

УДК 539.3:534.1

© 1991 г.

Е. М. ЗВЕРЯЕВ

**УСТОЙЧИВОСТЬ НЕИДЕАЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ**

Задача устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии исследована не полностью. Открытым остается вопрос об учете тех или иных членов в уравнениях устойчивости, способах учета начальных неправильностей формы оболочки и возможностях аппроксимации закритической деформации тем или иным количеством членов в выражении для формы прогиба. Эксперименты показывают, что при потере устойчивости происходит переход от докритического безмоментного состояния с прямолинейными образующими к послекритической форме с явно выраженными вмятинами. При этом кривизна в окружном направлении меняет знак. В третьем силовом уравнении равновесия это приводит к тому, что в главной (безмоментной) части главный коэффициент обращается в зависимости от условий закрепления краев в ноль в определенных точках или на определенных образующих, называемых в математической теории точками (линиями) поворота. В окрестности последних можно построить быстро меняющееся решение, соответствующее вмятинам. Неправильности в исходной форме цилиндрической поверхности в настоящей работе учтены с помощью фиктивной поперечной нагрузки. Соответствующие ей прогибы даже при малых неправильностях могут привести к появлению точек утолщения и появления в их окрестности вмятин. Даны оценки всех искомых величин. Расчетные результаты подтверждаются экспериментально.

1. Исходная форма движения или равновесия считается устойчивой, если малые возмущения в системе вызывают малые отклонения от исходной формы [1]. В случае неустойчивости сколь угодно малые возмущения вызывают конечные отклонения системы от ее исходной формы. В задачах устойчивости оболочек такими возмущениями являются возмущения формы оболочки, характеризуемой в уравнениях теории оболочек [2] коэффициентами первой и второй квадратичных форм A_i, R_{ij} . При этом коэффициенты A_i испытывают возмущение, определяемое компонентами тангенциальной деформации, а кривизны — компонентами нетангенциальной деформации [3]. Обычно учитывают только возмущения кривизн, пренебрегая возмущениями коэффициентов A_i . В соответствии со сказанным запишем исходные уравнения упругой устойчивости цилиндрической оболочки в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} - \kappa_1 N_1 + \tau N_2 &= 0 \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} - \left(\frac{1}{R} + \kappa_2 \right) N_2 + \tau N_1 &= 0 \\ \kappa_1 T_1 - 2\tau S + \left(\frac{1}{R} + \kappa_2 \right) T_2 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2} + Z &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial H}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_2}{\partial \alpha_2} + N_2 = 0 \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} - \kappa_1 w + \frac{1}{2A_1^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right)^2 \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} - \left(\frac{1}{R} + \kappa_2 \right) w + \frac{1}{2A_2^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right)^2\end{aligned}\quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \\ \kappa_1 &= \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \frac{u_2}{R} \right), \\ \tau &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \frac{u_2}{R} \right)\end{aligned}\quad (1.4)$$

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) \quad (1, 2), \quad S = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \omega \quad (1.5)$$

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_1 + \nu \kappa_2) \quad (1, 2), \quad H = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \tau$$

В (1.1)–(1.5) использованы обычно принятые в теории оболочек обозначения [2, 5]. Величины R и h есть соответственно радиус средней поверхности оболочки и ее толщина. Символ (1.2) означает, что из равенства, после которого он стоит, следует получить второе' заменой индексов 1 на 2 и 2 на 1. Примем R за единицу измерения длины, EhR за единицу измерения силы и будем, предполагая, что все входящие в (1.1)–(1.5) величины измерены в указанных единицах, обращаться с ними, как с безразмерными, считая h малым параметром.

2. Рассмотрим оболочку длиной L , нагруженную по краям равномерно распределенными усилиями сжатия. Параметры криволинейной системы координат выберем обычным образом:

$$\alpha_1 = \xi, \quad \alpha_2 = \theta, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = R \quad (2.1)$$

где ξ — относительные расстояния по образующей, θ — относительные расстояния по направляющему кругу.

В исходном состоянии будем предполагать как в [3] возможность свободного расширения оболочки в радиальном направлении. Тогда в оболочке будут действовать только усилия $T_1^{(0)} = -p$. Решение системы квазилинейных уравнений (1.1)–(1.5) будем разыскивать, представляя искомые неизвестные в виде суммы исходного напряженного состояния и возмущенного, т. е.

$$Q = Q^{(0)} + Q^{(b)} \quad (2.2)$$

Величину поверхностной нагрузки Z в третьем уравнении равновесия определим как фиктивную поперечную нагрузку

$$Z = -p\kappa_1^{(0)} \quad (2.3)$$

где $\kappa_1^{(0)} = \partial^2 w^{(0)} / \partial \xi^2$ — кривизна формы начальных прогибов (неправильностей).

Предположим, что отклонения начальных прогибов от идеальной средней поверхности соизмеримы с толщиной оболочки h и характеризуются нулевым показателем изменяемости, т. е.

$$\kappa_1^{(0)} \sim h \quad (2.4)$$

На основании результатов [6] для незакрепленной оболочки можно написать

$$Ehw \sim h^{(\mu-1)/2} Z \quad (2.5)$$

где μ есть мера самоуравновешенности нагрузки Z на каждой образующей цилиндра.

Из (2.3)–(2.5) следует, что

$$w \sim h^{(\mu-2)/2} \sigma/E \quad (2.6)$$

где $\sigma = p/h$ — напряжение исходного состояния. Поскольку, например, для стали, бронзы, дюралюминия $\sigma_T/E = 10^{-2} \div 10^{-3}$ (σ_T — предел текучести материала), прогиб w в (2.6) при $\mu=0$ может быть соизмерим с единицей (т. е. с радиусом оболочки). Отсюда следует, что ничтожные неправильности могут привести к тому, что, в частности, в третьем уравнении равновесия в (1.1) величина

$$1/R + \kappa_2 = 1/R + \partial^2 w / \partial \theta^2 \quad (2.7)$$

будет нулем на определенных образующих, т. к. в [6] показано, что перемещение w при $\mu=0, 1, 2$ в первом приближении является константой по ξ .

Пусть нагрузка (2.3) такова, что (2.7) обращается в нуль на некоторых образующих. Положим для определенности $\mu=0$, т. е. неправильности формы таковы, что главный вектор и главный момент нагрузки, действующие на каждую образующую цилиндра не являются малыми величинами. В то же время, нагрузка, действующая на незакрепленный цилиндр, должна быть самоуравновешенной. Следовательно, в нагрузке (2.3), разложенной в ряд Фурье, отсутствуют нулевая и первая гармоники. Примем, что показатель изменчивости неправильностей в окружающем направлении характеризуется величиной q [2] ($0 \leq q \leq 1/4$). Тогда из того, чтобы (2.7) обращалось в нуль, следует

$$w^{(1)} \sim h^{2q} \quad (2.8)$$

Асимптотические свойства остальных неизвестных будут следующими:

$$\begin{aligned} \kappa_1^{(1)} \sim h^{2q}, \quad \tau^{(1)} \sim h^q, \quad \kappa_2^{(1)} \sim h^0, \quad (M_1^{(1)}, M_2^{(1)}, N_1^{(1)}) \sim h^2 Eh \\ (H^{(1)}, N_2^{(1)}) \sim h^{2-4q} Eh, \quad T_1^{(1)} \sim h^{2-4q} Eh, \quad T_2^{(1)} \sim h^{2-2q} Eh, \quad S^{(1)} \sim h^{2-3q} Eh \\ u_1^{(1)} \sim h^{4q}, \quad u_2^{(1)} \sim h^{3q}, \quad (\varepsilon_1^{(1)}, \varepsilon_2^{(1)}) \sim h^{2-4q}, \quad \omega^{(1)} \sim h^{2-3q} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Асимптотика (2.8), (2.9) при $q=1/4$ совпадает с асимптотикой полубезмоментного состояния, а при $q=0$ — с асимптотикой чисто моментного состояния. Цифра (1) означает, что это напряженное состояние отвечает возмущениям, вызванным неправильностями формы. Оставив в уравнениях (1.1)–(1.5), основываясь на (2.8), (2.9), только главные слагаемые, получим следующие приближенные уравнения для состояния (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial S^{(1)}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial S^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial \theta} = 0 \\ \left(\frac{1}{R} + \kappa_2^{(1)} \right) T_2^{(1)} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_2^{(1)}}{\partial \theta} + Z = 0 \\ \frac{1}{R} \frac{\partial M_2^{(1)}}{\partial \theta} + N_2^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial M_1^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \theta} + N_1^{(1)} = 0 \\ j\varepsilon_1^{(1)} = \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \xi}, \quad \frac{1}{R} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial \xi} = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial \theta} - \left(\frac{1}{R} + \kappa_2^{(1)} \right) w^{(1)} + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial w^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 = 0$$

$$\kappa_2^{(1)} = \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial \xi^2}, \quad \tau^{(1)} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial \xi \partial \theta}, \quad \kappa_2^{(1)} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial \theta^2}$$

$$T_1^{(1)} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1^{(1)} + \nu \varepsilon_2^{(1)}), \quad \varepsilon_2^{(1)} + \nu \varepsilon_1^{(1)} = 0, \quad S^{(1)} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \omega^{(1)}$$

$$M_2^{(1)} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \kappa_2^{(1)}, \quad M_1^{(1)} = \nu M_2^{(1)}, \quad H^{(1)} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \tau^{(1)}$$

(Здесь $j=0$ при $q < 1/4$ и $j=1$ при $q=1/4$).

После того, как в оболочке реализовано состояние (2.8), (2.9), т. е. оболочка деформирована статическим образом так, что кривизна (2.7) обратилась на определенных образующих в нуль, в ней на них возможно возникновение второго напряженного состояния, удовлетворяющего следующим уравнениям:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial \theta} - \kappa_1^{(2)} N_1 + \tau^{(2)} N_2 = 0 \quad \frac{\partial S}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_2}{\partial \theta} - \kappa_2^{(2)} N_2 + \tau^{(2)} N_1 = 0$$

$$T_1 \kappa_1^{(2)} - 2\tau^{(2)} S + T_2 \kappa_2^{(2)} + \frac{\partial N_1}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_2}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_2}{\partial \theta} + N_2 = 0, \quad \frac{\partial M_1}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial \theta} + N_1 = 0 \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_1^{(2)} = \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial \xi} - \kappa_1^{(2)} w^{(2)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^{(2)}}{\partial \xi} \right)^2,$$

$$\varepsilon_2^{(2)} = \frac{1}{R} \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial \theta} - \kappa_2^{(2)} w^{(2)} + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial w^{(2)}}{\partial \theta} \right)^2$$

$$\kappa_1^{(2)} = \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial \xi^2}, \quad \kappa_2^{(2)} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w^{(2)}}{\partial \theta} + \frac{u_2^{(2)}}{R} \right), \quad \tau^{(2)} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w^{(2)}}{\partial \theta} + \frac{u_2^{(2)}}{R} \right)$$

$$T_1^{(2)} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1^{(2)} + \nu \varepsilon_2^{(2)}) \quad (1, 2), \quad S^{(2)} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \omega^{(2)}$$

$$M_1^{(2)} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_1^{(2)} + \nu \kappa_2^{(2)}) \quad (1, 2), \quad H^{(2)} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \tau^{(2)}$$

в которых усилия и моменты без цифры (2) и с ней связаны соотношениями:

$$T_1 = T_1^{(0)} + T_1^{(1)} + T_1^{(2)}, \quad Q = Q^{(1)} + Q^{(2)} \quad (2.12)$$

В последнем выражении под символом Q понимаются усилия S , T_2 , N_1 , N_2 и моменты M_1 , H , M_2 .

Обозначения (2.12) указывают на то, что в уравнениях (2.11) учтено преднапряжение, соответствующее сжатию цилиндра усилием $T_1^{(0)} = -p$ и порожденное им состояние из-за неправильностей формы оболочки.

С другой стороны, положив в (1.1) $Z \sim h^a p$, где a — число, с помощью которого будет меняться интенсивность поперечной порожденной неправильностями нагрузки, получим напряженное состояние со следующими асимптотическими свойствами:

$$Z \sim h^a p \quad (2.13)$$

$$T_1^{(1)*} \sim h^{a-2q} p, \quad S^{(1)*} \sim h^{a-q} p, \quad T_2^{(1)*} \sim h^a p$$

$$Eh w^{(1)*} \sim h^{a-2+4q} p, \quad Ehu_2^{(1)*} \sim h^{a-2+5q} p, \quad Ehu_1^{(1)*} \sim h^{a-2+6q} p$$

$$Eh \chi_1^{(1)*} \sim h^{a-2+4q} p, \quad Eh \chi_2^{(1)*} \sim h^{a-2+2q} p, \quad Eh \tau^{(1)*} \sim h^{a-2+3q} p \quad (2.14)$$

$$(Eh \varepsilon_1^{(1)*}, Eh \varepsilon_2^{(1)*}) \sim h^{a-2q} p, \quad Eh \omega^{(1)*} \sim h^{a-q} p, \quad (M_1^{(1)*}, M_2^{(1)*}) \sim h^{a+2q} p$$

$$H_1^{(1)*} \sim h^{a+3q} p, \quad N_1^{(1)*} \sim h^{a+2q} p, \quad N_2^{(1)*} \sim h^{a+q} p$$

Асимптотические свойства искомых величин (2.9) получены исходя из геометрического соображения (2.8), т. е. из того, что в оболочке должно быть такое перемещение w (2.8), при котором кривизна оболочки (2.7) обратилась бы в нуль. Асимптотики (2.14) отвечают нагрузке (2.13). Поскольку предполагается, что нагрузка (2.13) вызывает напряженные состояния (2.8), (2.9) и (2.14) и они, конечно, должны совпадать, надо, чтобы $h^{a-2+4q} p / Eh \sim h^{2q}$. Отсюда следует, что искомая нагрузка имеет следующий порядок:

$$p / Eh \sim h^{2-a-2q} \quad (2.15)$$

В (2.15) и (2.13) величину a имеет смысл менять в пределах от 0 до 1, т. к. при $a > 1$ мы выходим за рамки оценок точности уравнений теории оболочек [3], а при $a < 0$ амплитуды неправильностей будут превышать радиус оболочки, что, конечно, невозможно.

Поскольку неправильности носят случайный характер, рассмотрим некоторые крайние пределы изменения амплитуд неправильностей и изменяемости.

При $a=q=0$ имеем $p/Eh \sim h^2$, случай практически нереальный, т. к. соответствующая оболочка имеет, например, две, три огромных вмятины. (Она настолько деформирована, что вряд ли будет использована в конструкции).

При $a=1/2$ и $q=0$:

$$p/Eh \sim h^{3/2} \quad (2.16)$$

Случай встречается иногда, когда оболочка имеет несколько вмятин с амплитудами, превышающими толщину оболочки.

При $a=1$ и $q=0$:

$$p/Eh \sim h \quad (2.17)$$

Последний выбор показателей определяет практически идеальную оболочку.

В соответствии с принятым обозначением [3, 4] назовем усилие (2.15) верхним критическим усилием. Как это следует из (2.16) и (2.17) имеет место

$$h^{3/2} < p_b / Eh < h \quad (2.18)$$

Пусть $p = p_b(a, q)$ — критическое усилие при некоторых фиксированных значениях a, q . Подставив величины усилий, имеющих асимптотику (2.14), в соответствии с обозначениями (2.12) в уравнения (2.11), получим уравнения для исследования устойчивости, в которых все величины с индексом (1) известны, так как (2.14) и (2.9) совпадают. Асимптоти-

ческие свойства коротковолнового решения, отмеченного индексом (2) и удовлетворяющего уравнениям (2.11), являются следующими (при отброшенных величинах первого состояния):

$$\begin{aligned} w^{(2)} \sim h^b, \quad (T_1^{(2)}, S^{(2)}, T_2^{(2)}) \sim h^{2-2q} Eh, \quad (\varepsilon_1^{(2)}, \omega^{(2)}, \varepsilon_2^{(2)}) \sim h^{2-2q} \\ (\kappa_1^{(2)}, \tau^{(2)}, \kappa_2^{(2)}) \sim h^{b-2q}, \quad (M_1^{(2)}, H^{(2)}, M_2^{(2)}) \sim h^{2+b-2q} Eh \quad (2.19) \\ (N_1^{(2)}, N_2^{(2)}) \sim h^{2+b-3q} Eh, \quad (u_1^{(2)}, u_2^{(2)}) \sim h^{b+q} \end{aligned}$$

При установлении (2.19) считалось, что коротковолновое состояние (2) имеет изменяемость с показателем q в обоих координатных направлениях. Масштабный множитель h^b введен в силу однородности задачи (2.11).

При $b > 2q$ нелинейные слагаемые в уравнениях (2.11) пренебрежимы. Если $b = 2q$, линейные и нелинейные члены в (2.11) при отброшенных величинах первого состояния соизмеримы. В последнем случае уравнения (2.11) для главных членов асимптотических разложений искомых неизвестных имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial S^{(2)}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial S^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_2^{(2)}}{\partial \theta} = 0 \\ T_1^{(2)} \kappa_1^{(2)} - 2\tau^{(2)} S^{(2)} + T_2^{(2)} \kappa_2^{(2)} + \frac{\partial N_1^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_2^{(2)}}{\partial \theta} = 0 \quad (2.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_2^{(2)}}{\partial \theta} + N_2^{(2)} = 0, \quad \frac{\partial M_1^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial H^{(2)}}{\partial \theta} + N_1^{(2)} = 0 \\ \partial u_1^{(2)} / \partial \xi - \kappa_1^{(2)} w^{(2)} + 1/2 (\partial w^{(2)} / \partial \xi)^2 = 0 \\ \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{u}_2^{(2)}}{\partial \theta} - \kappa_2^{(2)} w^{(2)} + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial w^{(2)}}{\partial \theta} \right)^2 = 0 \quad (2.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial w^{(2)}}{\partial \xi} \frac{\partial w^{(2)}}{\partial \theta} = 0 \\ T_1^{(2)} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1^{(2)} + \nu \varepsilon_2^{(2)}) \quad (1, 2), \quad S^{(2)} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \omega^{(2)} \quad (2.22) \\ M_1^{(2)} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_1^{(2)} + \nu \kappa_2^{(2)}) \quad (1, 2), \quad H^{(2)} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \tau^{(2)} \end{aligned}$$

$$\kappa_1^{(2)} = \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial \xi^2}, \quad \kappa_2^{(2)} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial \theta^2}, \quad \tau^{(2)} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial \xi \partial \theta} \quad (2.23)$$

Геометрические уравнения (2.21) являются уравнениями конечных изгибаний. Порядок амплитуды перемещения $w^{(2)}$ при этом есть h^{2q} , т. е. совпадающий с порядком амплитуды перемещения $w^{(1)}$ (2.8), необходимой для обращения в нуль кривизны (2.7). Однако, порядок усилия $T_1^{(2)} \sim h^{2-2q} Eh$ меньше по крайней мере порядка заданного усилия $T_1^{(0)} = -p$. Отсюда следует, что усилие преднапряжения $T_1^{(0)} + T_1^{(1)}$ в (2.12) больше, чем усилие $T_1^{(2)}$, необходимое для потери устойчивости деформированной состоянием 1 оболочки. В силу этого и происходит резкий переход в состояние 2, сопровождающийся в экспериментах хлопком.

Примем, что в (2.13) и (2.14) величины a и q таковы, что $a-2q>0$. Анализ неправильностей показывает, что это условие на практике выполняется всегда. Тогда из (2.14) и (2.19) (при $b=2q$) следует с учетом (2.15), что в (2.11) в третьем уравнении равновесия величины $T_1^{(1)}\kappa_1^{(2)} \sim \sim h^{a-2q}p$, $T_2^{(1)}\kappa_2^{(2)} \sim h^a p$, $S^{(1)}\tau^{(2)} \sim h^{a-q}p$, $(T_1^{(2)}\kappa_1^{(2)}, T_2^{(2)}\kappa_2^{(2)}, S^{(2)}\tau^{(2)}) \sim h^a p$ являются малыми по сравнению с $T_1^{(0)}\kappa_1^{(2)} \sim p$ и могут быть опущены. В этом случае из системы (2.11) выделяется следующая линейная подсистема:

$$\begin{aligned} -p\kappa_1^{(2)} + \frac{\partial N_1^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_2^{(2)}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_2^{(1)}}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_2^{(2)}}{\partial \theta} + N_2^{(2)} &= -\frac{1}{R} \frac{\partial M_2^{(1)}}{\partial \theta} - N_2^{(1)} \\ \frac{\partial M_1^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial H^{(2)}}{\partial \theta} + N_1^{(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} M_1^{(2)} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_1^{(2)} + \nu\kappa_2^{(2)}) \quad (1, 2), & H^{(2)} &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \tau^{(2)} \\ \kappa_1^{(2)} &= \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial \xi^2}, & \kappa_2^{(2)} &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial \theta^2}, & \tau^{(2)} &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial \xi \partial \theta} \end{aligned}$$

являющаяся замкнутой относительно величин состояния 2 и неоднородной в силу входящих в нее величин состояния 1, описываемое уравнениями (2.10). Так как образующие цилиндра по предположению не деформируются, т. е. перемещение w не зависит от ξ , легко убедиться с помощью (2.10), что $N_2^{(1)}$ также не зависит от ξ . Система (2.24) может быть сведена к одному уравнению:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 w^{(2)}}{\partial \xi^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4 w^{(2)}}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 w^{(2)}}{\partial \theta^4} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 w^{(1)}}{\partial \theta^4} \right) + p \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial \xi^2} = 0$$

Произведем подстановку $w^{(1)} = W^{(1)} \cos m\theta$, $w^{(2)} = W^{(2)} \cos n\pi\xi/L \cos m\theta$, где m, n — целые числа.

Умножим уравнение на $\cos n\pi\xi/L$ и проинтегрируем в пределах от $-L/2$ до $L/2$. Отсюда следует формула для критического усилия

$$p_H = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{n^2\pi^2}{L^2} + m^2 \right) / \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

которое в теории упругой устойчивости оболочек [3, 4] принято называть нижним критическим усилием. Асимптотическая оценка нижнего критического напряжения имеет вид:

$$p_H/Eh \sim h^{2-2q} \quad (2.25)$$

В отличие от p_b в (2.15) p_H не зависит от амплитуды неправильностей, но зависит от их изменяемости в окружном направлении.

Из (2.15) и (2.25) также следует $p_H/p_b \sim h^a$, т. е. отношение верхней и нижней критических нагрузок зависит от амплитуды неправильностей.

3. Если оболочка жестко закреплена по краям, образующая цилиндра не имеет возможности смещаться в радиальном направлении. В этом случае наибольшее перемещение $w^{(1)}$, существенно преобразующее форму оболочки, имеет место в середине оболочки. Состояние 1 определим как полубезмоментное со следующей асимптотикой:

$$\begin{aligned}
w^{(1)} &\sim h^{2q}, \quad \kappa_1^{(1)} \sim h^{2l+2q}, \quad \kappa_2^{(2)} \sim h^0, \quad \tau^{(1)} \sim h^{q+l} \\
(M_1^{(1)}, M_2^{(1)}) &\sim h^2 Eh, \quad H^{(1)} \sim h^{2+q+l} Eh, \quad N_1^{(1)} \sim h^{2+l} Eh \\
N_2^{(1)} &\sim h^{2+q} Eh, \quad T_1^{(1)} \sim h^{4q+2l} Eh, \quad u_2^{(1)} \sim h^{3q} \\
S^{(1)} &\sim h^{5q+3l} Eh, \quad T_2^{(1)} \sim h^{6q+4l} Eh, \quad u_1^{(1)} \sim h^{4q+l} \\
(\varepsilon_1^{(1)}, \varepsilon_2^{(1)}) &\sim h^{4q+2l}, \quad \omega^{(1)} \sim h^{5q+3l}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

В соотношениях (3.1) учтена длина оболочки с помощью показателя l ($h^{-l}=L$).

Установленная из геометрических соображений асимптотика (3.1) должна совпадать с асимптотикой, вытекающей из статических соображений; порожденная неправильностями формы фиктивная поперечная нагрузка должна вызвать состояние (3.1). Примем, что интенсивность фиктивной поперечной нагрузки задается выражением (2.13). Тогда асимптотика соответствующего напряженного состояния с учетом длины оболочки имеет вид:

$$\begin{aligned}
T_2^{(1)*} &\sim h^a p, \quad S^{(1)*} \sim h^{a-q-l} p, \quad T_1^{(1)*} \sim h^{a-2q-2l} p \\
Ehw^{(1)*} &\sim h^{a-2+4q} p, \quad Ehu_2^{(1)*} \sim h^{a-2+5q} p \\
Ehu_1^{(1)*} &\sim h^{a-2+6q+l} p, \quad Ehw^{(1)*} \sim h^{a-q-l} p \\
(Eh\varepsilon_1^{(1)*}, Eh\varepsilon_2^{(1)*}) &\sim h^{a-2q-2l} p, \quad Eh\kappa_1^{(1)*} \sim h^{a-2+4q+2l} p \\
Eh\kappa_2^{(1)*} &\sim h^{a-2+2q} p, \quad Eht\tau^{(1)*} \sim h^{a-2+3q+l} p \\
(M_1^{(1)*}, M_2^{(1)*}) &\sim h^{a+2q} p, \quad H^{(1)*} \sim h^{a+3q+l} p \\
N_1^{(1)*} &\sim h^{a+2q+l} p, \quad N_2^{(1)*} \sim h^{a+q} p
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Исходя из условий совпадения асимптотик (3.1) и (3.2), получаем зависимость между порядками нагрузки, амплитуды неправильностей и показателем изменчивости

$$p/Eh \sim h^{2-a-2q} \tag{3.3}$$

совпадающую с (2.15).

Уравнения для определения главных членов асимптотических разложений неизвестных первого состояния с учетом асимптотики (3.1) приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L} \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial S^{(1)}}{\partial \theta} &= 0, \quad \frac{1}{L} \frac{\partial S^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial \theta} = 0 \\
\kappa_1^{(1)} (T_1^{(0)} + T_1^{(1)}) - 2\tau^{(1)} S^{(1)} + \left(\frac{1}{R} + \kappa_2^{(1)} \right) T_2^{(1)} &= -\frac{1}{R} \frac{\partial N_2^{(1)}}{\partial \theta} - Z \\
\frac{1}{R} \frac{\partial M_2^{(1)}}{\partial \theta} + N_2^{(1)} &= 0, \quad \frac{1}{L} \frac{\partial M_1^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \theta} + N_1^{(1)} = 0 \\
\varepsilon_1^{(1)} &= \frac{1}{L} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \xi} - \kappa_1^{(1)} w^{(1)} + \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial w^{(1)}}{\partial \xi} \right)^2
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2^{(1)} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{R} + \kappa_2^{(1)} \right) w^{(1)} + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial w^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 \\ \omega^{(1)} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{1}{L} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{RL} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \xi} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \theta} \\ \kappa_1^{(1)} &= \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial \xi^2}, \quad \kappa_2^{(1)} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial \theta^2}, \quad \tau^{(1)} = \frac{1}{RL} \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial \xi \partial \theta} \\ T_1^{(1)} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1^{(1)} + \nu \varepsilon_2^{(1)}), \quad \varepsilon_2^{(1)} + \nu \varepsilon_1^{(1)} = 0, \quad S^{(1)} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \omega^{(1)} \\ M_2^{(1)} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \kappa_2^{(1)}, \quad M_1^{(1)} = \nu M_2^{(1)}, \quad H^{(1)} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \tau^{(1)} \end{aligned}$$

В уравнениях (3.4), полученных из (1.1)–(1.5) таким же путем как (2.10), в отличие от (2.10), где $A_1=1$, принято $A_1=L$. Третье уравнение равновесия, в левой части которого оставлены все слагаемые, в зависимости от соотношений между показателями a , q , l запишется следующим образом:

$$\kappa_1^{(1)} T_1^{(1)} - 2\tau^{(1)} S^{(1)} + \left(\frac{1}{R} + \kappa_2^{(1)} \right) T_2^{(1)} = -\frac{1}{R} \frac{\partial N_2^{(1)}}{\partial \theta} + Z; \quad 2l+2q > a \quad (3.5)$$

$$\kappa_1^{(1)} T_1^{(1)} - 2\tau^{(1)} S^{(1)} + \left(\frac{1}{R} + \kappa_2^{(1)} \right) T_2^{(1)} = -\frac{1}{R} \frac{\partial N_2^{(1)}}{\partial \theta}; \quad 2l+2q < a \quad (3.6)$$

Если $2l+2q=a$, третье уравнение равновесия имеет такой вид, как оно записано в (3.4). Уравнение (3.5) представляет собой уравнение статического деформирования оболочки под действием поперечной нагрузки Z , интенсивность которой увеличивается по мере уменьшения показателя a . Уравнение (3.6), заменив в (3.4) третье уравнение равновесия, формирует с остальными однородную систему уравнений упругой устойчивости в том случае, когда фиктивная нагрузка от неправильностей мала. Система (3.4) с третьим уравнением равновесия таким, каким оно там написано, описывает деформацию, которую по аналогии с задачей продольно-поперечного изгиба стержня [4] назовем «продольно-поперечной деформацией квазиизгибаний оболочки».

Пример 1. Рассмотрим случай (3.6). Изменяемость напряженного состояния охарактеризуем показателем $q=(1-2l)/4$, величина которого подтверждена ниже. Неравенство в (3.6) тогда имеет вид:

$$1/2+l < a \quad (3.7)$$

Если оболочка не имеет существенных неправильностей, (3.7) выполняется для широкого диапазона длин оболочек. Опустим нелинейные члены в системе (3.4) с замененным третьим уравнением на уравнение (3.6). Полученная таким образом система может быть сведена к одному разрешающему уравнению

$$\frac{1}{L^4} \frac{\partial^4 w^{(1)}}{\partial \xi^4} + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{R^6} \frac{\partial^8 w^{(1)}}{\partial \theta^8} = -\frac{p}{Eh} \frac{1}{R^2 L^2} \frac{\partial^6 w^{(1)}}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} \quad (3.8)$$

Решение (3.8) будем разыскивать, полагая, что оболочка имеет свободно открытые края при $\xi=\pm 0,5l$, условия на которых удовлетворяются решением вида:

$$w^{(1)} = W \cos \xi \cos m\theta \quad (W=\text{const}) \quad (3.9)$$

Подстановка (3.9) в (3.8) дает

$$\frac{p}{Eh} = \frac{R^2 L^2}{m^4} \left(\frac{1}{L^4} + \frac{h^2}{12R^2(1-\nu^2)} \frac{m^8}{R^4} \right)$$

Определив минимальное значение p в зависимости от m , получим формулы для верхней критической нагрузки p_b и соответствующего числа волн по окружности

$$p_b/Eh = [3(1-\nu^2)]^{-1/2} h/R, \quad m = [12(1-\nu^2)]^{1/6} (R/h)^{1/6} (R/L)^{1/2} \quad (3.10)$$

Критическая нагрузка (3.10) совпадает с известной [3, 4], но число волн в окружном направлении имеет порядок $(R/h)^{1/6}$, а не $(R/h)^{1/2}$ и не зависит от длины оболочки.

Пример 2. Рассмотрим систему (3.4) при $2l+2q=a$ и $q=(1-2l)/4$. Такой случай возможен, если оболочка имеет показатель длины $l=1/4$ и показатель амплитуды неправильностей $a=3/4$. Пусть форма неправильностей задается выражением:

$$w^{(0)} = W^{(0)} \cos \xi \cos m\theta \quad (W^{(0)} = \text{const}) \quad (3.11)$$

где m определяется выражением (3.10).

Задачу рассмотрим в линейной постановке, опустив в (3.4) нелинейные члены и сведя получившуюся после этого систему к одному разрешающему уравнению

$$\frac{1}{L^4} \frac{\partial^4 w^{(1)}}{\partial \xi^4} + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{R^6} \frac{\partial^8 w^{(1)}}{\partial \theta^8} = - \frac{p}{Eh} \frac{1}{R^2 L^2} \left(\frac{\partial^6 w^{(1)}}{\partial \xi^2 \partial \theta^4} + \frac{\partial^6 w^{(0)}}{\partial \xi^2 \partial \theta^4} \right) \quad (3.12)$$

Решение уравнения (3.12) при граничных условиях свободного опирания будем искать в виде (3.9). Подстановка (3.9), (3.11) в (3.12) приводит к формуле хорошо известного вида [4]:

$$W = W^{(0)} / (1 - p/p_b) \quad (3.13)$$

т. е. при приближении нагрузки к верхнему критическому значению (3.10) прогиб бистро увеличивается.

Случай (3.5) является редким, т. к. соответствует очень большим по амплитуде вмятинам. Рассмотрение этого случая является почти буквальным повторением анализа предыдущего пункта и поэтому здесь не приводится.

Примем, что в силу тех или иных причин в середине оболочки прогиб $w^{(1)}$ достиг своего значения (3.1) и это привело к обращению (2.7) в нуль. Представляется наиболее вероятным то, что это произошло за счет совместного действия сжимающего усилия p и поперечной изгибающей нагрузки, порожденной неправильностями. На фигуре ($\alpha = \pi/m$) показана часть срединной поверхности оболочки, содержащая точки O_1 и O_2 , в которых кривизна деформированной поверхности (2.7) обратилась в нуль. Прямолинейные до деформации образующие на полосах B_1 и B_2 разошлись, а на полосе B_{12} сошлись, образуя в средней части полосы B_{12} сглаженное ребро. В окрестностях точек O_1 и O_2 в деформированной поверхности возможно существование состояния 2, из которых так же как и для незакрепленной оболочки получаются для главных членов асимптотических разложений искомых неизвестных уравнения (2.24). Решение системы (2.24) в этом случае ищется среди функций, затухающих по мере удаления от точек O_1 , O_2 и их подобных. Асимптотические соотношения (2.18), (2.25) при этом остаются справедливыми. Из (2.25) при $q = (1-2l)/4$ получаем

$$p_n/Eh \sim h^{3/2 + l} \quad (3.14)$$

Таким образом можно дать следующее механическое толкование процесса потери устойчивости цилиндрической оболочки. Верхняя критическая нагрузка — это критическое сжимающее усилие, при котором полоски-балки B_1 , B_2 и им подобные теряют устойчивость под действием сжимающего усилия (3.10). При этом две соседние полоски совершают движение в противоположных направлениях; полоска, движущаяся наружу от оси цилиндра (на фиг. 1 это B_{12}), увеличивает свою кривизну, создавая некоторое подобие ребра, тогда как полоска, движущаяся вовнутрь, уменьшает свою кривизну в среднем сечении оболочки до нуля. В итоге, в средней части оболочки образуется некоторое подобие призмы, предложенной А. В. Погореловым [7] для расчета критической деформации цилиндрической оболочки. В случае неидеальной оболочки в силу (3.13) величина верхней критической нагрузки (3.10) не может быть достигнута. Однако по мере уменьшения амплитуды начальных неправильностей действительная нагрузка потери устойчивости будет приближаться к критической нагрузке (3.10). Нагрузка (3.10) не зависит от длины оболочки, в то время как параметр волнообразования m уменьшается по мере увеличения относительной длины оболочки. Нижняя критическая нагрузка (3.14) с увеличением длины уменьшается.

Предположим, что оболочка имеет такие неправильности, что $p_b = p_n$ и параметр волнообразования m определяется выражением (3.10). Поскольку m уменьшается

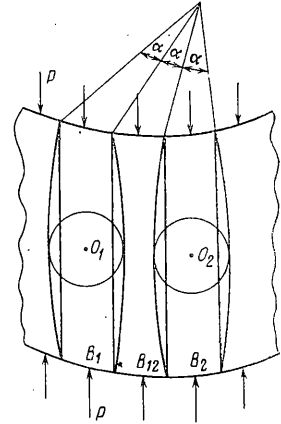
с увеличением длины, т. е. ширина рассматриваемой, имеющей циклически симметричное расположение полоски-балки увеличивается, увеличивается также ширина уплощенной в этой полоске окрестности точки O_1 . Полагая, что в окрестности O_1 возникает квадратная вмятина, имеем из [4], что критическая нагрузка p_n на пластину размером $h^{-q} \times h^{-q}$ оценивается величиной $p_n/Eh \sim h^{2-2q}$, что совпадает с (2.25) и (3.14) при $q = (1-2l)/4$.

Однако на практике потеря устойчивости части оболочки в окрестности точки уплощения происходит не под действием p_n , а под действием намного ее превышающей и, более того, как бы внезапно приложенной нагрузки p_b , т. е. имеет место динамическая потеря устойчивости.

4. В обзоре [8] изложена модифицированная теория Койтера о начальном послекритическом поведении и чувствительности конструкций к несовершенствам, построенная на основе энергетического критерия устойчивости. Расчеты по энергетическим теориям производят, задавая формы прогибов и сравнивая результаты расчетов и экспериментов по критическим нагрузкам. В настоящей работе показано, что при сжатии в осевом направлении идеальной оболочки имеют место две последовательных задачи устойчивости с двумя критическими нагрузками. Энергетический расчет, учитывающий длинноволновое состояние и локальное в окрестности точки поворота (уплощения) дает результат, являющийся по асимптотике среднегеометрическим между верхней и нижней критическими нагрузками [9]. Статический анализ позволил выделить две подзадачи. Первая заключается в расчете критической нагрузки, соответствующей потере устойчивости по длинноволновой форме. При дальнейшем деформировании закритические прогибы таковы, что в некоторых точках кривизна оболочки обращается в ноль и в результате появляется вторая задача о локальной устойчивости в окрестности этих точек. В уравнениях закритической деформации появление точки уплощения отражается в том, что обращается в ноль главный коэффициент (кривизна в окружном направлении) в главной (безмоментной) части. Формальная процедура построения решения в окрестностях таких точек поворота отсутствует.

Пример 3. Примем, что оболочка деформируется сжимающей нагрузкой p и по мере увеличения сжимающего усилия величина амплитуды прогиба W в (3.13) достигает величины h^{2q} , при которой согласно (3.1) в точках O_1, O_2 и им подобных (фигура) кривизна (2.7) обращается в ноль. Пусть оболочка характеризуется следующими параметрами: $h=1/260$, $R=1$, $a=3/4$, $q=1/4$, т. е. оболочка имеет начальную неправильность по форме, соответствующей нижней частоте собственных колебаний с амплитудой $W^{(0)}=4h$. Тогда из формулы (3.13) следует, что точки уплощения появятся при нагрузке $p=^3/4 p_b$. В этот момент в них произойдет локальное прохлопывание. Глубина локальной вмятины в соответствии с (2.19) будет около $h^{1/2}$.

В экспериментах, проведенных В. Л. Красовским, глубины локальных вмятин имеют следующие значения: $(12-13)h$, $(17-18)h$, $(17-19)h$, соответствующие оболочкам с относительными толщинами: $1/150$, $1/260$, $1/360$. Оценки (2.19) для этих же толщин дают глубины вмятины $12h$, $16h$, $19h$, практически совпадающие с экспериментальными данными.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: ОНТИ, Гостехиздат, 1935. 386 с.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
3. Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 359 с.
4. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
5. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.
6. Гольденвейзер А. Л., Зверьяев Е. М. Напряженное состояние незакрепленных оболочек нулевой кривизны // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 2. С. 194-205.
7. Погорелов А. В. Геометрическая теория устойчивости оболочек. М.: Наука, 1966. 296 с.
8. Тонкостенные оболочечные конструкции/Под ред. Э. И. Григолюка. М.: Машиностроение, 1980. 607 с.
9. Зверьяев Е. М. О локальной потере устойчивости цилиндрической оболочкой // Температурные задачи и устойчивость пластин и оболочек. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1988. С. 63-65.

Москва

Поступила в редакцию
21.V.1990