} \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha_1} + (2\nu-1)p \right) = \frac{1+(r')^2}{rr''} \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$p = u_1 \sqrt{1+(r')^2} z^{1-2\nu}, \quad q = u_2/r, \quad \alpha_1 = \ln z, \quad (\dots)' = \frac{\partial}{\partial z}$$

Решая уравнения (3.1) с нулевыми правыми частями, получим вектор упругих перемещений u , соответствующий изгибаниям оболочки. Проведем разделение переменных по формулам $p = P(\alpha_1) \cos n\alpha_2 \cos \omega_0 t$, $q = Q(\alpha_1) \sin n\alpha_2 \cos \omega_0 t$, где n — число волн по параллели. Оставляя решение, ограниченное в вершине оболочки ($z=0$), получаем выражения для функций $U_1(z)$ и $U_2(z)$:

$$U_1 = L_1 F^{-1}(z) z^{(f+\nu-1)}, \quad U_2 = \lambda L_2 z^f$$

$$F(z) = (z^{2(1-\nu)} + \lambda^2 \nu^2)^{1/2}, \quad f = 1/2 (1 + (1 + 4(n^2 - 1)\nu(1-\nu))^{1/2})$$

Функция $U_3(z)$ находится из условий связи $\varepsilon_1 = 0$ или $\varepsilon_2 = 0$. Соотношение между постоянными L_1 и L_2 устанавливается из требования однозначности определения U_3 по двум различным условиям связи. Не ограничивая общности, в дальнейшем полагаем $L_2 = 1$, тогда $L_1 = n\lambda^2 \nu(1-\nu)(f+\nu-1)^{-1}$. В результате получаем

$$U_1 = n\lambda^2 \nu(1-\nu)(f+\nu-1)^{-1} F^{-1}(z) z^{(f+\nu-1)}, \quad U_2 = \lambda z^f$$

$$U_3 = n\lambda z^{(f+\nu-1)} (F(z) + \lambda^2 \nu^2 (1-\nu)(f+\nu-1)^{-1} F^{-1}(z))$$

Подставляя эти выражения в формулу (1.1), получаем следующее выражение для скорости прецессии стоячей волны относительно инерциального пространства в параболической оболочке

$$\Delta = \Omega [(n^2 - 1) M_1^n + n^2 \lambda^2 M_2^n] / [(n^2 + 1) M_1^n + n^2 \lambda^2 M_2^n] \quad (3.2)$$

$$M_1^n = \int_0^{z_0} z^{(2f+2\nu-1)} F(z) dz, \quad M_2^n = \nu^2 f^2 (f+\nu-1)^{-2} \int_0^{z_0} z^{(2f+4\nu-3)} F(z) dz$$

Интегралы M_1^n и M_2^n в общем случае в элементарных функциях не берутся. Результаты вычислений по формуле (3.2) сведены в табл. 4, в каждой клетке которой стоит значение масштабного коэффициента Δ/Ω при $n=2$, $z_0=10$ (длина оболочки). На фиг. 3 представлена зависимость Δ/Ω от параметра ν (порядка параболы) при различных значениях параметра λ при фиксированной длине z_0 (кривым 1, 2, 3, 4 соответствуют следующие значения параметра λ : 1,00; 1,73; 2,14; 2,75).

Предельному случаю $\nu=0$ соответствует цилиндрическая оболочка радиуса $r=\lambda$, длины z_0 , у которой край $z=0$ жестко закреплен, а край $z=z_0$ свободный. Из (3.2) в пределе при ν , стремящемся к нулю, получаем

$$\Delta = \Omega [n^2 - 1 + (3/n^2) (r^2/z_0^2)] / [n^2 + 1 + (3/n^2) (r^2/z_0^2)] \quad (3.3)$$

Отметим, что формула (3.3) совпадает с оценкой, полученной в [4]. При ν , стремящемся к единице, оболочка стремится к конусу с углом при вершине $\gamma = \arctg \lambda$. При этом для скорости прецессии Δ получим

$$\Delta = \Omega [n^2 - 1 + n^2 \operatorname{tg}^2 \gamma] / [n^2 + 1 + n^2 \operatorname{tg}^2 \gamma] \quad (3.4)$$

Оценки (3.3) и (3.4) не учитывают растяжений срединной поверхности в областях, примыкающих к точкам закрепления цилиндра и конуса. В случае оболочек нулевой кривизны растяжения срединной поверхности более существенны, чем для оболочек положительной кривизны. Поэтому формулы (3.3), (3.4) в отличие от (2.4)–(2.6) и (3.2) могут рассматриваться только как качественные результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bryan G. H. On the beats in the vibration of a revolving cylinder or bell // Proc. Camb. Phil. Soc. Math. Phys. Sci. 1890. V. 7. P. 101–111.
2. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. О динамических эффектах в упругом вращающемся кольце // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 5. С. 17–23.
3. Егармин Н. Е. О прецессии стоячих волн колебаний вращающейся осесимметричной оболочки // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 142–148.
4. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.XII.1989