

УДК 539.3

© 1991 г.

В. Н. ПАЙМУШИН, И. Н. СИДОРОВ

**ВАРИАНТ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТАТИКИ
ИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ**

Предложен метод определения напряженно-деформированного состояния изотропной однослойной оболочки со сложной геометрической формой срединной поверхности, основными этапами которого являются: редукция трехмерного решения для внутренних точек оболочки, представленного в виде формулы Сомильяны, к двумерному с помощью разложения по полиномам Лежандра от поперечной координаты нормально связанной со срединной поверхностью оболочки криволинейной системы координат; решение двумерной системы уравнений для моментов разложения методом последовательных приближений с определением значений моментов перемещений и усилий на контуре срединной поверхности оболочки и пересчетом компонент моментов вектора перемещений во внутренних точках этой поверхности; после окончания итерационного процесса вычисление компонент вектора перемещений и тангенциальных компонент тензора напряжений во внутренних точках оболочки по явным уточненным формулам.

1. Метод граничных интегральных уравнений находит широкое применение при решении статических и динамических задач теории упругости. Центральное место в этом методе занимает фундаментальное решение исходного дифференциального оператора, которое для плоских и пространственных задач теории упругости имеет аналитическое представление. Использование же этого метода в задачах механики даже изотропных оболочечных элементов произвольной геометрии в рамках прикладных теорий в общем случае не представляется возможным, так как в разрешающих уравнениях теории оболочек присутствуют компоненты первого и второго метрических тензоров срединной поверхности, которые суть функции от гауссовых координат. В этой связи аналитическое представление фундаментального решения оболочечных уравнений возможно только для пластин [1–3], цилиндрических пологих оболочек кругового сечения [4] и пологих сферических оболочек. Для таких оболочек задачи определения напряженно-деформированного состояния (НДС) сводятся к решению одномерных контурных интегральных уравнений.

Следует отметить, что при определении НДС изотропных оболочек при внешних силовых или тепловых воздействиях имеется принципиальная возможность построить решение для вектора перемещений внутренних точек оболочки с помощью потенциала простого слоя и фиктивных поверхностных нагрузок (непрямой метод интегральных уравнений), а также формулы Сомильяны [5, 6], в которую входят переменные функции, имеющие реальный физический смысл (прямой метод интегральных уравнений). Однако такой подход представляется не целесообразным ввиду того, что при аппроксимации этих интегральных уравнений теми или иными квадратурными формулами задача сводится к системе алгебраических уравнений высокого порядка с полностью заполненной матрицей. Более того, решение в такой трехмерной постановке задач механики тонких оболочек, как правило, и не требуется, так как тангенциальные компоненты

тензора напряжений, являющиеся главными в оболочках, с необходимой степенью точности могут быть найдены на базе упрощенных двумерных моделей описания поведения этих объектов.

Поэтому в данной работе предлагается «компромиссный» вариант представления решения задачи статики изотропной оболочки в виде интегральных уравнений, использующий аналитичность фундаментального решения пространственной задачи теории упругости, а также априорную информацию о полях перемещений, деформаций и напряжений в тонких оболочках. Это интегральное представление строится следующим образом: решение системы дифференциальных уравнений равновесия трехмерной теории упругости изотропного тела в виде формулы Сомильяны с помощью полиномов Лежандра от переменной, отсчитываемой вдоль нормали к срединной поверхности, расщепляется на серию двумерных интегральных уравнений относительно моментов вектора перемещений, заданных на срединной поверхности; для определения моментов вектора перемещений (усилий) на контуре срединной поверхности формируется серия аналогичных интегральных уравнений, полученных указанным выше способом, на основе точного интегрального представления вектора перемещений на боковой поверхности оболочки. В рамках двухмоментного приближения вектора перемещений (контурных усилий) предложена процедура метода последовательных приближений для пересчета значений моментов во внутренних точках срединной поверхности, что позволяет исходную точную постановку задачи свести к серии одномерных задач.

2. Предположим, что в трехмерном евклидовом пространстве R^3 задана параметризация срединной поверхности $\sigma - \mathbf{r}(x^1, x^2)$ (x^1, x^2 — криволинейные координаты) изотропной оболочки переменной толщины $2h(x^1, x^2)$, занимающей объем V_R пространства R^3 (фиг. 1).

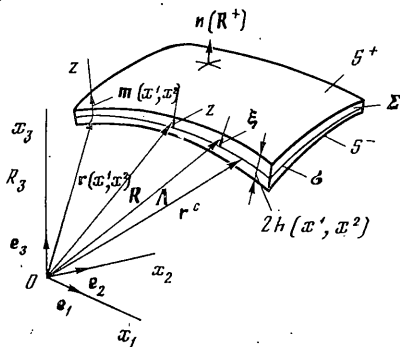
В соответствии с формулой Сомильяны [5] компоненты вектора перемещений в декартовой системе координат элементов оболочки после воздействия внешних массовых и поверхностных усилий можно представить в следующей интегральной форме (по повторяющимся индексам проводится суммирование, а индексы пробегает значения 1, 2, 3):

$$u_k(\Lambda) = \iiint_{V_R} \rho U_i^k(\mathbf{R}, \Lambda) F_i(\mathbf{R}) dV_R + \int_{S_R} [U_i^k(\mathbf{R}, \Lambda) \sigma_{n,i}(\mathbf{R}) - u_i(\mathbf{R}) P_i^k(\mathbf{R}, \Lambda)] d\sigma_R \quad (2.1)$$

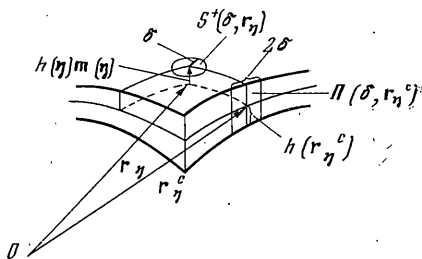
где ρ — плотность материала оболочки; $F_i(\mathbf{R})$ — компоненты вектора массовых сил; $\sigma_{n,i}(\mathbf{R})$ — компоненты вектора поверхностных усилий; $u_i(\mathbf{R})$ — компоненты вектора перемещений поверхностных элементов оболочки; $U_i^k(\mathbf{R}, \Lambda)$, $P_i^k(\mathbf{R}, \Lambda)$ — компоненты, соответственно, тензоров перемещений и напряжений Кельвина [5–7], для которых имеются явные формулы (E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, $n(\mathbf{R})$ — единичная внешняя нормаль к S_R , δ_{ij} — символ Кронекера):

$$U_i^k(\mathbf{R}, \Lambda) = -\frac{(1+\nu)}{8\pi E(1-\nu)} \left[\frac{(R_i - \Lambda_i)(R_k - \Lambda_k)}{r^3} + (3-4\nu) \frac{\delta_{ik}}{r} \right]$$

$$P_i^k(\mathbf{R}, \Lambda) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^3} \left\{ (1-2\nu) [\delta_{ik}(R_j - \Lambda_j) + \delta_{jk}(R_i - \Lambda_i) - \delta_{ij}(R_k - \Lambda_k)] + \frac{3(R_i - \Lambda_i)(R_j - \Lambda_j)(R_k - \Lambda_k)}{r^2} \right\} n_j(\mathbf{R})$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$r = ((R_i - \Lambda_i)(R_i - \Lambda_i))^{1/2}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r}(x^1, x^2) + z\mathbf{m}(x^1, x^2) \quad (2.2)$$

$$\Lambda = \mathbf{r}(\eta^1, \eta^2) + \xi\mathbf{m}(\eta^1, \eta^2), \quad z, \xi \in [-h, h]$$

Интегральное представление (2.1) с учетом разбиения поверхности S_R на лицевые поверхности S^+ , S^- и боковую поверхность Σ (фиг. 1) перепишем следующим образом (предполагается, что Σ — линейчатая поверхность, образованная движением нормали \mathbf{m} к поверхности σ вдоль ее контура):

$$\begin{aligned} u_k(\Lambda) = & \int_{V_R} \int \rho U_i^k(\mathbf{R}, \Lambda) F_i(\mathbf{R}) dV_R + \int_{S^+} [U_i^k(\mathbf{R}^+, \Lambda) \sigma_{n,i}(\mathbf{R}^+) - \\ & - u_i(\mathbf{R}^+) P_i^k(\mathbf{R}^+, \Lambda)] d\sigma_{R^+} + \int_{S^-} [U_i^k(\mathbf{R}^-, \Lambda) \sigma_{n,i}(\mathbf{R}^-) - u_i(\mathbf{R}^-) P_i^k(\mathbf{R}^-, \Lambda)] d\sigma_{R^-} + \\ & + \int_{\Sigma} [U_i^k(\mathbf{R}^c, \Lambda) \sigma_{n,i}^z - u_i^z P_i^k(\mathbf{R}^c, \Lambda)] d\sigma \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{R}^c = \mathbf{r}^c + z\mathbf{m}^c, \quad \mathbf{R}^\pm = \mathbf{r}(x) \pm h\mathbf{m}(x)$$

Оставаясь в рамках постановок задач, традиционно рассматриваемых в теории оболочек, в дальнейшем будем считать, что на лицевых поверхностях S^+ , S^- заданы статические граничные условия с поверхностными усилиями \mathbf{p}_n^+ , \mathbf{p}_n^- . Последним обстоятельством, а также представлением решения (2.3) через физические переменные на поверхности оболочки и непрерывностью вектора перемещений вплоть до границы области, занятой оболочкой, и обуславливается построение решения рассматриваемой задачи в виде интегральной формулы Сомильяны (2.3).

3. Решение системы интегральных уравнений (2.3) будем искать с помощью проекционного метода, в котором в качестве системы базисных функций возьмем полиномы Лежандра [8] $P_k(z/h(r_x))$ ($k=0, 1, \dots$, $\mathbf{r}_x \equiv \mathbf{r}(x^1, x^2)$, $\mathbf{r}_\eta \equiv \mathbf{r}(\eta^1, \eta^2)$) от поперечной координаты z нормально связанной со срединной поверхностью оболочки системы координат. Ограничившись приближенным представлением вектора перемещений $\mathbf{u}(\Lambda)$ и вектора напряжений на боковой поверхности $\sigma_n^z(\mathbf{R}^c)$ вида

$$\mathbf{u}(\Lambda) = \sum_{h=0}^N \mathbf{w}^{(h)}(\mathbf{r}_\eta) P_h(\xi/h(\mathbf{r}_\eta)), \quad \mathbf{w}^{(h)}(\mathbf{r}_\eta) = \left(\frac{2k+1}{2h(\mathbf{r}_\eta)} \right) \int_{-h(\mathbf{r}_\eta)}^{h(\mathbf{r}_\eta)} \mathbf{u}(\Lambda) P_k(\xi/h(\mathbf{r}_\eta)) d\xi \quad (3.1)$$

$$\sigma_n^\Sigma(\mathbf{R}^c) = \sum_{k=0}^N \sigma^{(k)\Sigma}(\mathbf{r}_x^c) P_k(z/h(\mathbf{r}_x^c)),$$

$$\sigma^{(k)\Sigma}(\mathbf{r}_x^c) = \left(\frac{2k+1}{2h(\mathbf{r}_x^c)} \right) \int_{-h(\mathbf{r}_x^c)}^{h(\mathbf{r}_x^c)} \sigma_n^\Sigma P_k(z/h(\mathbf{r}_x^c)) dz$$

В соответствии с методологией проекционного метода, ортогональностью базисных функций $P_h(\omega)$ на $[-1, 1]$ система (2.3) распадается на $(N+1)$ векторных уравнений для моментов разложения (3.1) $\mathbf{w}^{(m)}$ ($m=0, 1, \dots, N$):

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{(m)}(\mathbf{r}_\eta) = & \int \int \int_{V_R} \rho U^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_\eta) \mathbf{F}(\mathbf{R}) dV_R + \\ & + \int \int_{S^+} \left[U^{(m)}(\mathbf{R}^+, \mathbf{r}_\eta) \mathbf{p}_n^+ - P^{(m)}(\mathbf{R}^+, \mathbf{r}_\eta) \left(\sum_{l=0}^N \mathbf{w}^{(l)}(\mathbf{r}_x) \right) \right] d\sigma^+ + \\ & + \int \int_{S^-} \left[U^{(m)}(\mathbf{R}^-, \mathbf{r}_\eta) \mathbf{p}_n^- - P^{(m)}(\mathbf{R}^-, \mathbf{r}_\eta) \left(\sum_{l=0}^N (-1)^l \mathbf{w}^{(l)}(\mathbf{r}_x) \right) \right] d\sigma^- + \\ & + \int \int_{\Sigma} \left[U^{(m)}(\mathbf{R}^c, \mathbf{r}_\eta) \left(\sum_{l=0}^N \sigma^{(l)\Sigma}(\mathbf{r}_x^c) P_l(z/h(\mathbf{r}_x^c)) \right) - \right. \\ & \left. - P^{(m)}(\mathbf{R}^c, \mathbf{r}_\eta) \left(\sum_{l=0}^N \mathbf{w}^{(l)}(\mathbf{r}_x^c) P_l(z/h(\mathbf{r}_x^c)) \right) \right] d\sigma \end{aligned} \quad (3.2)$$

В системе (3.2) введены матрицы моментов фундаментальных решений $U^{(m)}$, $P^{(m)}$, компоненты которых определяются по формулам

$$U_i^{(m)h}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_\eta) = \left(\frac{2m+1}{2h(\mathbf{r}_\eta)} \right) \int_{-h(\mathbf{r}_\eta)}^{h(\mathbf{r}_\eta)} U_i^h(\mathbf{R}, \Lambda) P_m(\xi/h(\mathbf{r}_\eta)) d\xi$$

$$P_i^{(m)h}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_\eta) = \left(\frac{2m+1}{2h(\mathbf{r}_\eta)} \right) \int_{-h(\mathbf{r}_\eta)}^{h(\mathbf{r}_\eta)} P_i^h(\mathbf{R}, \Lambda) P_m(\xi/h(\mathbf{r}_\eta)) d\xi$$

Аналогично выражениям (3.2) для определения неизвестных значений моментов $\mathbf{w}^{(l)}$, $\sigma^{(l)\Sigma}$ на контуре срединной поверхности S имеет место система соотношений

$$\begin{aligned} \beta(\mathbf{r}_\eta^c) \mathbf{w}^{(m)}(\mathbf{r}_\eta^c) = & \int \int \int_{V_R} \rho U^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_\eta^c) \mathbf{F}(\mathbf{R}) dV_R + \int \int_{S^+} \left[U^{(m)}(\mathbf{R}^+, \mathbf{r}_\eta^c) \mathbf{p}_n^+ - \right. \\ & \left. - P^{(m)}(\mathbf{R}^+, \mathbf{r}_\eta^c) \left(\sum_{l=0}^N \mathbf{w}^{(l)}(\mathbf{r}_x) \right) \right] d\sigma^+ + \int \int_{S^-} \left[U^{(m)}(\mathbf{R}^-, \mathbf{r}_\eta^c) \mathbf{p}_n^- - \right. \\ & \left. - P^{(m)}(\mathbf{R}^-, \mathbf{r}_\eta^c) \left(\sum_{l=0}^N (-1)^l \mathbf{w}^{(l)}(\mathbf{r}_x) \right) \right] d\sigma^- + \int \int_{\Sigma} \left[U^{(m)}(\mathbf{R}^c, \mathbf{r}_\eta^c) \times \right. \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\times \left(\sum_{l=0}^N \sigma^{(l)z}(\mathbf{r}_x^c) P_l(z/h(\mathbf{r}_x^c)) - P^{(m)}(\mathbf{R}^c, \mathbf{r}_\eta^c) \left(\sum_{l=0}^N \mathbf{w}^{(l)}(\mathbf{r}_x^c) P_l(z/h(\mathbf{r}_x^c)) \right) \right) d\sigma$$

в которой параметр $\beta(\mathbf{r}_\eta^c)$ на гладких участках контура принимает значение $(1/2)$.

Следует отметить, что интегралы

$$I_{S^\pm} = \iint_{S^\pm} [U^{(m)}(\mathbf{R}^\pm, \mathbf{r}_\eta) \mathbf{p}_n^\pm - P^{(m)}(\mathbf{R}^\pm, \mathbf{r}_\eta) \mathbf{u}^\pm(\mathbf{r}_x)] d\sigma$$

$$I_\Sigma = \iint_\Sigma [U^{(m)}(\mathbf{R}^c, \mathbf{r}_\eta^c) \sigma_n^z(\mathbf{R}^c) - P^{(m)}(\mathbf{R}^c, \mathbf{r}_\eta^c) \mathbf{u}^z(\mathbf{R}^c)] d\sigma$$

входящие, соответственно, в уравнения (3.2), (3.3), понимаются в следующем смысле

$$I_{S^\pm} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{S^\pm \setminus S_{\delta, \mathbf{r}_\eta}^\pm} [U^{(m)}(\mathbf{R}^\pm, \mathbf{r}_\eta) \mathbf{p}_n^\pm - P^{(m)}(\mathbf{R}^\pm, \mathbf{r}_\eta) \mathbf{u}^\pm(\mathbf{r}_x)] d\sigma$$

$$I_\Sigma = \lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{\Sigma \setminus \Pi_{\delta, \mathbf{r}_\eta^c}} [U^{(m)}(\mathbf{R}^c, \mathbf{r}_\eta^c) \sigma_n^z(\mathbf{R}^c) - P^{(m)}(\mathbf{R}^c, \mathbf{r}_\eta^c) \mathbf{u}^z(\mathbf{R}^c)] d\sigma$$

где через $S_{\delta, \mathbf{r}_\eta}^\pm$, $\Pi_{\delta, \mathbf{r}_\eta^c}$ обозначены, соответственно, области в виде кругов с радиусами δ , центром $\mathbf{R} = \mathbf{r}_\eta \pm h\mathbf{m}(\boldsymbol{\eta})$ на поверхности S^\pm , а также прямоугольник, принадлежащий боковой поверхности Σ со сторонами $2h(\mathbf{r}_\eta^c)$, 2δ (фиг. 2).

Преобразование исходных интегральных уравнений (2.3) к виду (3.2), (3.3) в рамках разложений (3.1) формально не устраняет основных трудностей, возникающих при построении решения системы (2.3). Однако, постановка задачи в виде (3.1)–(3.3) оказывается более приемлемой для организации итерационной процедуры построения решения рассматриваемой задачи. Для обоснования этого положения рассмотрим двухмоментное приближение в (3.1) ($N=1$). В этом случае решение ищется в виде $\mathbf{u}(\boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{w}^{(0)}(\mathbf{r}_\eta) + \xi \mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{r}_\eta)/h$, $\sigma_n^z(\mathbf{R}^c) = \sigma^{(0)z}(\mathbf{r}_x^c) + z\sigma^{(1)z}/h$. Как следует из (3.2), (3.3), размерность задачи определения четырех неизвестных моментов, равная в (3.2), (3.3) двум, определяется наличием суммы поверхностных интегралов ($m=0, 1$):

$$D = \iint_{S^+} P^{(m)}(\mathbf{R}^+, \mathbf{r}_\eta) (\mathbf{w}^{(0)}(\mathbf{r}_x) + \mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{r}_x)) d\sigma^+ + \iint_{S^-} P^{(m)}(\mathbf{R}^-, \mathbf{r}_\eta) (\mathbf{w}^{(0)} - \mathbf{w}^{(1)}) d\sigma^-$$

которая после перегруппировки слагаемых приобретает вид

$$D = \iint_\sigma \left[\left(P^{(m)}(\mathbf{R}^+, \mathbf{r}_\eta) \sqrt{\frac{g^+}{a}} + P^{(m)}(\mathbf{R}^-, \mathbf{r}_\eta) \sqrt{\frac{g^-}{a}} \right) \mathbf{w}^{(0)}(\mathbf{r}_x) \right] d\sigma^+ + \iint_\sigma \left[\left(P^{(m)}(\mathbf{R}^+, \mathbf{r}_\eta) \sqrt{\frac{g^+}{a}} - P^{(m)}(\mathbf{R}^-, \mathbf{r}_\eta) \sqrt{\frac{g^-}{a}} \right) \mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{r}_x) \right] d\sigma^- \quad (3.4)$$

Здесь g^+ , g^- , a — соответственно определители метрических тензоров верхней и нижней лицевых и срединной поверхностей оболочки. Проведем

оценку первого слагаемого в (3.4), вносящего, очевидно, наибольший вклад в эту сумму, для случая тонкой оболочки постоянной толщины $2h = \text{const}$. Для такой оболочки $\mathbf{n}(\mathbf{R}^+) = -\mathbf{n}(\mathbf{R}^-) = \mathbf{m}(\mathbf{r}_x)$, $\sqrt{g^+}/a \approx \sqrt{g^-}/a \approx 1$ и первую подинтегральную сумму в (3.4) при выполнении условия $2h\Delta\sigma/|\mathbf{r}_x - \mathbf{r}_\eta|^3 < 1$ ($\Delta\sigma$ — элемент с площадью $4\pi h|\mathbf{r}_x - \mathbf{r}_\eta|$) с точностью $O(2h\Delta\sigma/|\mathbf{r}_x - \mathbf{r}_\eta|^3)$ можно положить нулю. Из последнего неравенства следует, что величина D будет определяться, в основном, интегралом по площади, охватывающей точку с радиус-вектором \mathbf{r}_η и диаметром, не превышающим величину $4h\sqrt{8\pi}$. В дальнейшем обозначим эту площадь $\Delta\sigma_\eta$, а итерационный процесс построим с учетом выделения главной части интеграла (3.4) по этой площади.

4. Решение системы уравнений (3.2), (3.3) будем искать с помощью метода последовательных приближений. При этом n -е приближение векторов моментов $\mathbf{w}_{(n)}^{(l)}(\mathbf{r}_\eta)$, $\sigma_{(n)}^{(l)\Sigma}(\mathbf{r}_x^c)$, ($l=0, \dots, N$) определяется по формулам, которые строятся в соответствии с предварительным анализом, проведенным в предыдущем разделе

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{w}_{(n)}^{(m)}(\mathbf{r}_\eta) + \left(\iint_{(\Delta\sigma_\eta \cap \sigma)} \left[P^{(m)}(\mathbf{R}^+, \mathbf{r}_\eta) \sqrt{\frac{g^+}{a}} + P^{(m)}(\mathbf{R}^-, \mathbf{r}_\eta) \sqrt{\frac{g^-}{a}} \right] d\sigma \right) \times \\
 & \quad \times (\mathbf{w}_{(n)}^{(0)}(\mathbf{r}_\eta) - \mathbf{w}_{(n-1)}^{(0)}(\mathbf{r}_\eta)) = \iiint_{V_R} \rho U^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_\eta) \mathbf{F}(\mathbf{R}) dV_R + \\
 & \quad + \iint_{\sigma} \left[U^{(m)}(\mathbf{R}^+, \mathbf{r}_\eta) \sqrt{\frac{g^+}{a}} \mathbf{p}_n^+ + U^{(m)}(\mathbf{R}^-, \mathbf{r}_\eta) \sqrt{\frac{g^-}{a}} \mathbf{p}_n^- \right] d\sigma - \\
 & \quad - \iint_{\sigma} \left[P^{(m)}(\mathbf{R}^+, \mathbf{r}_\eta) \sqrt{\frac{g^+}{a}} \left(\sum_{l=0}^N \mathbf{w}_{(n-1)}^{(l)}(\mathbf{r}_x) \right) + P^{(m)}(\mathbf{R}^-, \mathbf{r}_\eta) \sqrt{\frac{g^-}{a}} \times \right. \\
 & \quad \times \left. \left(\sum_{l=0}^N (-1)^l \mathbf{w}_{(n-1)}^{(l)}(\mathbf{r}_x) \right) \right] d\sigma + \iint_{\Sigma} \left[U^{(m)}(\mathbf{R}^c, \mathbf{r}_\eta) \left(\sum_{l=0}^N \sigma_{(n)}^{(l)\Sigma}(\mathbf{r}_x^c) P_l(z/h(\mathbf{r}_x^c)) \right) - \right. \\
 & \quad \left. - P^{(m)}(\mathbf{R}^c, \mathbf{r}_\eta) \left(\sum_{l=0}^N \mathbf{w}_{(n)}^{(l)}(\mathbf{r}_x^c) P_l(z/h(\mathbf{r}_x^c)) \right) \right] d\sigma \\
 & \quad \mathbf{w}_{(-1)}^{(m)} \equiv 0 \\
 & \quad \beta(\mathbf{r}_\eta^c) \mathbf{w}_{(n)}^{(m)}(\mathbf{r}_\eta^c) + \left(\iint_{(\Delta\sigma_\eta^c \cap \sigma)} \left[P^{(m)}(\mathbf{R}^+, \mathbf{r}_\eta^c) \sqrt{\frac{g^+}{a}} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + P^{(m)}(\mathbf{R}^-, \mathbf{r}_\eta^c) \sqrt{\frac{g^-}{a}} \right] d\sigma \right) (\mathbf{w}_{(n)}^{(0)}(\mathbf{r}_\eta^c) - \mathbf{w}_{(n-1)}^{(0)}(\mathbf{r}_\eta^c)) = \\
 & \quad = \iiint_{V_R} \rho U^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_\eta^c) \mathbf{F}(\mathbf{R}) dV_R + \iint_{\sigma} \left[U^{(m)}(\mathbf{R}^+, \mathbf{r}_\eta^c) \sqrt{\frac{g^+}{a}} \mathbf{p}_n^+ + \right. \\
 & \quad \left. + U^{(m)}(\mathbf{R}^-, \mathbf{r}_\eta^c) \sqrt{\frac{g^-}{a}} \mathbf{p}_n^- \right] d\sigma - \iint_{\sigma} \left[P^{(m)}(\mathbf{R}^+, \mathbf{r}_\eta^c) \sqrt{\frac{g^+}{a}} \left(\sum_{l=0}^N \mathbf{w}_{(n-1)}^{(l)}(\mathbf{r}_x) \right) + \right. \\
 & \quad \left. + P^{(m)}(\mathbf{R}^-, \mathbf{r}_\eta^c) \sqrt{\frac{g^-}{a}} \left(\sum_{l=0}^N (-1)^l \mathbf{w}_{(n-1)}^{(l)}(\mathbf{r}_x) \right) \right] d\sigma +
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

$$+ \iint_{\Sigma} [U^{(m)}(\mathbf{R}^c, \mathbf{r}_\eta^c) \left(\sum_{l=0}^N \sigma_{(n)}^{(l)\Sigma}(\mathbf{r}_x^c) P_l(z/h) \right) - \\ - P^{(m)}(\mathbf{R}^c, \mathbf{r}_\eta^c) \left(\sum_{l=0}^N w_{(n)}^{(l)}(r_x^c) P_l(z/h) \right)] d\sigma$$

Здесь следует отметить, что задача (3.2), (3.4) с помощью итерационного алгоритма (4.1) сводится к последовательному решению одномерных задач по определению контурных значений $w_{(n)}^{(m)}(\mathbf{r}_\eta^c)$, $\sigma_{(n)}^{(m)\Sigma}(\mathbf{r}_\eta^c)$, а также пересчету моментов $w_{(n)}^{(m)}$ во внутренних точках срединной поверхности по формулам из (4.1).

После завершения итерационного процесса (4.1) компоненты вектора перемещений $\mathbf{u}(\Lambda)$ уточняются по формулам

$$u_k(\Lambda) = \iiint_{V_R} \rho U_i^k(\mathbf{R}, \Lambda) F_i(\mathbf{R}) dV_R + \iint_{S^+} [U_i^k(\mathbf{R}^+, \Lambda) p_{n,i}^+ - \\ - P_i^k(\mathbf{R}^+, \Lambda) \left(\sum_{l=0}^N w_{(n),i}^{(l)}(\mathbf{r}_x) \right)] d\sigma^+ + \iint_{S^-} [U_i^k(\mathbf{R}^-, \Lambda) p_{n,i}^- - \\ - P_i^k(\mathbf{R}^-, \Lambda) \left(\sum_{l=0}^N (-1)^l w_{(n),i}^{(l)}(\mathbf{r}_x) \right)] d\sigma^- + \\ + \iint_{\Sigma} [U_i^k(\mathbf{R}^c, \Lambda) \left(\sum_{l=0}^N \sigma_{(n),i}^{(l)\Sigma}(\mathbf{r}_x^c) P_l(z/h(\mathbf{r}_x^c)) \right) - \\ - P_i^k(\mathbf{R}^c, \Lambda) \left(\sum_{l=0}^N w_{(n),i}^{(l)}(\mathbf{r}_x^c) P_l(z/h(\mathbf{r}_x^c)) \right)] d\sigma$$

в соответствии с которыми для расчета тангенциальных компонент тензора напряжений принимаются соотношения (для случая тонкой оболочки, в которой пренебрегается изменением ее метрики по толщине)

$$\sigma_{\alpha\beta}(\Lambda) = \sigma_{jk}(\Lambda) (\mathbf{e}_j, \mathbf{r}_\alpha(\mathbf{r}_\eta)) (\mathbf{e}_k, \mathbf{r}_\beta(\mathbf{r}_\eta)) / (a_{\alpha\alpha}(\mathbf{r}_\eta) a_{\beta\beta}(\mathbf{r}_\eta))^{1/2} \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \\ \sigma_{jk}(\Lambda) = \iiint_{V_R} \rho T_{ij}^k(\mathbf{R}, \Lambda) F_i(\mathbf{R}) dV_R + \iint_{S^+} [T_{ij}^k(\mathbf{R}^+, \Lambda) p_{n,i}^+ - \\ - E_{ij}^k(\mathbf{R}^+, \Lambda) \left(\sum_{l=0}^N w_{(n),i}^{(l)}(\mathbf{r}_x) \right)] d\sigma^+ + \iint_{S^-} [T_{ij}^k(\mathbf{R}^-, \Lambda) p_{n,i}^- - \\ - E_{ij}^k(\mathbf{R}^-, \Lambda) \left(\sum_{l=0}^N (-1)^l w_{(n),i}^{(l)}(\mathbf{r}_x) \right)] d\sigma^- + \iint_{\Sigma} [T_{ij}^k(\mathbf{R}^c, \Lambda) \times \\ \times \left(\sum_{l=0}^N \sigma_{(n),i}^{(l)}(\mathbf{r}_x^c) P_l(z/h(\mathbf{r}_x^c)) \right) - E_{ij}^k(\mathbf{R}^c, \Lambda) \left(\sum_{l=0}^N w_{(n),i}^{(l)}(\mathbf{r}_x^c) P_l(z/h(\mathbf{r}_x^c)) \right)] d\sigma \\ T_{ij}^k(\mathbf{R}, \Lambda) = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{kj} \frac{\partial U_i^q}{\partial \Lambda_q} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i^k}{\partial \Lambda_j} + \frac{\partial U_i^j}{\partial \Lambda_k} \right) \right] = \\ = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^3} \left\{ (1-2\nu) [\delta_{ik}(R_j - \Lambda_j) + \delta_{jk}(R_i - \Lambda_i) - \delta_{ij}(R_k - \Lambda_k)] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3(R_i - \Lambda_i)(R_j - \Lambda_j)(R_k - \Lambda_k)}{r^2} \} \\
E_{ij}^k(\mathbf{R}, \Lambda) = & \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{kj} \frac{\partial P_i^q}{\partial \Lambda_q} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P_i^k}{\partial \Lambda_j} + \frac{\partial P_j^k}{\partial \Lambda_i} \right) \right] = \\
= & \frac{E}{8\pi(1-\nu^2)r^3} \left\{ 15 \frac{(R_i - \Lambda_i)(R_q - \Lambda_q)(R_k - \Lambda_k)(R_j - \Lambda_j)}{r^4} - \right. \\
& - (1-2\nu) \left[\delta_{ij} \delta_{kq} + \delta_{ik} \delta_{jq} + \frac{3\delta_{iq}(R_k - \Lambda_k)(R_j - \Lambda_j)}{r^2} \right] + \\
& + (1-4\nu) \delta_{kj} \delta_{iq} - \frac{3\nu}{r^2} [\delta_{ij}(R_q - \Lambda_q)(R_k - \Lambda_k) + \delta_{qj}(R_i - \Lambda_i)(R_k - \Lambda_k) + \\
& + \delta_{ik}(R_q - \Lambda_q)(R_j - \Lambda_j) + \delta_{qk}(R_i - \Lambda_i)(R_j - \Lambda_j)] - \\
& \left. - 3(1-2\nu) \delta_{kj}(R_i - \Lambda_i)(R_q - \Lambda_q) \right\} n_q(\mathbf{R})
\end{aligned}$$

а базисные векторы $\mathbf{r}_\alpha(\mathbf{r}_n)$ и компоненты метрического тензора срединной поверхности $a_{\alpha\alpha}(\mathbf{r}_n)$ определяются известным образом $\mathbf{r}_\alpha(\mathbf{r}_n) = \partial \mathbf{r} / \partial x^\alpha$, $a_{\alpha\alpha}(\mathbf{r}_n) = (\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha)$.

5. В качестве примера аппроксимации интегральных уравнений (4.1) граничными элементами рассмотрим эти уравнения для двухмоментного приближения. Проведем эту процедуру следующим образом.

Разобьем срединную поверхность σ и ее контур C соответственно на треугольные элементы $\Delta\sigma_j$ ($j=1, 2, \dots, N$) и линейные элементы Δl_q ($q=1, 2, \dots, M$). Согласно этому разбиению после восстановления нормальных линий к срединной поверхности в узловых точках лицевые поверхности S^+ , S^- и боковая поверхность Σ разобьются на соответствующие треугольники $\Delta\sigma_j^+$, $\Delta\sigma_j^-$ и четырехугольники $\Delta\Pi_q$. Для каждого элемента $\Delta\sigma_j$ вектор-функции $\mathbf{F}(\mathbf{R})$, \mathbf{p}_n^+ , \mathbf{p}_n^- , $\mathbf{w}_{(n-1)}^{(0)}$, $\mathbf{w}_{(n-1)}^{(1)}$ будем аппроксимировать с помощью линейной интерполяции вида [6, 9]:

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}) = \frac{z}{h(\xi)} N(\xi) [\mathbf{F}]_j, \quad \mathbf{p}_n^\pm = N(\xi) [\mathbf{p}_n^\pm]_j \quad (5.1)$$

$$\mathbf{w}_{(n-1)}^{(m)} = N(\xi) [\mathbf{w}_{(n-1)}^{(m)}]_j, \quad [\mathbf{A}]_j = \|\mathbf{A}_j^{(1)}, \mathbf{A}_j^{(2)}, \mathbf{A}_j^{(3)}\|^T \quad (m=0, 1)$$

где $N(\xi)$ — матрица размером 3×9 , $[\mathbf{A}]_j$ — девятимерный вектор-столбец узловых значений $\mathbf{A}_j^{(q)}$ треугольника $\Delta\sigma_j$. Аппроксимацию вектор-функций $\mathbf{w}_{(n)}^{(m)}(\mathbf{r}_x^c)$, $\sigma_{(n)}^{(m)\Sigma}(\mathbf{r}_x^c)$ на линейном элементе Δl_q осуществим согласно следующей линейной интерполяции

$$\mathbf{w}_{(n)}^{(m)} = [\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)] [\mathbf{w}_{(n)}^{(m)}]_q, \quad \sigma_{(n)}^{(m)\Sigma} = [\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)] [\sigma_{(n)}^{(m)\Sigma}]_q \quad (5.2)$$

$$[\mathbf{A}]_q = \|\mathbf{A}_q^{(1)}, \mathbf{A}_q^{(2)}\|^T$$

Подставив приведенные аппроксимационные формулы (5.1), (5.2) в соотношения (4.1), получим дискретизованные выражения для вычисления вектор-функций в опорных точках с радиус-векторами $\mathbf{r}_{n,i}^{(p)} = 1/3(\mathbf{r}_{n,i}^{(1)} + \mathbf{r}_{n,i}^{(2)} + \mathbf{r}_{n,i}^{(3)})$, $\mathbf{r}_{n,i}^{c(p)} = 1/2(\mathbf{r}_{n,i}^{c(1)} + \mathbf{r}_{n,i}^{c(2)})$ через значения этих функций в уз-

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{w}_{(n)}^{(m)}(\mathbf{r}_{\eta,i}^{(p)}) + \left(\left[\iint_{\Delta\sigma_{\eta^p} \cap \sigma} \left[P^{(m)}(\mathbf{R}^+, \mathbf{r}_{\eta,i}^{(p)}) \sqrt{\frac{g^+}{a}} + P^{(m)}(\mathbf{R}^-, \mathbf{r}_{\eta,i}^{(p)}) \sqrt{\frac{g^-}{a}} \right] d\sigma \right) \times \right. \\
 & \quad \times (\mathbf{w}_{(n)}^{(0)}(\mathbf{r}_{\eta,i}^{(p)}) - \mathbf{w}_{(n-1)}^{(0)}(\mathbf{r}_{\eta,i}^{(p)})) = \sum_{j=1}^N \left\{ \left(\iint_{V_R^j} \rho U^{(m)} \frac{z}{h(\xi)} N(\xi) dV_R \right) [\mathbf{F}]_j + \right. \\
 & \quad + \left(\iint_{\Delta\sigma_j} U^{(m)} N(\xi) \sqrt{\frac{g_j^+}{a_j}} d\sigma \right) [\mathbf{p}_n^+]_j + \left(\iint_{\Delta\sigma_j} U^{(m)} N(\xi) \sqrt{\frac{g_j^-}{a_j}} d\sigma \right) [\mathbf{p}_n^-]_j - \\
 & \quad - \left(\iint_{\Delta\sigma_j} P^{(m)} N(\xi) \sqrt{\frac{g_j^+}{a_j}} d\sigma \right) \left(\sum_{l=0}^1 [\mathbf{w}_{(n-1)}^{(l)}]_j \right) - \left(\iint_{\Delta\sigma_j} P^{(m)} N(\xi) \sqrt{\frac{g_j^-}{a_j}} d\sigma \right) \times \\
 & \quad \times \left(\sum_{l=0}^1 (-1)^l [\mathbf{w}_{(n-1)}^{(l)}]_j \right) \left. \right\} + \sum_{q=1}^M \left\{ \left(\iint_{\Delta\Pi_q} \left[U^{(m)}_{(iq)} [\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)] \left([\sigma_n^{(0)\Sigma}]_q + \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + \frac{z}{h(\xi)} [\sigma_n^{(1)\Sigma}]_q \right) - P^{(m)}_{(iq)} [\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)] \left([\mathbf{w}_{(n)}^{(0)}]_q + \frac{z}{h(\xi)} [\mathbf{w}_{(n)}^{(1)}]_q \right) \right] d\sigma \right\} \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

Дискретный аналог контурных интегральных уравнений (4.1) формируется аналогичным образом. Значения функций $\mathbf{w}_{(n)}^{(m)}(\mathbf{r}_{\eta,i}^{(p)})$, $\mathbf{w}_{(n)}^{(m)}(\mathbf{r}_{\eta,q}^{c(p)})$, $\sigma_{(n)}^{(m)\Sigma}(\mathbf{r}_{\eta,q}^{c(p)})$ в ближайших опорных точках находятся через значения этих функций в узловых точках. Предложенная процедура повторяется требуемое количество раз до выполнения выбранного критерия прекращения итераций. Следует отметить, что для пересчета значений моментов $\sigma_{(n)}^{(m)\Sigma}$ в угловых точках контура C срединной поверхности σ необходимо воспользоваться экстраполированием значений этих моментов исходя из опорных точек, расположенных с соответствующей стороны от угловой точки. При этом значения с разных сторон в этих точках окажутся различными.

Предложенный метод расчета НДС оболочечных элементов предполагает лишь кусочную непрерывность единичной нормали к лицевым и боковой поверхностям оболочки, но не требует априорных ограничений на геометрическую форму срединной поверхности. В этой связи, очевидно, метод пригоден для решения задач статики оболочек с произвольной геометрией лицевых поверхностей (срединной поверхности), а при параметризации этих поверхностей по конечному числу выбранных точек срединной поверхности для обеспечения непрерывности вектора нормали к этим поверхностям достаточно потребовать, чтобы интерполяционные функции принадлежали к классу непрерывно дифференцируемых.

Построенные уравнения двухмоментного приближения на уровне соотношений (3.1) при $N=1$ хотя и соответствуют широко применяемой в механике оболочек уточненной модели С. П. Тимошенко, но по сравнению с нею приводят к более точным результатам, так как после окончания итерационного процесса компоненты вектора перемещений и тангенциальные компоненты тензора напряжений во внутренних точках в рамках предлагаемого подхода вычисляются по неупрощенным формулам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кулаков В. М., Толкачев В. М. Изгиб пластин произвольного очертания // Докл. АН СССР. 1976. Т. 230. № 1. С. 56–59.
2. Верюжский Ю. В. Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики. Киев: Вища шк., 1978. 183 с.
3. Аргюлин Ю. П., Грибов А. П., Толкачев В. М. Расчет пластин со сложным очертанием контура методом граничных элементов // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация исследований. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1987. С. 63–70.
4. Жигалко Ю. П. Фундаментальные решения в теории тонких оболочек вращения // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. Вып. 13. С. 152–159.
5. Победра Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1981. 343 с.
6. Бенерджи П. К., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
7. Паргон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 312 с.
8. Векуа И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 286 с.
9. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. М.: Мир, 1982. 248 с.

Казань

Поступила в редакцию
4.II.1990