МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1991

УДК 539.375

Р. В. ГОЛЬДШТЕЙН, Ю. В. ЖИТНИКОВ

АНАЛИЗ ПРОЦЕССА СКОЛЬЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТРЕЩИНЫ С УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

Постановка пространственной задачи теории упругости о трещине с учетом сил трения при сложном нагружении дана в [1]. Примеры описания процесса скольжения поверхностей трещин различной геометрии при различных траекториях сложного нагружения рассмотрены в [2, 3].

Показано [1], что из ограничений в области сцепления следует условие несингулярности решения вблизи границы зон скольжения и сцепления. Это свойство решения может быть непосредственно использовано для отыскания неизвестных границ областей скольжения для частных случаев геометрии трещин и траекторий нагружения, когда в явном виде выражаются коэффициенты интенсивности напряжений, в окрестности этих границ в предположении о неопределенности их положения [3, 4].

В предлагаемой работе установлен ряд свойств решения задачи о трещине с взаимодействующими поверхностями. Показано, что угол скольжения в окрестности областей, где давление больше нуля, представляет собой непрерывную функцию параметра нагружения как внутри области скольжения [1], так и при ее расширении в область сцепления. В этом случае удается исходную нелинейную задачу записать в приращениях и получить линейную задачу по приращению угла скольжения. Такая запись позволяет находить пошагово приращение угла скольжения при известном поле линий скольжения и заданных приращениях внешних нагрузок.

Изучен процесс скольжения вблизи областей раскрытия трещины. Показано, что вблизи границ этих областей угол скольжения не является непрерывной функцией параметра нагружения. Установлены свойства изменения угла скольжения при вариации внешних нагрузок.

Рассмотрены примеры, иллюстрирующие использование описанных свойств для выделения областей, где скольжение происходит устойчиво (малым приращениям внешних нагрузок соответствуют малые приращения угла скольжения) и неустойчиво (малым приращениям внешних нагрузок отвечают конечные приращения угла скольжения).

1. Постановка задачи. Рассмотрим трещину-разрез Ω в плоскости $x_3=0$ системы координат $X_1X_2X_3$ (ось X_3 нормальна плоскости трещины) при нагружении вдоль траектории $(\sigma_i^0(x_1, x_2, \theta), \rho\sigma(x_1, x_2, \theta))$, где $\sigma\geqslant 0$ — давление, σ_i^0 — заданное сдвиговое напряжение на трещине $(i=1, 2)$, $\rho=\mathrm{const}$ — коэффициент трения, $\theta\geqslant 0$ — параметр нагружения, $\sigma_i^0(0)=\sigma(0)=0$.

Краевая задача имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} &u_i=u_i^0, \quad V_i=0 \quad (x_1, x_2)\in G_1 \\ &\sigma_i=\sigma_i^0-\rho\sigma V_i/V \quad (x_1, x_2)\in G \\ &u_i=0 \quad (x_1, x_2)\in R^2\backslash\Omega \end{aligned} \tag{1.1}$$

где G — область скольжения, G_1 — область сцепления, $u_i=u_i^- - u_i^+$ — скачок смещения, $V_i=du_i/d\theta$ — скорость скольжения $(i=1, 2)$. Предположим, что заданные нагрузки σ_i^0, σ и скачок смещения u_i распределены непрерывно по координатам x_1, x_2 на плоскости $x_3=0$. Индекс 3 у компонент напряжения опускается $i=1, 2$. В области сцепления должно выполняться следующее ограничение на сдвиговое напряжение

$$|\sigma_i-\sigma_i^0|\leqslant\rho\sigma \tag{1.2}$$

Запишем краевую задачу (1.1) в приращениях δu_i, $\delta\sigma_i$ при заданных $\delta\sigma_i^0$, $\rho\delta\sigma$ в фиксированной точке траектории нагружения. Пусть при заданном θ краевая задача имеет вид (1.1), а при $\theta+\delta\theta$:

$$\begin{gathered} u_i=u_i^0, \quad V_i=0 \quad (x_1,\ x_2)\in G_1(\theta+\delta\theta) \\ \sigma_i=\sigma_i^0+\delta\sigma_i^0-\rho(\sigma+\delta\sigma)V_i(x_1,\ x_2,\ \theta+\delta\theta)/V, \quad (x_1,\ x_2)\in G(\theta+\delta\theta) \\ u_i=0 \quad (x_1,\ x_2)\in R^2\backslash\Omega \end{gathered} \tag{1.3}$$

Для постановки задачи в приращениях вычтем (1.1) из (1.3). Получим

$$\begin{gathered} \delta u_i=0 \quad (x_1,\ x_2)\in G_1(\theta+\delta\theta) \\ \delta\sigma_i=\delta\sigma_i^0-\rho(\sigma+\delta\sigma)V(x_1,\ x_2,\ \theta+\delta\theta)/V+\rho\sigma V_i(x_1,\ x_2,\ \theta)/V, \\ (x_1,\ x_2)\in G(\theta)\cap G(\theta+\delta\theta) \\ \delta\sigma_i=\sigma_i^0-\rho(\sigma+\delta\sigma)V_i(x_1,\ x_2,\ \theta+\delta\theta)/V-\sigma_i(x_1,\ x_2,\ \theta), \\ (x_1,\ x_2)\in G(\theta+\delta\theta)\backslash G(\theta) \\ \delta u_i=0 \quad (x_1,\ x_2)\in R^2\backslash\Omega \end{gathered} \tag{1.4}$$

где σ_i — компоненты сдвиговых нагрузок в области сцепления $G_1(\theta)$.

Краевая задача (1.4) для определения приращений δu_i, $\delta\sigma_i$ удобнее, чем (1.1), так как вне области скольжения приращение смещения равно нулю. Ниже доказан ряд свойств решения краевой задачи (1.4) об изменении угла скольжения, который определяется соотношением $\operatorname{tg}\gamma=V_2/V_1$. В частности, показано, что угол скольжения является непрерывной функцией не только внутри области скольжения [1], но и при ее расширении в область сцепления. Помимо этого показано, что при малых вариациях внешней нагрузки область скольжения изменяется на величину δG, для которой $\operatorname{mes}\delta G\to 0$, при $\delta\theta\to 0$ [1]. Все эти свойства позволят записать краевую задачу (1.4) в виде линейном по приращению $\delta\gamma$ угла скольжения.

2. Свойства сдвиговой задачи. Предположим, что распределения заданных нагрузок $\sigma_i^0(x_1,\ x_2,\ \theta)$, $\sigma(x_1,\ x_2,\ \theta)$ и скачка смещения непрерывны. На основе этих предположений в [1] доказано, что скорость скольжения является непрерывной функцией параметра нагружения θ. Докажем следующее.

Утверждение 1. При вариации внешних нагрузок ($\delta\sigma_i^0$, $\rho\delta\sigma$) область скольжения не может расширяться на конечную по площади величину, т. е. при $[(\delta\sigma_1^0)^2+(\delta\sigma_2^0)^2+(\delta\sigma_3^0)^2]^{1/2}\to 0$, $\operatorname{mes}(\delta G)\to 0$.

Действительно, пусть это не так и при $\delta\theta\to 0$, $\delta G\to\delta G_0$, $\operatorname{mes}(\delta G_0)=\delta$, $s_0\neq 0$. Тогда для краевой задачи (1.4) в приращениях вычислим упругую энергию

$$W_{\delta u_i}=\frac{1}{2}\int\limits_{G(\theta+\delta\theta)}\delta u_i(\sigma_i^0+\delta\sigma_i^0-\rho(\sigma+\delta\sigma)\delta u_i/\delta u-\sigma_i)\,ds\geqslant 0 \tag{2.1}$$

[1] Заметим, что в силу предположения о непрерывности функций σ, σ_i^0 по координатам x_1, x_2, случаи, когда в результате предельного перехода $\delta\theta\to 0$ могли бы получиться вырожденные области $\operatorname{mes}\delta G_1\to 0$ (линия, точки) исключаются. Действительно, появление таких вырожденных зон в качестве участков границ областей скольжения и сцепления означало бы наличие особенностей в распределении функций σ, σ_i^0.

где $\sigma_i(x_1, x_2, \theta)$ сдвиговое напряжение в (1.1). Рассмотрим соотношение (2.1) при $\delta\theta\to 0$. Учтем, что угол скольжения γ в области скольжения G непрерывная функция параметра нагружения θ [1], и представим приращение δu_i, $\delta\sigma_i^0$, $\rho\delta\sigma$ в первом приближении в виде $\delta u_i = V_i(\theta_0)\delta\theta$ (V_i — скорость скольжения), $\delta\sigma_i^0 = (d\sigma_i^0/d\theta)|_{\theta=\theta_0}\delta\theta$, $\rho\delta\sigma = \rho(d\sigma/d\theta)|_{\theta=\theta_0}\delta\theta$.

Выразим, входящие в (2.1) скалярные произведения через модули этих векторов и угол между ними. В силу условий (1.1) разобьем интеграл в (2.1) по областям $G\cup\delta G$ и δG. Теперь (2.1) в главном члене по $\delta\theta$ примет вид

$$W_{\delta u_i} = \frac{1}{2}\int\limits_{G\cup\delta G}\delta u(\delta\tau\cos\gamma_0 - \rho\delta\sigma)\,ds + \frac{1}{2}\int\limits_{\delta G}(|\sigma_i - \sigma_i^0|\cos\gamma' - \rho\sigma)\,\delta u\,ds \tag{2.2}$$

$$\delta\tau = (\delta\sigma_i^0\delta\sigma_i^0)^{1/2}, \quad \cos\gamma_0 = \delta\sigma_i^0\delta u_i/\delta\tau\delta u$$

$$\cos\gamma' = -(\sigma_i - \sigma_i^0)\,\delta u_i/|\sigma_i - \sigma_i^0|\,\delta u$$

В выражении (2.2) записаны главные члены по θ. Так как $\delta u \sim V\delta\theta$, $\delta\tau \sim \delta\theta$, $\rho\delta\sigma \sim \rho\delta\theta$, получим

$$W_{\delta u_i} = A\delta\theta^2 + B\delta\theta \tag{2.3}$$

$$A = \frac{1}{2}\int\limits_{G\cup\delta G_0} V(\theta+0)(\tau'\cos\gamma_0 - \rho\sigma')\,ds$$

$$B = \frac{1}{2}\int\limits_{\delta G_0}(|\sigma_i - \sigma_i^0|\cos\gamma' - \rho\sigma(\theta))\,V(\theta+0)\,ds$$

$$\tau' = (d\sigma_i^0/d\theta\cdot d\sigma_i^0/d\theta)^{1/2}|_{\theta=\theta_0}, \quad \sigma' = d\sigma/d\theta\,(\theta_0)$$

С учетом (1.2) $|\sigma_i - \sigma_i^0| < \rho\sigma$ получим, что $B<0$. Из неравенств $B<0$ и $W_{\delta u_i}>0$ согласно (2.3) следует $A>0$. Тогда при $\delta\theta\to 0$ выражение (2.3), начиная с $\delta\theta < -B/A$, будет меньше нуля, что невозможно, поскольку упругая энергия больше нуля. Следовательно необходимо чтобы $B\to 0$ при $\delta\theta\to 0$. Поскольку подынтегральное выражение в формуле для B берется при $\theta=\theta_0$, то стремление B к нулю при $\delta\theta\to 0$ возможно лишь за счет того, что $\operatorname{mes}\delta G\to 0$, $\delta\theta\to 0$. Утверждение 1 доказано.

Таким образом, при вариации нагрузок приращение области скольжения при ее расширении не может быть на конечную по площади величину при $[(\delta\sigma_1^0)^2 + (\delta\sigma_2^0)^2 + (\rho\delta\sigma)^2]^{1/2}\to 0$.

Проанализируем теперь, возможно ли сужение области скольжения на конечную по площади величину при $\delta\theta\to 0$. В этом случае в выражении для упругой энергии (2.2) второе слагаемое отсутствует и в (2.3) $B=0$, а $W_{\delta u_i}\geqslant 0$. Напишем условие, при котором возможно сужение области на конечную величину. Поскольку при $\delta\theta\to 0$ возникает область сцепления δG, то условие (1.2) в ней для $\theta+\delta\theta$ имеем вид $|\sigma_i^0 + \delta\sigma_i^0 - \sigma_i(\theta+\delta\theta)| \leqslant \rho(\sigma+\delta\sigma)$. В первом приближении при $\delta\theta\to 0$, $\sigma_i(\theta+\delta\theta) \simeq \sigma_i^0 - \rho\sigma V_i(\theta)/V$. Тогда имеем $\delta\tau^2 + 2\rho\delta\tau\sigma\cos\gamma + \rho^2\sigma^2 \leqslant \rho^2(\sigma+\delta\sigma)^2$, откуда получим условие в области сцепления $\delta G_1 = \delta G$ (γ — угол между V_i и $\delta\sigma_i^0$):

$$\delta\tau\cos\gamma \leqslant \rho\delta\sigma \tag{2.4}$$

Таким образом, в каждой точке приращения области сцепления ($\delta G_1 = \delta G$) при $\delta\theta\to 0$ должно выполняться необходимое условие (2.4).

В [1] было показано, что в окрестности границы области скольжения напряжение являются непрерывной функцией координат. Поэтому линии скольжения можно продолжить непрерывным образом в область сцепления, определяя их соотношением $\operatorname{tg}\gamma = -F_2/F_1$, $F_i = \sigma_i - \sigma_i^0$ — компоненты силы трения. Докажем еще одно утверждение об изменении угла γ при возникновении скольжения в области сцепления.

Утверждение 2. При начале процесса скольжения в области сцепления угол скольжения γ изменяется непрерывно в зависимости от параметра нагружения θ. Заметим, что скольжение в области сцепления может возникать либо внутри нее, либо при расширении области скольжения. Рассмотрим оба случая.

Действительно, пусть при $\theta=\theta_0+\delta\theta$, $\theta_0>0$, $\delta\theta\geqslant 0$ в области сцепления G_1 существует точка (x_1^0, x_2^0), где не выполняется условие сцепления (1.2), то есть $|\sigma_i(\theta)-\sigma_i^0(\theta)|>\rho\sigma(\theta)$. По непрерывности нагрузок существует около этой точки ε — окрестность, где $|\sigma_i-\sigma_i^0|\geqslant\rho\sigma$, $(x_1, x_2)\in\varepsilon$, $(x_1^0, x_2^0)\in\varepsilon$. Так как при $\theta=\theta_0$ выполняются условия сцепления, то $|\sigma_i(\theta_0)-\sigma_i^0(\theta_0)|\leqslant\rho\sigma(\theta_0)$, $(x_1, x_2)\in\varepsilon$.

Предположим, что угол γ изменился на конечную величину, т. е. существует подобласть $D_\varepsilon\subset\varepsilon$, где $\lim_{\delta\theta\to 0}\delta\gamma(x_1, x_2, \theta)=\delta\gamma_0(x_1, x_2, \theta_0+0)$, $(x_1, x_2)\in D_\varepsilon$.

Существование окрестности D_ε точки (x_1, x_2), связано с тем, что если изменяется скачком угол скольжения, то также скачком меняется и сила трения, а в силу непрерывности по (x_1, x_2) распределения напряжений это должно произойти в некоторой окрестности.

Запишем упругую энергию (2.1) для задачи в приращениях (1.4), имея в виду, что в рассматриваемом случае σ_i — сдвиговое напряжение в области сцепления при $\theta=\theta_0$, удовлетворяющее ограничению (1.2). После преобразований подобных, сделанных при переходе от (2.1) к (2.2) получим

$$W_{\delta u_i}=\frac{1}{2}\int_{D_\varepsilon}\delta u(|\sigma_i^0-\sigma_i|\cos\delta\gamma+\delta\tau\cos\gamma-\rho(\sigma+\delta\sigma))\,ds \tag{2.5}$$

$$\cos\delta\gamma=(\sigma_i^0-\sigma_i)\,\delta u_i/|\sigma_i^0-\sigma_i|\delta u,\quad F_i=\sigma_i^0-\sigma_i$$

компоненты силы трения в области сцепления. Пусть теперь $\delta\theta\to 0$, а по предположению $\delta\gamma\to\delta\gamma_0$, $(x_1, x_2)\in D_\varepsilon$. Последнее означает, что сила трения испытывает скачок и соответственно $\delta u_i\to\delta u_i^0\neq 0$ $(x_1, x_2)\in D_\varepsilon$ — конечное приращение скачка смещения. Тогда учитывая, что $\delta\sigma_i^0\to 0$, $\rho\delta\sigma\to 0$, и $|\sigma_i^0(x_1, x_2, \theta)-\sigma_i(x_1, x_2, \theta)|\leqslant\rho\sigma$, $(x_1, x_2)\in D_\varepsilon$, получим, что подынтегральное выражение (2.5) в главном члене при $\delta\theta\to 0$ становится меньше нуля, и, следовательно, $W_{\delta u_i}<0$, что невозможно. Это означает, что $\delta\gamma$ должно стремиться к нулю, т. е. $\lim_{\delta\theta\to 0}\delta\gamma(x_1, x_2, \theta)=0$, $(x_1, x_2)\in\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь случай, когда происходит расширение области скольжения G. Заметим, что при этом угол скольжения также изменяется непрерывно в области δG (что он изменяется непрерывно внутри области G доказано в [1]).

Действительно, если бы это было не так, то при стягивании $\delta G\to\phi(G(\theta+\delta\theta)\to G(\theta))$, $\delta\theta\to 0$ скачок направления γ возникал бы на границе области скольжения G.

С другой стороны, напомним, что распределение напряжений, а следовательно и смещений, изначально предполагается непрерывным по координатам x_1, x_2. Поэтому скачок в направлении γ на некоторой части границы G означал бы по непрерывности (по координатам x_1, x_2) наличие скачка и во внутренних точках области скольжения G, прилежащей к этому участку границы G, что невозможно в силу доказанной в [1] непрерывности угла скольжения γ внутри G. Следовательно, угол изменяется непрерывно в функции θ и при расширении области скольжения.

Таким образом, установлено, что при изменении внешних нагрузок угол скольжения γ и область скольжения в случае ее расширения изменяются непрерывно. Это позволяет записать краевую задачу (1.4) в приращениях линейных по $\delta\gamma$.

Запишем силу трения при $\theta=\theta_0$, $F_i(x_1, x_2, \theta_0)=-\rho\sigma(\cos\gamma, \sin\gamma)$, а при $\theta_0+\delta\theta$, $F_i(x_1, x_2, \theta_0+\delta\theta)=-\rho(\sigma+\delta\sigma)(\cos(\gamma+\delta\gamma), \sin(\gamma+\delta\gamma))$. Непрерывность напряжения по координатам x_1, x_2 в окрестности области скольжения G позволяет записать при $\theta=\theta_0$. $\sigma_i=\sigma_i^0-\rho\sigma V_i/V+\Delta F_i$, $\Delta F_i=A_i x^{1/2}$, $0\leqslant x\leqslant\delta L$ (локальная система координат XYZ [1], ось X — направлена по нормали к границе G в плоскости $x_3=0$). Подставляя эти выражения в (1.4) и оставляя главные члены, линейные по приращению $\delta\gamma$, получим

$$\delta u_i=0,\quad (x_1, x_2)\in R^2\backslash G(\theta+\delta\theta) \tag{2.6}$$

$$\delta\sigma_1=\delta\sigma_1^0+\rho\sigma\sin\gamma\delta\gamma-\rho\delta\sigma\cos\gamma+\Delta F_1,\quad (x_1, x_2)\in G(\theta+\delta\theta)$$

$$\delta\sigma_2=\delta\sigma_2^0-\rho\sigma\cos\gamma\delta\gamma-\rho\delta\sigma\sin\gamma+\Delta F_2$$

Постановка задачи (2.6) замечательна тем, что эта задача линейна по изменению угла $\delta\gamma$. Приращения $\delta\gamma$ и δG неизвестные, которые должны быть найдены в ходе решения задачи. Запишем условие, определяющее процесс скольжения: $\delta u_2/\delta u_1=\mathrm{tg}(\gamma+\delta\gamma)=\mathrm{tg}\,\gamma+\delta\gamma/\cos^2\gamma$. В нулевом приближении по $\delta\gamma$:

$$\delta u_2/\delta u_1=\mathrm{tg}\,\gamma \tag{2.7}$$

Линеаризованные по $\delta\gamma$ краевые условия (2.6) и условие скольжения (2.7) позволяют получить уравнение для определения $\delta\gamma$, если известен оператор A_i, устанавливающий связь между δu_i и $\delta\sigma_i$ по заданной геометрии области: $\delta u_i=A_{ij}[\delta\sigma_j]$. Подставляя это выражение в (2.7), получим уравнение для определения $\delta\gamma$. В частностном случае эллиптической трещины оператор известен [2] и равен в главных осях $A_{ij}=B_i\delta_{ij}$, а уравнение (2.7) для определения $\delta\gamma$ после подстановки в него этого выражения совпадает с полученным в [2].

Рассмотрим случай, когда область скольжения G не расширяется. Тогда в (2.6) $\Delta F_1=\Delta F_2=0$. Пусть известен оператор A_{ij}, $\delta u_i=A_{ij}[\delta\sigma_j]$. При фиксированной области имеем $V_i=A_{ij}[d\sigma_j/d\theta]$. Тогда, подставляя в (2.7), с учетом (2.6), $d\sigma_1/d\theta=d\sigma_1^0/d\theta+\rho\sigma\sin\gamma d\gamma/d\theta-\rho d\sigma/d\theta\cos\gamma$, $d\sigma_2/d\theta=$ $=d\sigma_2^0/d\theta-\rho\sigma\cos\gamma d\gamma/d\theta-\rho d\sigma/d\theta\sin\gamma$, получим интегро-дифференциальное уравнение для определения $d\gamma/d\theta$:

$$A_{2j}[d\sigma_j/d\theta]=\mathrm{tg}\,\gamma A_{1j}[d\sigma_j/d\theta] \tag{2.8}$$

Поскольку уравнение (2.8) существенно нелинейно, то краевую задачу (2.6) лучше решать в приращениях. Для этого по (2.6) и известным $\delta\sigma_i^0$, $\rho\delta\sigma$, γ определим $\delta\gamma$. Затем для $\gamma+\delta\gamma$ и для следующего приращения $\rho\delta\sigma$ снова определяем $\delta\gamma$ и так далее. Таким образом найдем изменение угла скольжения при нагружении вдоль траектории $(\sigma_i^0(x_1, x_2, \theta)$, $\rho\sigma(x_1, x_2, \theta))$.

Рассмотрим теперь вопрос о принципе суперпозиции решений для линеаризованной краевой задачи (2.6).

Утверждение 3. Пусть при $\theta=\theta_0$ известно распределение скоростей скольжения $V_i(x_1, x_2, \theta_0)$ на фиксированной области скольжения $G(\theta_0)$, скачков смещения $u_i(x_1, x_2, \theta_0)$ на трещине Ω и приращения внешней нагрузки $\delta\sigma_i^{(1)}$, $\rho\delta\sigma^{(1)}$, $\delta\sigma_i^{(2)}$, $\rho\delta\sigma^{(2)}$, вызывающие приращения скачков смещения $\delta u_i^{(1)}$, $\delta u_i^{(2)}$ на области $G(\theta_0)$. Тогда скачок смещения δu_i, соответствующий нагрузке $\delta\sigma_i^0=\delta\sigma_i^{0(1)}+\delta\sigma_i^{0(2)}$ и $\rho\delta\sigma=\rho(\delta\sigma^{(1)}+\delta\sigma^{(2)})$, равен сумме $\delta u_i=\delta u_i^{(1)}+\delta u_i^{(2)}$, $(x_1, x_2)\in G(\theta_0)$, а изменение угла скольжения $\delta\gamma=$ $=\delta\gamma^{(1)}+\delta\gamma^{(2)}$.

Для доказательства этого утверждения непосредственной подстановкой в (2.6) и (2.7) убедимся, что им удовлетворяют суммы $\delta\sigma_i^{(1)}+\delta\sigma_i^{(2)}$,

$\delta\gamma^{(1)}+\delta\gamma^{(2)}$ и $\delta u_i^{(1)}+\delta u_i^{(2)}$. Подставим в первое уравнение (2.6) $\delta\sigma_1=\delta\sigma_i^{0(1)}+\delta\sigma_1^{0(2)}-\rho\sigma\sin\gamma(\delta\gamma^{(1)}+\delta\gamma^{(2)})-\rho(\delta\sigma^{(1)}+\delta\sigma^{(2)})=\delta\sigma_1^{(1)}+\delta\sigma_1^{(2)}$. Аналогично проверяется второе уравнение (2.6), что $\delta\sigma_2=\delta\sigma_2^{(1)}+\delta\sigma_2^{(2)}$. Проверим теперь условие скольжения (2.6). Так как $\delta u_2^{(1)}=\operatorname{tg}\gamma(\theta_0)\delta u_1^{(2)}$ и $\delta u_2^{(2)}=\operatorname{tg}\gamma(\theta_0)\delta u_1^{(2)}$, то $\delta u_2=\delta u_2^{(1)}+\delta u_2^{(2)}=\operatorname{tg}\gamma(\theta_0)[\delta u_1^{(1)}+\delta u_1^{(2)}]=$ $=\operatorname{tg}\gamma(\theta_0)\delta u_1$, т. е. $\delta u_2/\delta u_1=\operatorname{tg}\gamma(\theta_0)$.

Таким образом на фиксированной области скольжения $G(\theta_0)$ выполняется принцип суперпозиции решений. Утверждение 3 доказано.

Выше было показано, что малым приращением внешней нагрузки соответствовали малые приращения углов скольжения γ, как внутри области скольжения G [1], так и при ее расширении в область сцепления (утверждение 2). При этом в процессе доказательства непрерывности угла скольжения γ внутри области скольжения, предполагалось, что на ней отсутствуют участки раскрытия трещин (свободной поверхности), где давление равно нулю $\sigma(x_1, x_2, \theta)\equiv 0$. Действительно, при доказательстве непрерывности угла скольжения [1], было записано выражение упругой энергии [1] задачи (1.4) в приращениях. Переписывая выражение (2.1) через угол скольжения γ, имеем

$$W_{\delta u_i}=\frac{1}{2}\int\limits_{G(\theta+\delta\theta)}\delta U(\delta\tau\cos\gamma'-\rho\sigma(1-\cos\delta\gamma)-\rho\delta\sigma)\,ds$$

$$\cos\gamma'=\delta\sigma_i\delta u_i/\delta\tau\delta u,\quad \delta\tau=(\delta\sigma_i^0\delta\sigma_i^0)^{1/2}$$

$$\cos\delta\gamma=-F_i\delta u_i/\rho\sigma\delta u,\quad \delta u=(\delta u_i\delta u_i)^{1/2}$$

$$F_i(x_1, x_2, \theta)=-\rho\sigma(\cos\gamma, \sin\gamma)$$

Тогда, если существует точка $(x_1, x_2)\in G$ (а по предположенной непрерывности и ее ε — окрестность), где $\lim\delta\gamma=\delta\gamma_0$ при $\delta\theta\to 0$ и $\sigma(x_1, x_2, \theta)\neq 0$, $(x_1, x_2)\in\varepsilon$, то это выражение для упругой энергии в главном члене линейном по $\delta\theta$ отрицательно, т. е.

$$W_{\delta u_i}=-\frac{1}{2}\int\limits_{\varepsilon}\rho\sigma(1-\cos\delta\gamma_0)\delta u\,ds$$

здесь учтено, что $\delta\sigma_i^0\to 0$, $\delta\tau\to 0$, $\delta\sigma\to 0$ при $\delta\theta\to 0$. Отсюда следует, что необходимо, чтобы $\delta\gamma_0=0$, то есть $\lim\delta\gamma=0$ при $\delta\theta\to 0$ для любой точки $(x_1, x_2)\in G$, где $\sigma(x_1, x_2, \theta)\neq 0$. В случае же $\sigma(x_1^0, x_2^0, \theta)\equiv 0$, вообще говоря, $\delta\gamma$ может и не стремиться к нулю, а иметь конечное приращение $\lim\delta\gamma(x_1^0, x_2^0, \theta+\delta\theta)=\delta\gamma^0(x_1^0, x_2^0, \theta)$ при $\delta\theta\to 0$.

Таким образом, в точке (x_1^0, x_2^0) может не выполняться требование непрерывности угла скольжения. Этот случай рассмотрен в утверждении 4.

Утверждение 4. Если $\delta\tau=(\delta\sigma_i^0\delta\sigma_i^0)^{1/2}$ в точке (x_1^0, x_2^0) такой, что $\sigma(x_1^0, x_2^0, \theta)\equiv 0$, то всегда на трещине существует область скольжения $G_{\delta\tau}$, содержащая эту точку. При $\delta\tau\to 0$ область $G_{\delta\tau}$ стягивается к точке (x_1^0, x_2^0). Направление скольжения в точке (x_1^0, x_2^0) может иметь конечное приращение $\lim\delta\gamma(x_1^0, x_2^0, \theta)=\delta\gamma^0\neq 0$, $\delta\theta\to 0$ (т. е. скорость скольжения не является непрерывной функцией параметра θ).

Покажем сначала, что в точке (x_1^0, x_2^0) при любом $\delta\tau>0$ возникает скольжение. Действительно, возьмем достаточно малую круговую область радиуса ε с центром в точке (x_1^0, x_2^0). Тогда в первом приближении по ε, $\delta\sigma_i=\delta\sigma_i^0=\mathrm{const}$, а $\sigma\equiv 0$ при $(x_1, x_2)\in\varepsilon$ и следовательно в ε — окрестности не может быть выполнено условие сцепления. Следовательно, в окрестности (x_1^0, x_2^0) всегда должно быть скольжение при $\delta\tau>0$.

Докажем теперь, что если $\lim\delta\gamma(x_1, x_2, \theta)=\delta\gamma^0(x_1, x_2, \theta^0)$, $\theta\to\theta^0+0$, $(x_1, x_2)\in G_{\delta\tau}$, то с необходимостью $G_{\delta\tau}\to(x_1^0, x_2^0)$, $\theta\to\theta^0+\theta$. Для этого рассмотрим задачу в приращениях (1.4) и пусть $G_{\delta\tau}\to G_{\delta\tau}$, $\delta\theta\to 0$. Тогда часть упругой энергии, представляемой интегралом по $G_{\delta\tau}$, содержащей (x_1^0, x_2^0), имеет вид

$$W_{\delta\tau}=\frac{1}{2}\int\limits_{G_{\delta\tau}}\delta u(\delta\tau\cos\gamma'-\sigma(1-\cos\delta\gamma)-\rho\delta\sigma)ds>0 \tag{2.9}$$

$$\cos\gamma'=\delta\sigma_i^0\delta u_i/\delta u\delta\tau$$

Заметим, что для положительности этого интеграла необходимо чтобы γ' удовлетворяло неравенством $0\leqslant\gamma'\leqslant\pi/2$ в случае $\delta\sigma>0$, т. е. $\delta\sigma_i^0\delta u_i>0$. Это означает, что вектор проскальзывания всегда направлен в сторону вектора приращения сдвиговой нагрузки $\delta\sigma_i^0$ и что при изменении направления сдвиговой нагрузки на конечную величину и направление скольжения (определяемое $\delta\gamma$) также изменяется на конечную величину. Если $G_{\delta\tau}\to G_{\delta\tau}^0$, то (2.9) в главном члене

$$W_{\delta\tau}\simeq-\frac{1}{2}\int\limits_{G_{\tau\delta}}\delta u\sigma(1-\cos\delta\gamma^0)ds<0, \qquad \theta\to\theta_0$$

что невозможно. Следовательно, $\operatorname{mes} G_{\delta\tau}\to 0$ при $\delta\tau\to 0$, т. е. $G_{\delta\tau}\to(x_1^0, x_2^0)$. При этом не возникает скачка в силе трения за счет изменения угла скольжения, т. к. в этой точке $\sigma(x_1^0, x_2^0, \theta)\equiv 0$.

Таким образом, в точке, где $\sigma(x_1^0, x_2^0, \theta)\equiv 0$, скольжение возникает всегда и направлено в сторону приращения сдвиговой нагрузки, а в случае, если приращение конечно при $\delta\tau>0$ в области $G_{\delta\tau}$, то необходимо $G_{\delta\tau}\to\to(x_1^0, x_2^0)$ при $\delta\tau\to 0$.

Аналогичное утверждение можно доказать и в случае, если $\sigma\equiv 0$ не только в одной точке (x_1^0, x_2^0), а имеется область раскрытия трещины (свободной поверхности) D, $(x_1, x_2)\in D$, $\sigma(x_1, x_2, \theta)\equiv 0$.

Утверждение 5. Если $\delta\tau>0$ хотя бы в одной точке $(x_1^0, x_2^0)\in D$, то всегда на трещине существует область подвижки G, содержащая D, $G\supset D$ и направление скольжения может иметь конечное приращение. В этом случае область скольжения $G_{\delta\tau}$, содержит область D, $D\subset G_{\delta\tau}$ и $\delta\tau\to 0$, $G_{\delta\tau}$ стягивается к области D. Доказательство утверждения 5 аналогично доказательству утверждения 4.

Анализ, проведенный выше, позволяет сделать следующие выводы о возможных режимах скольжения в области контакта поверхности трещины. В области скольжения, где отсутствуют подобласти свободной поверхности — $\sigma=0$, угол скольжения изменяется непрерывно, скорость скольжения непрерывная функция параметра θ и краевая задача допускает линеаризацию. Последняя, в свою очередь дает возможность по заданной геометрии скольжения рассчитывать приращение угла скольжения $\delta\gamma$. Области скольжения, где имеют место малые возмущения угла скольжения $\delta\gamma$ назовем областями устойчивого скольжения.

В окрестности областей «свободной» поверхности могут возникать области конечного приращения угла скольжения γ, где задача не допускает линеаризацию. Эти области назовем областями неустойчивого скольжения, где задача сильно нелинейна и необходимы для ее решения специальные методы.

3. Примеры расчета. Выше показано, что область скольжения поверхностей трещины может быть двух типов: область, с малым изменением угла скольжения при вариации внешних нагрузок. Ниже будут рассмотрены примеры процессов скольжения в этих двух характерных случаях, получены уравнения, описывающие изменение угла скольжения при нагружении. В качестве примера рассмотрим в системе координат $X_1X_2X_3$ разрез, расположенный в плоскости $x_3=0$, $0\leqslant x_1\leqslant L$ под действием сжимающих $\sigma=\sigma_0(\theta)+\alpha X_1$ и сдвиговых $\sigma_i=\sigma_i(\theta)>0$ нагрузок. В этом случае оператор, связывающий скачок смещений и напряжения, известен [5].

Пример 1. Рассмотрим траекторию нагружения: сначала сжатие до величины $\sigma=\sigma_0+\alpha x_1$, а затем сдвиг от $\sigma_i^0=0$ до $\sigma_i=\sigma_i^0(\theta)$. Определим асимптотику приращения скачка смещения при переходе из состояния сцепления в состояние скольжения.

В п. 2 введены линии «скольжения» в области сцепления соотношением $\operatorname{tg}\gamma=-F_2/F_1$ и показано, что угол скольжения γ изменяется непрерывно при переходе из состояния сцепления в состояние скольжения. Если $F_2/F_1=-\operatorname{tg}\gamma$, то в состоянии сцепления $\gamma=\varphi$, а сила трения $F_i=-\sigma_i^0$. Тогда в состоянии сцепления на разрезе $\sigma_i=\sigma_i^0+F_i$, а при скольжении $\sigma_i+\delta\sigma_i=\sigma_i^0+\delta\sigma_i^0-\rho(\sigma+\delta\sigma)(\cos(\varphi+\delta\gamma),\ \sin(\varphi+\delta\gamma))$. Запишем краевую задачу для приращения напряжения

$$\begin{gathered}\delta\sigma_i(F_i=-\rho\sigma(\cos\varphi,\ \sin\varphi))\\ \delta\sigma_1=\sigma_1^0+\delta\sigma_1^0+\rho\sigma\sin\varphi\delta\gamma-\rho(\sigma+\delta\sigma)\cos\varphi,\ x_1\in G(\theta+\delta\theta)\\ \delta\sigma_2=\sigma_2^0+\delta\sigma_2^0-\rho\sigma\cos\varphi\delta\gamma-\rho(\sigma+\delta\sigma)\sin\varphi\end{gathered}\tag{3.1}$$

Условия скольжения имеют вид (2.7) с $\gamma=\varphi$. В случае разреза при произвольном давлении $\sigma(x_1,\ \theta)$ и $\varphi=\mathrm{const}$ имеем связь между производной скачка смещения по x_1, и напряжениями, а также условия скольжения

$$\begin{gathered}-\frac{1}{\pi}\frac{\mu}{2(1-\nu)}\int\limits_G\frac{\delta u_1'\,dt}{t-x_1}=\sigma_1^0+\delta\sigma_1^0+\rho\sigma\sin\varphi\delta\gamma-\rho(\sigma+\delta\sigma)\cos\varphi,\qquad x_1\in G\\ -\frac{1}{\pi}\frac{\mu}{2}\int\limits_G\frac{\delta u_2'\,dt}{t-x_1}=\sigma_2^0+\delta\sigma_2^0-\rho\sigma\cos\varphi\delta\gamma-\rho(\sigma+\delta\sigma)\sin\varphi,\qquad x_1\in G\end{gathered}\tag{3.2}$$

$$\delta u_2'=\operatorname{tg}\varphi\delta u_1',\ \delta u_i'=\partial\delta u_i/\partial x_1,\ \varphi=\mathrm{const}\tag{3.3}$$

Из (3.2) определим $\delta\gamma$. Для этого умножим первое уравнение на $f\sin\varphi\,(f=1-\nu)$, а второе на $-\cos\varphi$ и сложим. В силу (3.3) интегральные операторы взаимно уничтожаются и для γ получим

$$\delta\gamma=\frac{\cos\varphi\sin\varphi(1-f)\,(\tau+\delta\tau-\rho(\sigma+\delta\sigma))}{(\cos^2\varphi+f\sin^2\varphi)\rho\sigma(x_1,\theta)}\tag{3.4}$$

где $\delta\sigma_i=\delta\tau(\cos\varphi,\ \sin\varphi)$. После подстановки (3.4) в первое уравнение (3.2), имеем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_G\frac{\delta u_1'\,dt}{t-x_1}=(\tau+\delta\tau-\rho(\sigma+\delta\sigma))\frac{\cos\varphi}{\cos^2\varphi+f\sin^2\varphi}\left(\frac{4f}{\mu}\right)\tag{3.5}$$

В случае, когда область скольжения занимает только одну зону (для нагрузки $\sigma=\sigma_0+\alpha x_1$, $\sigma_0>0$ это $0\leqslant x_1\leqslant l$), решаем сингулярное уравнение (3.5) [5] и с учетом требования не сингулярности решения на границы скольжения [1] получим

$$\delta\gamma(x_1,\theta)=\frac{\cos\varphi\sin\varphi(\delta\tau-\rho\alpha x_1)\,(1-f)}{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi f)\rho\sigma(x_1)}\tag{3.6}$$

$$\delta u_1'=\frac{\cos\varphi}{\cos^2\varphi+f\sin^2\varphi}\frac{2f}{\mu}\frac{\rho\alpha(l/4-x_1)\,(l-x_1)^{1/2}}{(x_1)^{1/2}}$$

$$\delta u_2'=\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi+f\sin^2\varphi}\frac{2f}{\mu}\frac{\rho\alpha(l/4-x_1)\,(l-x_1)^{1/2}}{\sqrt{x_1}},\qquad l(\theta)=\frac{4\delta\tau}{3\rho\alpha}$$

В (3.6) учтено, что $\tau=\rho\sigma_0$, $\delta\sigma=0$.

Выражения (3.4), (3.6) определяют приращение скачка смещения и угла скольжения. В итоге получаем новое поле скоростей скольжения $\gamma=$

$=\varphi+\delta\gamma$ и напряжений $\sigma_i(\theta+\delta\theta)=\sigma_i(\theta)+\delta\sigma_i$. Повторяя описанную процедуру, можно сделать очередной шаг вдоль траекторий и найти соответствующие ему δu_i и $\delta\gamma$.

Пример 2. Рассмотрим еще один пример траектории нагружения: сжатие $\sigma=\alpha x_1$, а затем сдвиговое нагружение до величины $\sigma_1^0=\tau_1$. Потом σ_1^0 уменьшается. Проанализируем процесс скольжения вблизи точек $\sigma_1^0=\tau_1$, $d\sigma_1^0/d\theta<0$.

На первом участке траектории нагружения по заданным напряжениям $\sigma_1=\sigma_1^0-\rho\alpha x_1$, $0\leqslant x_1\leqslant l\leqslant L$ определим смещения, а по условию несингулярности неизвестную границу l. Затем уменьшим σ_1^0 на $\delta\sigma_1^0$. Условие монотонности скольжения [1] не выполняется и поверхности разреза должны перейти в состояние сцепления. Но согласно утверждению 4 вблизи точки $x_1=0$, где $\sigma=0$, будет область скольжения $l(\theta)$ и скорость скольжения будет направлена в сторону $\delta\sigma_1^0$, т. е. $\gamma=\pi$. Для приращения $\delta\sigma_1$ имеем

$$\delta\sigma_1=\delta\sigma_1^0+2\rho\alpha x_1,\ \delta\sigma_1^0<0,\ 0\leqslant x_1\leqslant l \tag{3.7}$$

Определяем по напряжениям (3.7) приращение смещения δu_1 из условия несингулярности границу скольжения l:

$$\delta u_1'=-\frac{4f}{\mu}\frac{\rho\alpha(l/4-x_1)(l-x_1)^{1/2}}{(x_1)^{1/2}}$$
$$l=2\delta\tau/(3\rho\alpha),\quad \delta\tau=|\delta\sigma_1^0| \tag{3.8}$$

Из (3.8) видно, что $l\to0$ при $\delta\sigma_1^0\to0$ в соответствии с утверждением 4. Область $0\leqslant x_1\leqslant l$ соответствует конечным приращениям угла скольжения γ (область неустойчивости скольжения).

Рассмотрим теперь случай произвольного сдвигового погружения $\delta\sigma_i=$ $=\delta\tau(\cos\varphi,\ \sin\varphi)$, $\varphi=\mathrm{const}$ в точке $\sigma_1=\tau_1^0$, $\sigma=\mathrm{const}$, $\theta=\theta_0$; $\sigma=\alpha x_1$ после режима нагружения $d\sigma_1/d\theta>0$, $0\leqslant\theta\leqslant\theta_0$. Будем считать, что угол φ таков, что условие монотонности скольжения $\delta\tau\cos\gamma'>\rho\delta\sigma$ [1] не выполняется $\gamma'=$ $=|\varphi-\gamma|$ (см. 2.9). Тогда по утверждению 4 скольжение возможно только вблизи точки $x_1=0$ и область скольжения $l(\theta)$ стремится к нулю при $\theta\to\theta_0$. Краевая задача в приращениях имеет вид

$$\delta\sigma_i=\delta\sigma_1^0-\rho\alpha x_1(\cos\gamma-\cos\gamma_0,\ \sin\gamma-\sin\gamma_0),\ 0\leqslant x_1\leqslant l \tag{3.9}$$
$$\delta u_i=0,\ x_1\leqslant0,\ x_1\geqslant l,\ \delta\sigma_i=\delta\tau(\cos\varphi,\ \sin\varphi)$$

По известным выражениям [5, 6] связывающим скачок смещения при плоской и антиплоской деформации с напряжениями имеем

$$\delta u_1=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{x_1}\frac{d\eta}{(\eta(l-\eta))^{1/2}}\int\limits_0^l\frac{\delta\sigma_1(t(l-t))^{1/2}dt}{t-\eta}\frac{2f}{\mu}$$
$$\delta u_2=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{x_1}\frac{d\eta}{\eta(l-\eta)^{1/2}}\int\limits_0^l\frac{\delta\sigma_2(t(l-t))^{1/2}dt}{t-\eta}\frac{2}{\mu} \tag{3.10}$$

$$\delta\sigma_1=\delta\tau\cos\varphi-\rho\alpha x_1(\cos\gamma-\cos\gamma_0)$$

$$\delta\sigma_2=\delta\tau\sin\varphi-\rho\alpha x_1(\sin\gamma-\sin\gamma_0)$$

Для нашего случая при $\theta=\theta_0$, $\gamma_0=0$. Введем безразмерную координату $\xi=x_1/l$, $0\leqslant\xi\leqslant1$. Обозначим предел при $l\to0$, $\tau'=\lim\delta\tau/l$. Учитывая, что $\operatorname{tg}\gamma=\delta u_2/\delta u_1$, имеем из (3.10) уравнение для определения угла скольжения γ (A — оператор):

$$f \sin\gamma(\xi) A[\tau' \cos\varphi - \rho\alpha t(\cos\gamma(t) - \cos\gamma_0(t))] - \\ -\cos\gamma(\xi) A[\tau' \sin\varphi - \rho\alpha t(\sin\gamma(t) - \sin\gamma_0(t))] = 0 \quad (3.11)$$

$$A[\psi] = \int_0^\xi \frac{d\eta}{(\eta(1-\eta))^{1/2}} \int_0^1 \frac{\psi(t)\,(t(1-t))^{1/2}\,dt}{t-\eta}, \quad f = 1-\nu$$

При этом на границе области скольжения решение (3.11) должно давать не сингулярное распределение напряжений $\tau_i(x_1, \theta)$, $x_1 > l$. Из этого следует, что $\tau' \neq \infty$. Действительно, если бы это было не так, то угол не зависел бы от распределения сил трения и не возможно было бы построить не сингулярное решение. Решение (3.11) описывает асимптотическое поведение линий скольжения при $\delta\theta \to 0$ $(l \to 0)$. Отметим, что уравнение (3.11) в отличие от случая малых возмущений (3.2) является существенно нелинейным по углу.

Таким образом, анализ проведенный в работе, позволил на трещине Ω выделить области устойчивого скольжения где малым приращениям нагрузки соответствуют малые приращения углов скольжения и неустойчивого где малым приращениям нагрузки соответствуют конечные приращения углов скольжения. При этом в обоих случаях задачу удобно записать в приращениях скачка смещения и напряжений. Однако в случае устойчивого скольжения краевую задачу в приращениях удается линеаризовать по приращению угла скольжения и затем, для произвольной траектории нагружения, находить это приращение в каждой ее точке и тем самым, последовательно описывать режим скольжения. В случае неустойчивого скольжения задача в приращениях является существенно не линейной относительно изменения угла скольжения, и линеаризовать ее не удается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольдштейн Р. В., Житников Ю. В.* Анализ равновесия плоской трещины с учетом образования в областях налегания зон скольжения и сцепления при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 2. С. 141–148.
2. *Гольдштейн Р. В., Житников Ю. В.* Напряженное состояние упругой среды, ослабленной эллиптической трещиной со взаимодействующими поверхностями при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 1. С. 126–132.
3. *Гольдштейн Р. В., Житников Ю. В.* Численно-аналитический метод решения пространственных задач теории упругости с неизвестной границей для полостей и трещин. II // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 5. С. 65–78.
4. *Житников Ю. В., Тулинов Б. М.* Взаимодействие между берегами разреза в сложнонапряженном состоянии // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 168–172.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука. 1954. 648 с.
6. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.