

УДК 539.375

© 1991 г.

В. В. БОЛОТИН, С. Г. МИНОКИН

РОСТ ТРЕЩИН СТАТИЧЕСКОЙ УСТАЛОСТИ В ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕДАХ

Рассмотрена трещина нормального отрыва в линейной вязкоупругой среде. Исследовано влияние микроповреждений на скорость роста трещин статической усталости при различных соотношениях между характерными временами трех процессов: распространения трещины, наследственного деформирования и накопления повреждений.

1. Трещины в твердых телах могут расти не только при циклических, но и при постоянных или медленно изменяющихся во времени напряжениях. Это явление называют статической усталостью (в отличие от циклической усталости). Для полимеров трещины статической усталости столь же типичны, как и трещины циклической усталости. В теории трещин статической усталости, основанной на моделях линейной вязкоупругой среды, существенным образом учтены наследственный механизм деформирования и обусловленное им различие между мгновенно-модульными и длительно-модульными значениями параметров. Обзор ранних работ по механике разрушения полимеров можно найти в [1], а обзор [2] доведен до 1987 года.

Наследственное деформирование не является единственным и необходимым условием развития трещин статической усталости. Для некоторых полимеров, например, полиуретана при комнатной температуре спектр времен релаксации лежит в секундном интервале. Однако экспериментаторы наблюдают трещины, растущие со скоростью 10^{-10} м с⁻¹ и даже медленнее. Это означает, что рост трещин в значительной степени зависит от скорости накопления микроповреждений на их фронте. В [3] предложена теория роста усталостных трещин, основанная на рассмотрении условий равновесности и устойчивости системы тело с трещинами — нагрузка с учетом того, что удельная работа разрушения зависит от меры микроповреждений в окрестности фронтов трещин. Рассмотренные в [3] примеры относятся к среде, обладающей свойствами традиционной среды линейной механики разрушения (за исключением способности к накоплению рассеянных микроповреждений). Однако теория пригодна для сплошных сред с достаточно общими свойствами.

В основе теории лежит трактовка системы тело с трещинами — нагрузка как механической системы с односторонними идеальными связями. При этом роль обобщенных координат играют параметры трещин, а варьирование состояний производится по Гриффитсу. Это значит, что при переходе от исследуемого состояния равновесия к смежному варьированию подлежат лишь параметры трещин при выполнении всех уравнений равновесия и совместности, а также при фиксированных граничных условиях.

Назовем систему тело с трещинами — нагрузка субравновесной, если вычисленная при варьировании по Гриффитсу виртуальная работа всех внешних сил и внутренних сил $\delta A < 0$; равновесной, если существуют та-

кие вариации, на которых $\delta A = 0$, а для остальных вариаций $\delta A < 0$; неравновесной, если существуют такие вариации, для которых $\delta A > 0$. Субравновесные состояния по определению устойчивы, неравновесные неустойчивы. Устойчивость равновесных состояний зависит от знака следующих вариаций, в первую очередь от знака $\delta(\delta A)$, где второе варьирование также проводится по Гриффитсу. Равновесное состояние системы тело с трещинами — нагрузка устойчиво, если при всех вариациях $\delta(\delta A) < 0$, неустойчиво, если существуют такие вариации, для которых $\delta(\delta A) > 0$. Случай, когда для некоторых вариаций $\delta(\delta A) = 0$, а для остальных $\delta(\delta A) < 0$, отвечает нейтральному (критическому) равновесию системы или является сомнительным.

Условия равновесности (субравновесности, неравновесности) системы тело с трещинами — нагрузку нетрудно выразить в терминах обобщенных сил. Представим виртуальную работу в виде

$$\delta A = \delta A_e + \delta A_i + \delta A_f, \quad (1.1)$$

где δA_e и δA_i — работа внешних и внутренних сил соответственно, δA_f — работа, затрачиваемая на продвижение фронтов трещин. Если трещина — однопараметрическая, заданная с точностью до одной обобщенной координаты l , то в уравнении (1.1) можно записать $\delta A_e + \delta A_i = G \delta l$, $\delta A_f = -\Gamma \delta l$. Здесь G — активная обобщенная сила (аналог скорости высвобождения энергии по Ирвину), Γ — соответствующая обобщенная сила сопротивления. Система находится в субравновесном состоянии при $G < \Gamma$, в равновесном при $G = \Gamma$ и неравновесном при $G > \Gamma$. Равновесное состояние системы устойчиво, если $\partial G / \partial l < \partial \Gamma / \partial l$ и неустойчиво, при $\partial G / \partial l > \partial \Gamma / \partial l$. Равенство $\partial G / \partial l = \partial \Gamma / \partial l$ отвечает нейтральному равновесию.

Чтобы описать рост трещины во времени, введем в рассмотрение микроповреждения, рассеянные в структуре тела. Для простоты ограничимся скалярной феноменологической мерой микроповреждений φ , нормировав ее так, чтобы для неповрежденного материала $\varphi = 0$, а для полностью поврежденного материала $\varphi = 1$. Значение меры микроповреждений непосредственно на фронте трещины обозначим через ψ . Уровень микроповреждений в каждой точке тела является функционалом от истории нагружения и развития трещин в теле:

$$\varphi(L, t) = \Phi \{ \sigma(L, \tau), l(\tau) \} \quad (1.2)$$

Здесь L — значение обобщенной координаты l на продолжении фронта трещины, траекторию которой считаем известной, $\sigma(L, \tau)$ — тензор напряжений на продолжении фронта при $0 \leq \tau \leq t$. При этом

$$\varphi(t) = \varphi[l(t), t] \quad (1.3)$$

Чтобы получить ограниченные микроповреждения на фронте, необходимо отказаться от представления о трещине как о математическом разрезе, введя некоторый конечный радиус кривизны ρ у фронта трещины. В простейшем случае можно считать ρ структурной постоянной материала. Вообще, $\rho(t)$ зависит от скорости роста трещин и интенсивности накопления микроповреждений. Так, в статье [4] было использовано соотношение типа

$$\rho = \rho_\infty + \rho_* \psi \quad (1.4)$$

где ρ_∞ — минимальное значение радиуса кривизны, а величина ρ_* характеризует степень «затупления» фронта трещины при высоком уровне микроповреждений.

Обобщенные силы G и Γ изменяются во времени, поскольку они зависят от номинальных напряжений, размера трещины, радиуса кривизны

и меры микроповреждений на фронте трещины. Трещина размером l_0 , субравновесная при $t=0$, остается субравновесной до момента t_* первого достижения равенства $G(t)=\Gamma(t)$. Дальнейший устойчивый рост $l=l(t)$ происходит при приближенном выполнении этого равенства, пока состояние системы тело с трещиной — нагрузка не перестанет быть устойчивым. В этот момент t_{**} происходит финальное разрушение с критическим размером трещины l_{**} .

2. Определенные трудности связаны с вычислением обобщенной силы $G(t)$. В ранних работах [5, 6] предлагалось использовать аналог формулы Ирвина

$$G(t)=D[\lambda(dl/dt)^{-1}]K^2(t) \quad (2.1)$$

где $D(t)$ — функция ползучести для плоского напряженного состояния или плоской деформации, λ — параметр, имеющий размерность длины, $K(t)$ — коэффициент интенсивности напряжений в момент времени t , скажем, $K=\sigma_\infty(t)[\pi l(t)]^{1/2}$ для центральной трещины отрыва в неограниченной пластине при номинальных напряжениях σ_∞ . Для использования формулы (2.1) необходимо оценить значение λ . В принципе λ может принимать значения от характерного размера структуры материала до размера концевой зоны. Попытки оценить значения λ путем обработки экспериментальных данных о распространении трещин в полимерах привели к противоречивым результатам. Так, в статье [5] для полиуретана при комнатной температуре получена оценка $\lambda \sim 1$ Å, что не согласуется с представлениями о физике деформирования и разрушения.

В статье [7] было предложено выражение для обобщенной силы

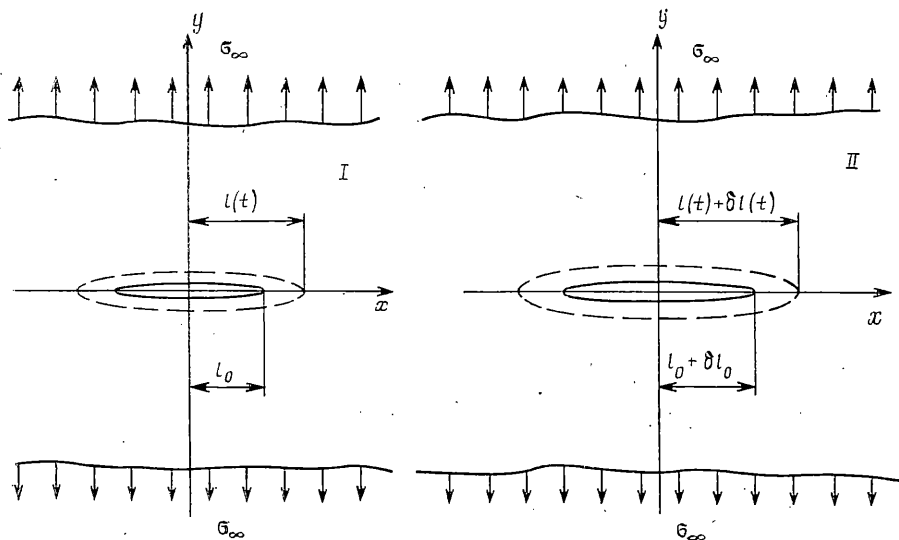
$$G(t)=\int_0^t D(t-\tau)d[K^2(\tau)] \quad (2.2)$$

Формулу (2.2) можно трактовать как результат применения вязкоупругой аналогии к формуле Ирвина. Однако для ее вывода требуются дополнительные допущения, которые носят неочевидный характер. Погрешности, связанные с этими допущениями, не поддаются прямой оценке. Аналогичный эвристический характер имеет формула [8]:

$$G(t)=K(t)\int_0^t D(t-\tau)dK(\tau) \quad (2.3)$$

которая учитывает, что поле напряжений в вязкоупругой задаче Гриффитса совпадает с упругим полем, а поле деформаций получается из упругого поля путем наследственного преобразования с функцией ползучести $D(t)$. Формулы (2.2) и (2.3) не содержат длины концевой зоны, но неявно включают зависимость от l_0 и $l(t)$. Вычисления показывают (см. ниже, фиг. 2–4), что для широкого набора функций ползучести $D(t)$ и законов нагружения нельзя признать значимыми расхождения между результатами вычислений по формулам (2.2) и (2.3).

Для строгого определения обобщенной силы $G(t)$ необходимо вернуться к процедуре варьирования по Гриффитсу. Вариация по Гриффитсу является изохронной, т. е. как невозмущенное, так и смежные состояния системы тело с трещинами — нагрузка рассматриваются в один и тот же момент времени. Поскольку вязкоупругие среды обладают памятью, то изохронное варьирование должно учитывать всю предысторию. Это можно осуществить, если варьировать начальный размер трещины. Фактически это означает, что берутся два идентичных и идентично нагружаемых тела, которые отличаются только начальным размером трещины. Это отличие.



Фиг. 1

вообще, сохранится и при дальнейшем росте трещины. Очевидно, что такой способ варьирования аналогичен численному моделированию двухобразцового метода для экспериментального определения характеристик трещиностойкости [9].

Возьмем выражение $G\delta l = \delta A_e + \delta A_i$. Определим значение виртуальных работ δA_e и δA_i из совместного рассмотрения полей напряжений $\sigma_{\alpha\beta}(t)$, деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}(t)$ и перемещений $u_\alpha(t)$ в двух идентичных и идентично нагружаемых телах. В начальный момент $t=0$ размеры трещин отличаются на малую величину $\delta l_0 > 0$, а в момент $t > 0$ на $\delta l(t) > 0$. Тогда

$$G(t)\delta l(t) = \int_S p_\alpha(t) [u_\alpha^{II}(t) - u_\alpha^I(t)] dS - \int_V [W^{II}(t) - W^I(t)] dV$$

$$W(t) = \int_{[0,t]} \sigma_{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta} \quad (2.4)$$

где V — объем тел, S — их поверхность, $p_\alpha(t)$ — вектор напряжений на поверхности. Индексы I и II относятся соответственно к телам I и II (фиг. 1).

Если принять, что коэффициент Пуассона $\nu = \text{const}$, то деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}(t)$ и перемещения $u_\alpha(t)$ в вязкоупругом теле определяются как интегральное преобразование от деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}^0(t)$ и перемещений $u_\alpha^0(t)$ в соответствующем упругом теле с податливостью при одноосном растяжении — сжатии $D(0)$:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(t) = \frac{1}{D(0)} \int_0^t D(t-\tau) d\varepsilon_{\alpha\beta}^0(\tau), \quad u_\alpha(t) = \frac{1}{D(0)} \int_0^t D(t-\tau) du_\alpha^0(\tau) \quad (2.5)$$

При этом $D(0) = E_0^{-1}$, где E_0 — мгновенный модуль Юнга, который предполагается конечным.

Интегрируя по частям интегралы в формулах (2.5), получим, что

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta}(t) &= \varepsilon_{\alpha\beta}^0(t) + \int_0^t M(t-\tau) \varepsilon_{\alpha\beta}^0(\tau) d\tau \\ u_{\alpha}(t) &= u_{\alpha}^0(t) + \int_0^t M(t-\tau) u_{\alpha}^0(\tau) d\tau\end{aligned}\tag{2.6}$$

где $M(t) = D'(t)/D(0)$ есть нормированное ядро ползучести.

Вычисления были выполнены для трещины отрыва в неограниченной пластине из линейного вязкоупругого материала. На бесконечности задавались либо равномерные номинальные напряжения отрыва σ_{∞} , либо равномерные номинальные деформации ε_{∞} . Были рассмотрены трещины в форме эллиптической щели с полуосями $l=a$ и b , а также математические разрезы с полудлиной l . В первом случае поля напряжений определялись по формулам Колосова — Мусхелишвили с отображением внешности круга на внешность эллипса. Во втором случае применялись стандартные формулы Уильямса [9] с добавлением регулярных членов.

При постоянном коэффициенте Пуассона нормированное ядро ползучести в формулах (2.6) взято в виде

$$M(t) = \frac{(E_0 - E_{\infty}) t^{\alpha-1}}{E_{\infty} \theta_r^{\alpha} \Gamma(\alpha)} \exp\left(-\frac{t}{\theta_r}\right)\tag{2.7}$$

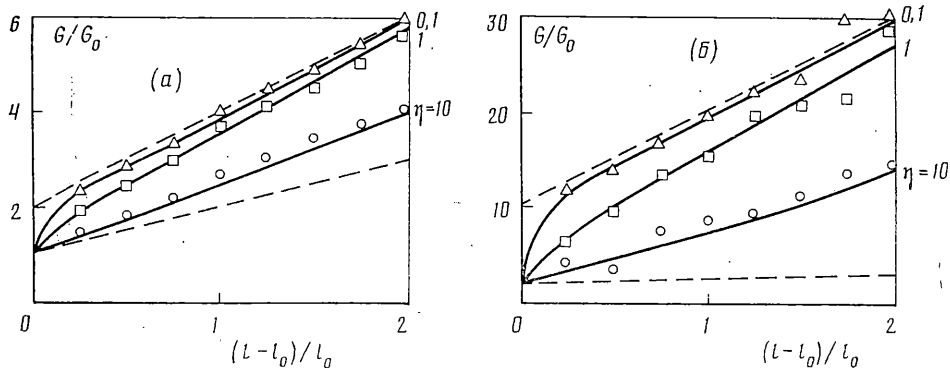
Здесь E_{∞} — длительный (равновесный) модуль Юнга, θ_r — характерное время запаздывания, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция. Постоянная α принимает неотрицательные значения. При $0 < \alpha < 1$ ядро ползучести имеет слабую особенность [10]. При $\alpha=1$ формула (2.7) отвечает стандартному вязкоупругому материалу с уравнением деформирования при одноосном растяжении-сжатии $E_{\infty} \varepsilon + E_0 \theta_r d\varepsilon/dt = \sigma + \theta_r d\sigma/dt$. Время релаксации θ_0 связано с временем запаздывания зависимостью $\theta_0 = E_{\infty} \theta_r / E_0$. Функция ползучести из формул (2.1) — (2.3) и (2.5) имеет вид

$$D(t) = \frac{1}{E_0} + \frac{E_0 - E_{\infty}}{E_0 E_{\infty}} \frac{\gamma(\alpha, t/\theta_r)}{\Gamma(\alpha)}$$

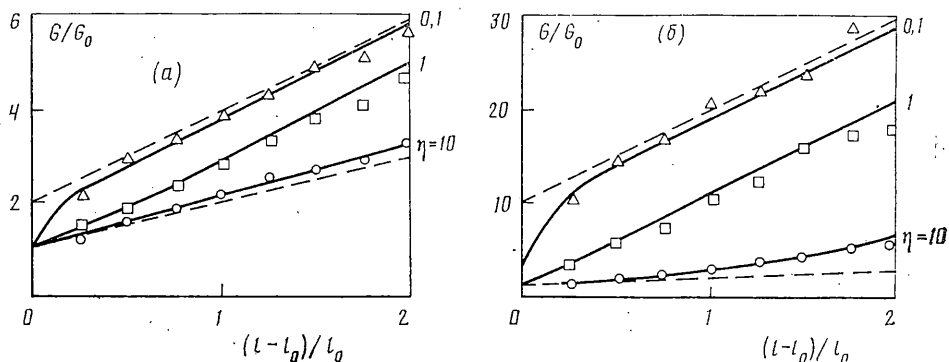
где $\gamma(\alpha, n)$ — неполная гамма-функция.

Квадратуры в формулах (2.4) и (2.6) вычислялись с измельчением координатной сетки у фронтов трещин и временной сетки в случае относительно быстрого изменения напряженно-деформированного состояния (например, при страгивании трещины). Для сопоставления результатов, которые дают формулы (2.1), (2.2), (2.3) и (2.4), было изучено несколько случаев продвижения фронта трещин. Основной случай — приложение в момент $t=0$ номинальных напряжений σ_{∞} , которые в дальнейшем поддерживаются постоянными. Трещина начинает расти с постоянной скоростью $dl/dt = c = \text{const}$ в тот же момент $t=0$. Начальные размеры трещин отличаются на один шаг мелкой сетки Δx , так что при $t > 0$ в формуле (2.4) имеем $\delta l(t) = \Delta x = \text{const}$.

Некоторые результаты проиллюстрированы на фиг. 2 и 3, где графики a и b относятся соответственно к отношениям модулей Юнга $E_0/E_{\infty} = 2$ и 10. Фиг. 2 построен при $\alpha=1/2$, фиг. 3 при $\alpha=1$. На графиках использованы обозначения $G_0 = \sigma_{\infty}^2 \pi l_0 / E_0$, $\eta = c \theta_r / l_0$. Параметр η , очевидно, равен отношению характерных времен наследственного деформирования и роста трещины. Сплошными линиями нанесены результаты вычислений по формуле (2.2). Вычисления по формуле (2.3) приводят к близким результа-



Фиг. 2



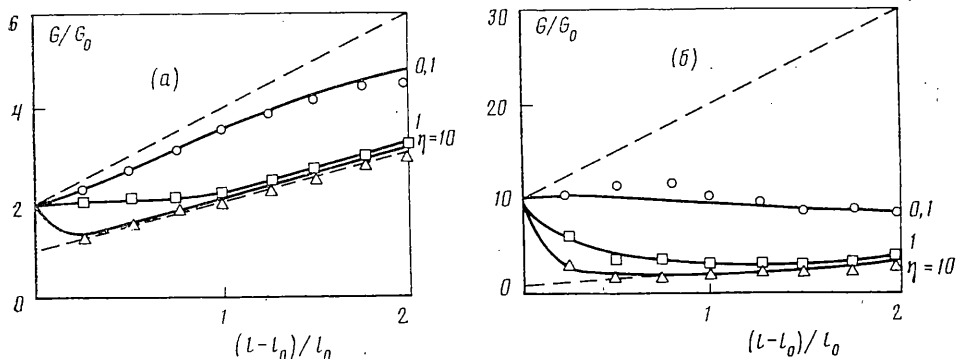
Фиг. 3

там, которые на графиках не представлены. Изолированные символы — численные результаты, полученные по формулам (2.4)–(2.6). Штриховые линии относятся к чисто упругой среде с модулями Юнга E_0 и E_∞ , так что

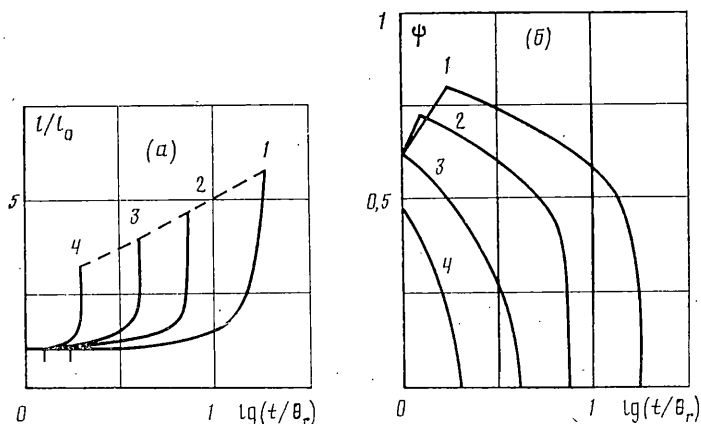
$$K^2/E_0 \leq G(t) \leq K^2/E_\infty \quad (2.8)$$

При $\eta=0,1$, т. е. при росте трещины, относительно медленном по сравнению с процессом наследственного деформирования, значения $G(t)$ довольно быстро приближаются к границе, отвечающей длительному (равновесному) модулю Юнга. При $\eta=10$ трещина растет значительно быстрее, чем развиваются наследственные деформации. Однако обобщенная сила $G(t)$ заметно отличается от соответствующего мгновенно-модульного значения (нижняя штриховая линия на фиг. 2 и 3).

Аналогичные численные результаты были получены для других моделей распространения трещины, в частности, для трещины, размер которой выдерживался постоянным на некотором начальном отрезке времени, а затем трещина начинала расти с заданной постоянной скоростью. На фиг. 4 представлены численные результаты для случая «жесткого» нагружения с заданной номинальной деформацией ϵ_∞ . Вычисления выполнены для эллиптической щели с начальным отношением полуосей $a_0/b_0=10$. Деформация ϵ_∞ задавалась в момент $t=0$ и далее поддерживалась постоянной. В тот же момент времени размер трещины $l=a$ начинал расти со скоростью $dl/dt=c=\text{const}$. Размер b изменялся так, чтобы радиус на фронте $\rho=b^2/a$ оставался постоянным. На графиках использованы те же обозначения, что и на предыдущих рисунках с тем отличием, что $G_0=E_0\epsilon_\infty^2\pi l_0$.



Фиг. 4



Фиг. 5

Падение обобщенной силы $G(t)$ на начальном участке связано с релаксацией напряжений. Качественные выводы о соотношении между численными результатами аналогичны тем, которые сделаны в связи с фиг. 2 и 3. Для того, чтобы формула (2.1) давала хотя бы приблизительное согласие с результатами вычислений по формуле (2.4), нужно допустить, что параметр длины λ принимает значения порядка l , а при достаточно больших l порядка $l-l_0$. Это естественно, поскольку в случае трещины — математического разреза формула (2.4) не содержит никаких параметров длины, кроме l и l_0 . В случае эллиптической щели появляется дополнительный параметр ρ , однако заметного влияния этого параметра на значения $G(t)$ не обнаружено. В чисто упругом случае влияние конечного радиуса кривизны на значение обобщенной силы вносит относительную поправку порядка $(\rho/l)^{1/2}$ [11]. Можно ожидать, что примерно такой же порядок эта поправка будет иметь в случае линейного вязкоупругого материала.

3. Согласно [3] рост усталостных трещин происходит в результате взаимодействия между накоплением микрповреждений и условием энергетического баланса в системе тело с трещинами — нагрузка. При этом вопрос о способе аппроксимации активной обобщенной силы $G(t)$ перестает быть решающим. Вид формулы для $G(t)$ становится существенным лишь тогда, когда размеры трещины сопоставимы с критическими. Тогда скорость роста трещины резко возрастает, а $G(t)$ приближается к мгновенно — модульному значению, т. е. к нижней границе из неравенств (2.8). В остальных случаях рост трещины определяется в основном

скоростью накопления микроповреждений на движущемся фронте. В дальнейшем для обобщенной силы $G(t)$ используем представление (2.2).

Чтобы описать поведение трещины статической усталости, необходимо установить зависимость обобщенной силы сопротивления $\Gamma(t)$ от меры микроповреждений $\psi(t)$. Как и в статьях [3, 12], примем, что

$$\Gamma = \Gamma_0 (1 - \psi^\beta) \quad (3.1)$$

где Γ_0 — удельная работа разрушения для неповрежденного материала, т. е. величина энергии, которую необходимо затратить для увеличения на единицу площади трещины в неповрежденном материале (площади новых поверхностей не удваиваются). Показатель $\beta > 0$, например, $\beta = 1$. Мету микроповреждений $\psi(t)$ определяем согласно уравнению (1.2) и формуле (1.3). Например, для порогово-степенного закона накопления микроповреждений имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{\theta_\psi} \left(\frac{\sigma - \sigma_{th}}{\sigma_\psi} \right)^m \quad (3.2)$$

Здесь $\sigma(x, t)$ — напряжение отрыва при $|x| \geq l(t)$, $y = 0$, σ_ψ — постоянная материала, характеризующая его сопротивление накоплению микроповреждений, σ_{th} — пороговая характеристика этого сопротивления, θ_ψ — постоянная времени, показатель $m > 0$. Уравнение (3.2) применимо при $\sigma \geq \sigma_{th}$. Если $\sigma < \sigma_{th}$, т. е. напряжение отрыва на продолжении фронта трещины ниже порога сопротивления σ_{th} , то вместо (3.2) следует положить $\partial \psi / \partial t = 0$.

Уравнение для более общей модели микроповреждений имеет вид

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\theta_\psi} \int_0^t \Phi(t - \tau) f[\sigma(x, \tau)] d\tau \quad (3.3)$$

с наследственным ядром $\Phi(t)$. Функция $f(\sigma)$ от напряжения $\sigma(x, t)$ может совпадать, например, с правой частью из уравнения (3.2). Тогда уравнение (3.2) следует из формулы (3.3) при $\Phi = 1$. Уравнение (3.3) позволяет более гибко описать процесс накопления микроповреждений, в частности, учесть возможность «залечивания» микроповреждений.

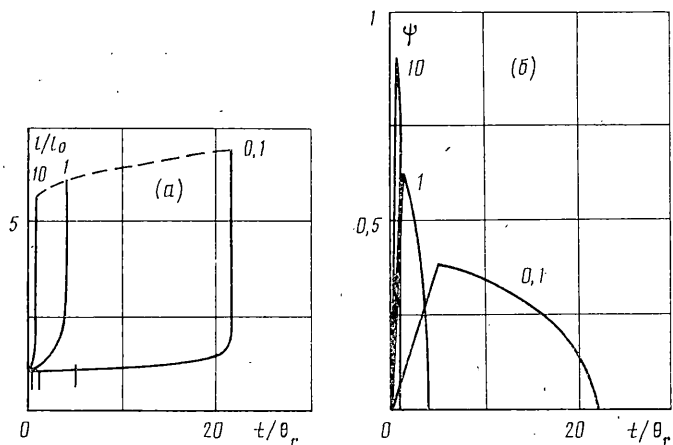
Используя квазистационарное приближение [3, 8, 11] получим приближенное выражение для меры микроповреждений на фронте $\psi(t) \approx \varphi[l(t), t]$:

$$\psi(t) \approx \psi_r(t) + (\lambda / c \theta_\psi) \Phi(\lambda_1 / c) f[\sigma(l + \lambda_1, t)] \quad (3.4)$$

При этом λ — характерная длина концевой зоны, $\psi_r(t)$ — мера микроповреждений в дальнем поле, точнее, при $x > l(t) + \lambda$, $y = 0$. Скорость роста трещины $c = dl/dt$ принята отличной от нуля и мало изменяющейся при продвижении фронта на расстояние порядка λ . Размер λ_1 появляется при применении теоремы о среднем значении к правой части уравнения (3.3) на отрезке $[0, \lambda]$. При этом $\lambda_1 \in [0, \lambda]$, а номинальные напряжения $\sigma(x, t)$ приняты медленно изменяющимися функциями t . В частности, если для функции $f(\sigma)$ принять порогово-степенное выражение из (3.2), а напряжение $\sigma(x, t)$ выразить через коэффициент интенсивности $K(t)$, то приближенная формула (3.4) принимает вид

$$\psi(t) \approx \psi_r(t) + (\lambda / c \theta_\psi) [(K(t) - K_{th}) / K_\psi]^m \quad (3.5)$$

с характеристиками материала $K_\psi = \sigma_\psi (\pi \rho)^{1/2}$, $K_{th} = \sigma_{th} (\pi \rho)^{1/2}$ и показателем $m > 0$. Как видно из (3.4), K_ψ и K_{th} в общем случае могут зависеть от скорости c . Но эта зависимость относительно слабая и исчезает, например, если в формуле (3.4) положить $\lambda_1 = 0$.



Фиг. 6

Общая картина поведения вязко-упругого тела с трещинами выглядит следующим образом. Пусть при $t=0$ выполнено условие $G(t) < \Gamma(t)$, где $K_0^2 = E_0 \Gamma_0$ — мгновенно-модульное критическое значение коэффициента интенсивности напряжений. Фронт трещины остается неподвижным, пока впервые не будет достигнуто равенство

$$\int_0^t D(t-\tau) d[K^2(\tau)] = (K_0^2/E_0) [1 - \psi^\alpha(t)] \quad (3.6)$$

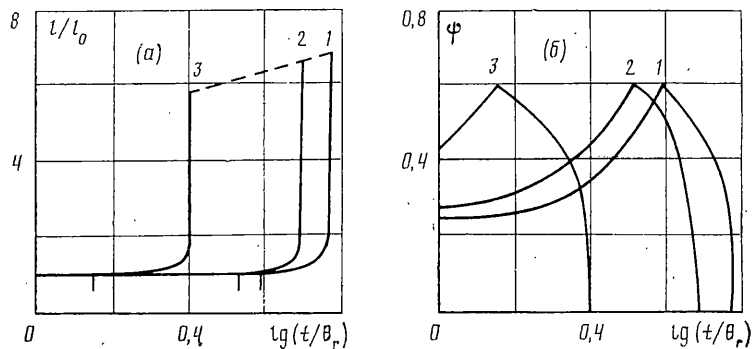
Первый корень $t=t_*$ уравнения (3.6) отвечает моменту окончания инкубационной стадии. Дальнейший рост трещины происходит либо устойчиво при выполнении равенства (3.6), либо малыми скачками — путем перехода из одного субравновесного состояния в аналогичное смежное состояние [13]. Но и во втором случае трещина растет при приближенном соблюдении равенства (3.6).

С учетом формул (2.2), (3.5) и (3.6), получим уравнение роста трещины статической усталости в квазистационарном приближении

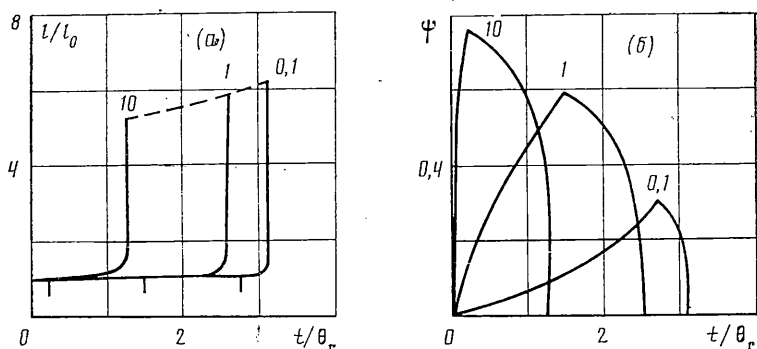
$$\frac{dl}{dt} = \frac{\lambda}{\theta_\psi} \left[\frac{K(t) - K_{th}}{K_\psi} \right]^m \left[\left(1 - \frac{E_0}{K_0^2} \int_0^t D(t-\tau) d[K^2(\tau)] \right)^{1/\alpha} - \psi_r(t) \right]^{-1} \quad (3.7)$$

Это уравнение — интегродифференциальное. По структуре оно близко к дифференциальным уравнениям роста усталостных трещин из [3, 11]. В предельных случаях — при очень быстром и очень медленном росте уравнение (3.7) переходит в уравнения из [3, 11] для трещин в линейно-упругой повреждаемой среде.

Некоторые численные результаты для трещин отрыва приведены на фиг. 5 и 6. Для расчета были приняты следующие значения: $m=4$, $\alpha=1$, $E_0=10E_\infty$, $K_{th}=0$, $K_\psi=K_0$, $\lambda=\rho=10^{-2}l_0$, где l_0 — начальная полудлина трещины. Номинальные напряжения σ_∞ прикладываются в момент $t=0$ и далее поддерживаются постоянными. Уровень этих напряжений характеризуется безразмерным параметром $q=\sigma_\infty(\pi\rho)^{1/2}/K_0$. На фиг. 5, а показано изменение во времени безразмерной длины l/l_0 . Моменты t_* окончания инкубационной стадии помечены штрихом. Точки, соответствующие финальному разрушению при $t=t_{**}$, расположены на штриховой линии. Кривые 1–4 соответствуют различным значениям безразмерного пара-



Фиг. 7



Фиг. 8

метра $q = (1; 2; 2.5; 3) \cdot 10^{-2}$. На фиг. 5, 6 показано изменение во времени меры микроповреждений $\psi(t)$. Эта мера растет в пределах инкубационной стадии и начинает уменьшаться после страгивания трещины. К моменту финального разрушения мера ψ близка к нулю, поскольку уровень микроповреждений в дальнем поле в данном примере оказался весьма мал.

Влияние соотношения между характерными временами наследственного деформирования θ_r и накопления микроповреждений θ_ψ проиллюстрирован на фиг. 6. Здесь принято, что $q = 2.5 \cdot 10^{-2}$. При увеличении отношения θ_r/θ_ψ от 0,1 до 10 продолжительность инкубационной стадии и стадии устойчивого распространения трещины уменьшается более чем на порядок. Случай «жесткого» нагружения от нуля с постоянной скоростью номинальной деформации η_∞ проиллюстрирован на фиг. 7 и 8. Для расчета приняты те же данные, что и ранее, с тем отличием, что $E_0 = 2E_\infty$. Скорость нагружения характеризуется безразмерным параметром $q_1 = E_0 \eta_\infty \theta_r (\pi r)^{1/2} / K_0$. Фиг. 7 построена при $\theta_r = \theta_\psi$. Кривые 1–3 соответствуют трем различным значениям параметра нагружения $q_1 = (1; 1.25; 2.5) \cdot 10^{-2}$. Фиг. 8 построена для случая $q_1 = 1.25 \cdot 10^{-2}$ и трех различных отношениях θ_r/θ_ψ .

Заметим, что во всех случаях трещина начинает распространяться при уровне микроповреждений $\psi < 1$, а дальнейший рост сопровождается уменьшением этого уровня. Это существенно отличается от ранее предложенных моделей [10, 14, 15], согласно которым трещины в вязкоупругой среде растут при равенстве $\psi = \psi_c$, где ψ_c — заданная константа, например, $\psi_c = 1$. Финальное разрушение происходит при достижении трещиной размера, который значительно меньше критического значения l_c , найденного для упругого материала с модулем E_0 . Так, применительно к фиг. 5 и 6 критическое отношение l_c/l_0 составляет $10^{-2}/q^2$. Аналогичные

результаты были получены в статье [12], где для обобщенной силы $G(t)$ была использована аппроксимация (2.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кнаусс В. Г. Механика разрушения полимеров // Механика. М.: Мир, № 2(144). С. 116–143.
2. Каминский А. А., Гаверлов Д. А. Механика разрушения полимеров. Киев: Наукова думка, 1988. 224 с.
3. Болотин В. В. Уравнения роста усталостных трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 153–160.
4. Болотин В. В. Механическая модель коррозионного растрескивания // Машиноведение. 1987. № 4. С. 20–26.
5. Knauss W. G. Delayed fracture – the Griffith problem for linearly viscoelastic materials // Int. J. Fract. Mech. 1970. Vol. 6. № 1. P. 7–20.
6. Wnuk M. P. Subcritical growth of fracture (inelastic fatigue) // Int. J. Fract. Mech. 1971. Vol. 7. № 7. P. 383–407.
7. Shapery R. A. Correspondence principles and a generalized J integral for large deformation and fracture analysis of viscoelastic media // Int. J. Fract. 1984. Vol. 25. № 1. P. 195–233.
8. Bolotin V. V. A unified model of fatigue and fracture with applications to structural reliability // Random Vibration. Status and Recent Developments. S. Crandall Festschrift. Amsterdam: Elsevier. 1986. P. 47–58.
9. Хеллан К. Введение в механику разрушения. М.: Мир, 1988. 364 с.
10. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
11. Bolotin V. V. Prediction of service life for machines and structures. New York: ASME Press. 1988. 395 p.
12. Болотин В. В. Трещина Гриффитса в повреждаемой вязкоупругой среде // Расчеты на прочность. Вып. 26. М.: Машиностроение. 1986. С. 19–32.
13. Болотин В. В. Устойчивость и рост усталостных трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 133–140.
14. Janson J. Dugdale – crack in a material with continuous damage formation // Eng. Fract. Mech. 1977. Vol. 9. P. 891–899.
15. Riedel H. The extension of a macroscopic crack at elevated temperature by the growth and coalescence of microvoids // Creep in Structures/Ed. A. F. Ponter. Berlin et al.: Springer – Verlag. 1981. P. 504–519.

Москва

Поступила в редакцию
21.IX.1989