МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1991

УДК 534.14

Ю. Г. МАРКОВ, И. С. МИНЯЕВ

О ВЛИЯНИИ ВНУТРЕННИХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ НА ДВИЖЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО УПРУГОГО ТЕЛА ВОКРУГ ЦЕНТРА МАСС

Исследуются динамические эффекты при колебаниях осесимметричного упругого тела в случае движения по инерции вокруг центра масс. Отмечены особенности динамики упругого тела в диапазоне частот, близком к одной из собственных частот, при этом существенную роль играют инерционные члены. Методом усреднения в канонических переменных Андуайе изучена эволюция регулярной прецессии осесимметричного упругого тела в квазистатическом приближении. Существенным по сравнению с [1] является то, что рассмотрено обобщение задачи на случай движения осесимметричного упругого тела с использованием модального анализа. Найдены собственные формы, на которых происходит возбуждение упругих колебаний. В качестве примера рассмотрено движение тонкого кругового кольца.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение по инерции вокруг центра масс осесимметричного упругого тела, занимающего в естественном недеформированном состоянии область $\Omega\in E^3$. Введем в центре масс C упругого тела неинерциальную (подвижную) систему координат $Cx_1x_2x_3$, так, чтобы выполнялось условие [2]

$$\int\limits_\Omega (\mathbf{r}\times\mathbf{u})\rho_0\,dx=0,\qquad (dx=dx_1\,dx_2\,dx_3) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}=(u_1,\ u_2,\ u_3)$ — вектор перемещений точек упругого тела при деформациях относительно системы координат $Cx_1x_2x_3$, $\mathbf{r}\in\Omega$ — радиус-вектор точки упругого тела. Динамическая модель упругого тела описывается квадратичным функционалом относительно вектора перемещений (теория малых деформаций $|\partial u_i/\partial x_j|\ll 1$), а тело считается однородным и изотропным, плотности $\rho_0=\text{const}$.

Вариационный принцип Даламбера — Лагранжа в случае движения упругого тела по инерции запишем в виде [2, 3]:

$$\int\limits_\Omega \{\mathbf{u}^{\cdot\cdot}+\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u})]+\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u})+2[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}^{\cdot}]+$$
$$+\rho_0^{-1}(\nabla E[\mathbf{u}]+\nabla D[\mathbf{u}^{\cdot}])\}\delta\mathbf{u}\rho_0\,dx=0 \tag{1.2}$$
$$\forall\delta\mathbf{u}\in H_2=\{\mathbf{u}:\mathbf{u}\in(W_2^1(\Omega))^3\}$$

здесь $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость подвижной системы $Cx_1x_2x_3$; $E[\mathbf{u}]$ — квадратичный функционал потенциальной энергии упругих деформаций; $D[\mathbf{u}^{\cdot}]$ — функционал диссипативных сил, причем $D[\mathbf{u}^{\cdot}]=\chi bE[\mathbf{u}^{\cdot}]$, где χb — время релаксации, $\chi\ll 1$ — безразмерная малая величина, b — положительная константа; $SO(3)\times H_2$ — конфигурационное многообразие системы; $W_2^1(\Omega)$ — пространство Соболева.

Введем в рассмотрение базис $\{\mathbf{V}_{km}(\mathbf{r}),\ \mathbf{W}_{km}(\mathbf{r})\}_{k,m=0}$ в конфигурационном пространстве системы. Собственные формы $\mathbf{V}_{km}$ и $\mathbf{W}_{km}$ ортогональны и получены друг из друга путем поворота вокруг оси Cx_3, на угол $\Psi_k=\pi/2k$; $2k$ — число узлов собственной формы по параллели,

m — соответствующий номер формы при фиксированном k. Заметим, что уравнения, описывающие собственные колебания осесимметричного упругого тела удобно рассматривать в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z), (причем $x_1=\rho\cos\varphi$, $x_2=\rho\sin\varphi$, $x_3=z$, $dx=\rho d\rho d\varphi dz$). В этой системе координат ортогональные базисные собственные формы, соответствующие некоторому $k\neq0$, будут [3, 4]:

$$\mathbf{V}_{km}(\rho, z, \varphi)=(U_{km}(\rho, z)\sin k\varphi,\ V_{km}(\rho, z)\cos k\varphi,\ W_{km}(\rho, z)\sin k\varphi)$$

$$\mathbf{W}_{km}(\rho, z, \varphi)=(U_{km}(\rho, z)\cos k\varphi,\ -V_{km}(\rho, z)\sin k\varphi,\ W_{km}(\rho, z)\cos k\varphi) \tag{1.3}$$

Пусть ν_{km} — собственная частота колебаний по формам $\mathbf{V}_{km}$, $\mathbf{W}_{km}$ и выполнены условия ортонормированности

$$(\mathbf{V}_{km}, \mathbf{V}_{ln})=\int\limits_{\Omega}\mathbf{V}_{km}\mathbf{V}_{ln}\,dx=\delta_{(km)(ln)}$$

$$(\mathbf{W}_{km}, \mathbf{W}_{ln})=\delta_{(km)(ln)}, \quad (\mathbf{V}_{km}, \mathbf{W}_{ln})=0 \tag{1.4}$$

здесь $\delta_{(km)(ln)}$ — символ Кронекера с индексами (km) и (ln). Случаю $k=0$ соответствуют осесимметричные собственные формы. Конфигурационное пространство системы есть гильбертово пространство, вложенное в пространство Соболева $(W_2^{-1}(\Omega))^3$ и являющееся линейной оболочкой базисных векторов $\mathbf{V}_{km}$, $\mathbf{W}_{km}$. Так как собственные формы задачи (1.2) образуют ортогональный базис в гильбертовом пространстве системы, то всякое решение вариационного уравнения (1.2) может быть представлено в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)=\sum_{k,m=0}^{\infty}[q_{km}(t)\mathbf{V}_{km}(\mathbf{r})+p_{km}(t)\mathbf{W}_{km}(\mathbf{r})] \tag{1.5}$$

где $q_{km}(t)$, $p_{km}(t)$ — нормальные координаты, подлежащие определению. Поскольку $\rho_0^{-1}\nabla E[\mathbf{V}_{km}]=\nu_{km}^2\mathbf{V}_{km}$, $\rho_0^{-1}\nabla E[\mathbf{W}_{km}]=\nu_{km}^2\mathbf{W}_{km}$ то, подставляя разложение (1.5) в уравнение (1.2) и умножая его левую часть скалярно на $\mathbf{V}_{km}$ и $\mathbf{W}_{km}$, с учетом (1.4) получим

$$q_{km}^{\cdot\cdot}+\nu_{km}^2q_{km}+\chi b\nu_{km}^2q_{km}^{\cdot}+(\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u})],\ \mathbf{V}_{km})+$$
$$+(\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u}),\ \mathbf{V}_{km})+2(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}^{\cdot},\ \mathbf{V}_{km})=0$$

$$p_{km}^{\cdot\cdot}+\nu_{km}^2p_{km}+\chi b\nu_{km}^2p_{km}^{\cdot}+(\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u})],\ \mathbf{W}_{km})+$$
$$+(\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u}),\ \mathbf{W}_{km})+2(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}^{\cdot},\ \mathbf{W}_{km})=0 \tag{1.6}$$

Далее, введем некоторые предположения, позволяющие упростить решение задачи и перейти к ее квазистатической постановке. Пусть T_0 — характерное время движения системы как целого относительно центра масс, T и T_1 — соответственно период и характерное время затухания свободных колебаний упругого тела на наинизшей собственной частоте. Будем предполагать, что выполняются следующие неравенства: $T\ll T_1\ll T_0$, которые в безразмерной форме имеют вид

$$\varepsilon\ll\varkappa\ll1, \quad \varepsilon=\omega\nu^{-1}, \quad \varkappa=\chi b\nu \tag{1.7}$$

Коэффициенты разложения гироскопических и вращательных инерционных сил в уравнениях (1.6) по ортонормированным собственным формам будут иметь следующий вид

$$(\omega\times[\omega\times\mathbf{r}],\mathbf{V}_{km})=\sum_{i,j=1}^{3}n_{ij}b_{kmij},\qquad (\omega\times[\omega\times\mathbf{r}],\mathbf{W}_{km})=\sum_{i,j=1}^{3}n_{ij}c_{kmij}\qquad(1.8)$$

$$(\omega^{\cdot}\times\mathbf{r},\ \mathbf{V}_{km})=\omega_3^{\cdot}(b_{km21}-b_{km12})+\omega_2^{\cdot}(b_{km13}-b_{km31})+\omega_1^{\cdot}(b_{km32}-b_{km23})$$

$$(\omega^{\cdot}\times\mathbf{r},\ \mathbf{W}_{km})=\omega_3^{\cdot}(c_{km21}-c_{km12})+\omega_2^{\cdot}(c_{km13}-c_{km31})+\omega_1^{\cdot}(c_{km32}-c_{km23})$$

$$n_{11}=-(\omega_2^2+\omega_3^2),\quad n_{12}=n_{21}=\omega_1\omega_2,\quad n_{13}=n_{31}=\omega_1\omega_3$$

$$n_{22}=-(\omega_1^2+\omega_3^2),\quad n_{23}=n_{32}=\omega_2\omega_3,\quad n_{33}=-(\omega_1^2+\omega_2^2)\qquad(1.9)$$

$$b_{kmij}=\int_{\Omega}V_{kmi}x_j\,dx,\qquad c_{kmij}=\int_{\Omega}W_{kmi}x_j\,dx,\qquad (i,j=1,2,3)$$

здесь V_{kmi} — проекция формы $\mathbf{V}_{km}$ на ось x_i.

В силу условия (1.1) коэффициенты b_{kmij} и c_{kmij} симметричны по индексам i, j, то есть

$$b_{kmij}=b_{kmji},\qquad c_{kmij}=c_{kmji}\qquad(1.10)$$

Заметим, что при $k=0$ собственные формы (1.3) являются осесимметричными и описывают крутильные и продольно-поперечные колебания упругого тела. Используя свойство осесимметричности упругого тела, определим скалярные произведения в (1.9) и найдем собственные формы, на которых происходит возбуждение колебаний. Проекции векторов $\mathbf{V}_{km}$ и $\mathbf{W}_{km}$ на оси системы координат $Cx_1x_2x_3$ с учетом (1.3) будут иметь вид

$$\mathbf{V}_{km}=\begin{cases}U_{km}\sin k\varphi\cos\varphi-V_{km}\cos k\varphi\sin\varphi\\ U_{km}\sin k\varphi\sin\varphi+V_{km}\cos k\varphi\cos\varphi\\ W_{km}\sin k\varphi\end{cases}$$

$$\mathbf{W}_{km}=\begin{cases}U_{km}\cos k\varphi\cos\varphi+V_{km}\sin k\varphi\sin\varphi\\ U_{km}\cos k\varphi\sin\varphi-V_{km}\sin k\varphi\cos\varphi\\ W_{km}\cos k\varphi\end{cases}\qquad(1.11)$$

Подставляя выражения (1.11) в формулы (1.9), проведем независимое интегрирование по цилиндрической координате φ в пределах от 0 до 2π. Вычисления показывают, что отличными от нуля могут быть только следующие выражения

$$b_{2m12}=b_{2m21}=c_{2m11}=-c_{2m22}=\frac{\pi}{2}\int_{\Omega^*}\rho^2(U_{2m}+V_{2m})\,d\rho\,dz$$

$$b_{1m23}=c_{1m13}=\pi\int_{\Omega^*}\rho z(U_{1m}+V_{1m})\,d\rho\,dz=b_{1m32}=c_{1m31}=\pi\int_{\Omega^*}\rho^2W_{1m}\,d\rho\,dz$$

$$b_{0m21}=-b_{0m12}=\pi\int_{\Omega^*}\rho^2V_{0m}\,d\rho\,dz\qquad(1.12)$$

$$c_{0m11}=c_{0m22}=\pi\int_{\Omega^*}\rho^2U_{0m}\,d\rho\,dz,\qquad c_{0m33}=2\pi\int_{\Omega^*}\rho zW_{0m}\,d\rho\,dz$$

Здесь область Ω^* получена пересечением Ω полуплоскостью, проходящей через ось симметрии Cx_3. Обращаясь к равенствам (1.10) и (1.12) получаем, что $b_{0m12}=b_{0m21}=0$. Из (1.12) следует, что при движении упругого тела вокруг центра масс по инерции в первом приближении

($|\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)| \ll |\mathbf{r}|$) колебания возбуждаются только по осесимметричным формам, а также по собственным формам с нормами $k=1$ и $k=2$, соответствующим цилиндрической координате φ.

Далее, используя выражения (1.8) и (1.12) запишем уравнения для нормальных координат в матричной форме

$$D(Q+\chi b Q^{\cdot})=P, \quad (q_{km}=p_{km}=0,\ k>2) \tag{1.13}$$

$$Q=(p_{0m},\ q_{1m},\ p_{1m},\ q_{2m},\ p_{2m})^T, \quad D=\operatorname{diag}\{\nu_{0m}^2,\ \nu_{1m}^2,\ \nu_{1m}^2,\ \nu_{2m}^2,\ \nu_{2m}^2\}$$

$$P=\{(\omega_1^2+\omega_2^2+2\omega_3^2)c_{0m11}+(\omega_1^2+\omega_2^2)c_{0m33},$$

$$-2\omega_2\omega_3 b_{1m32},\ -2\omega_1\omega_3 c_{1m13},\ -2\omega_1\omega_2 b_{1m12},\ -(\omega_1^2-\omega_2^2)c_{2m11}\}^T$$

где $\{\ldots\}^T$ — обозначает транспонирование. Уравнение (1.13), полученное из уравнений (1.6) отбрасыванием членов порядка описывает квазистатические режимы деформации и позволяет определить перемещения точек упругой части с погрешностью порядка $O(\varepsilon^2)$.

2. Эволюционные уравнения. Для изучения эволюции вращательного движения упругого тела как целого, введем канонические переменные Андуайе (I_i, φ_i) ($i=1, 2, 3$). Тогда уравнения вращательного движения запишутся так

$$\begin{gathered} I_1^{\cdot}=-\nabla_{\varphi_1}R, \quad I_2^{\cdot}=I_3^{\cdot}=0 \\ \varphi_1^{\cdot}=\nabla_{I_1}R, \quad \varphi_2^{\cdot}=\nabla_{I_2}R, \quad \varphi_3^{\cdot}=0 \end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь функционал Рауса $R[\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}, \mathbf{u}^{\cdot}]$ имеет вид

$$R[\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}, \mathbf{u}^{\cdot}]={}^1/_2(\mathbf{G}-\mathbf{G}_u, J^{-1}[\mathbf{u}](\mathbf{G}-\mathbf{G}_u))-{}^1/_2\int_\Omega \rho_0 \mathbf{u}^{\cdot 2}\,dx+\mathrm{E}[\mathbf{u}],$$

$$\mathbf{G}_u=\int_\Omega [\mathbf{r}+\mathbf{u}]\times\mathbf{u}^{\cdot}\rho_0\,dx$$

Вектор кинетического момента системы будет

$$\mathbf{G}=((I_2^2-I_1^2)^{1/2}\sin\varphi_1,\quad (I_2^2-I_1^2)^{1/2}\cos\varphi_1,\ I_1)$$

Оператор инерции в системе координат $Cx_1x_2x_3$ без учета квадратичных членов по $\mathbf{u}$ равен $J^{-1}[\mathbf{u}]=J_0^{-1}-J_0^{-1}J_1[\mathbf{u}]J_0^{-1}$, $J_0=\operatorname{diag}\{A, A, C\}$, где $J_1[\mathbf{u}]$ — линейная по $\mathbf{u}$ компонента тензора инерции деформированного тела

$$\begin{gathered} J_1[\mathbf{u}]=\|J_{ij}[\mathbf{u}]\|, \quad J_{11}=2\int_\Omega (x_2u_2+x_3u_3)\rho_0\,dx \\ J_{22}=2\int_\Omega (x_1u_1+x_3u_3)\rho_0\,dx, \quad J_{33}=2\int_\Omega (x_1u_1+x_2u_2)\rho_0\,dx \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$J_{12}=J_{21}=-2\int_\Omega x_1u_2\rho_0\,dx,\ J_{13}=J_{31}=-2\int_\Omega x_1u_3\rho_0\,dx,\ J_{23}=J_{32}=-2\int_\Omega x\ u_3\rho_0\,dx$$

По условию задачи тело предполагается достаточно жестким. В предельном случае ($\varepsilon=0$) его деформации отсутствуют $\mathbf{u}=0$, а уравнения (2.1) примут вид

$$\begin{gathered} \varphi_1^{\cdot}=\omega_0=A^{-1}C^{-1}(A-C)I_1, \quad \varphi_2^{\cdot}=A^{-1}I_2, \quad \varphi_3^{\cdot}=0 \\ I_i^{\cdot}=0, \quad (i=1, 2, 3) \end{gathered} \tag{2.3}$$

Уравнения (2.3) описывают регулярную прецессию осесимметричного тела вокруг неизменного по величине и направлению вектора $\mathbf{G}$. Решение уравнения (1.13) ищется в виде ряда по степеням χ при условии, что переменные Андуайе соответствуют уравнениям невозмущенного движения (2.3). Учитывая (1.7) с погрешностью порядка $O(\varepsilon^2)$ достаточно ограничиться первыми двумя членами разложения. Имеем:

$$Q=\left\{\frac{h_{0m}}{\nu_{0m}^2},\ \frac{h_{1m}}{\nu_{1m}^2}\cos(\varphi_1-\alpha_1),\ \frac{h_{1m}}{\nu_{1m}^2}\sin(\varphi_1-\alpha_1),\quad -\frac{h_{2m}}{\nu_{2m}^2}\sin(2\varphi_1-\alpha_2),\right.$$
$$\left.\frac{h_{2m}}{\nu_{2m}^2}\cos(2\varphi_1-\alpha_2)\right\}^{\mathrm{T}} \tag{2.4}$$

$$\cos\alpha_1\cong\cos\alpha_2\cong1,\quad \sin\alpha_1\cong\alpha_1=\chi b\omega_0,\quad \sin\alpha_2\cong\alpha_2=2\chi b\omega_0$$

$$h_{0m}=(g_1+2g_2)c_{0m11}+g_1c_{0m33},\quad h_{1m}=-2g_3b_{1m23}$$

$$h_{2m}=g_1b_{2m12},\quad g_1=A^{-2}(I_2^2-I_1^2),\quad g_2=C^{-2}I_1^2,\quad g_3=A^{-1}C^{-1}I_1(I_2^2-I_1^2)^{1/2}$$

Из (2.4) следует, что осесимметричные деформации упругого тела стационарны. Колебания с номером собственных форм $k=1$ по координате φ возбуждаются на частоте ω_0 вращения тела вокруг оси симметрии Cx_3, а колебания с номером собственных форм $k=2$ возбуждаются на удвоенной частоте вращения $2\omega_0$. Вектор перемещения $\mathbf{u}$ (1.5) с ненулевыми нормальными координатами из (2.4) следует подставить с учетом (2.2) в уравнение для переменной I_1, которое перепишем следующим образом

$$I_1^{\boldsymbol{\cdot}}=A^{-1}(I_2^2-I_1^2)^{1/2}\rho_0\int\limits_{\Omega}\{A^{-1}(I_2^2-I_1^2)^{1/2}[(x_2u_2-x_1u_1)\sin2\varphi_1-$$
$$-2x_1u_2\cos2\varphi_1]+2C^{-1}I_1(x_2u_3\sin\varphi_1-x_1u_3\cos\varphi_1)\}\,dx \tag{2.5}$$

Уравнение (2.5) описывает эволюцию регулярной прецессии упругого тела при движении по инерции вокруг центра масс. Используя метод усреднения, заменим уравнение (2.5) на приближенное, позволяющее выделить главные эволюционные эффекты. Введем дополнительную переменную $\tau=\omega_0t$. В силу уравнений (2.1) и (2.3) в возмущенном движении ($\varepsilon\neq0$) переменная τ изменяется существенно быстрее, чем угол $\delta_2=$ $=\arccos I_1I_2^{-1}$. Усредним правую часть (2.5) по быстрой переменной τ на периоде 2π. Так как $u_i=\mathbf{u}\mathbf{e}_i$, то $\langle u_i\sin\varphi_1\rangle_\tau=\langle\mathbf{u}\sin\varphi_1\rangle_\tau\mathbf{e}_i$, где $\langle\cdot\rangle_\tau=$ $=(2\pi)^{-1}\int\limits_0^{2\pi}(\cdot)d\tau$. Аналогично можно выполнить и другие операции усреднения. Например,

$$\langle\mathbf{u}\sin\varphi_1\rangle_\tau=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{h_{1m}}{\nu_{1m}^2}(\alpha_1\mathbf{V}_{1m}+\mathbf{W}_{1m})$$

Так как при усреднении коэффициенты с номером $k=0$ пропадают, то, следовательно, осесимметричные деформации упругого тела не вызывают эволюции его вращательного движения. После интегрирования в уравнении (2.5) по области Ω получим

$$I_1^{\boldsymbol{\cdot}}=A^{-1}(I_2^2-I_1^2)^{1/2}\rho_0\left\{-2A^{-1}(I_2^2-I_1^2)^{1/2}\alpha_2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{h_{2m}}{\nu_{2m}^2}b_{2m12}+\right.$$
$$\left.+2C^{-1}I_1\alpha_1\sum_{m=0}^{\infty}\frac{h_{1m}}{\nu_{1m}^2}b_{1m23}\right\} \tag{2.6}$$

Далее, подстановкой в (2.6) h_{1m}, h_{2m}, α_1, α_2 преобразуем его к виду

$$I_1^{\cdot}=4\chi b\rho_0 A^{-3}C^{-1}(C-A)I_1(I_2^2-I_1^2)\left[A^{-2}(I_2^2-I_1^2)n_2+C^{-2}I_1^2 n_1\right]$$
$$n_1=\sum_{m=0}^{\infty} b_{1m23}^2/\nu_{1m}^2>0, \qquad n_2=\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m12}^2/\nu_{2m}^2>0 \tag{2.7}$$

Знак правой части (2.7) совпадает со знаком $C-A$. В случае $C>A$ производная $I_1^{\cdot}>0$ и переменная I_1 монотонно возрастает. В случае $C<A$ производная $I_1^{\cdot}<0$ и переменная I_1 монотонно убывает. Стационарными движениями системы будут

$$I_1=I_2, \quad I_1=0 \tag{2.8}$$

Из уравнений в вариациях для угла δ_2 вытекает, что первое стационарное движение в (2.8) асимптотически устойчиво при $C>A$ и неустойчиво при $A>C$. Второе стационарное движение асимптотически устойчиво при $A>C$ и неустойчиво при $C>A$. Таким образом, по окончании диссипативной эволюции регулярной прецессии вязкоупругого осесимметричного тела вектор кинетического момента $\mathbf{G}$ расположится либо вдоль оси симметрии Cx_3 (случай $C>A$), либо в экваториальной плоскости эллипсоида инерции (случай $A>C$).

3. Пример с тонким кольцом. Пусть круговое нерастяжимое кольцо постоянного поперечного сечения, размер которого существенно меньше радиуса R_0 окружности кольца, движется около своего центра масс по инерции. Считая поперечное сечение симметричным, ограничимся малыми изгибными колебаниями кольца в своей плоскости в квазистационарном режиме. В этом случае из формулы (1.12) следует, что под действием гироскопических сил происходит возбуждение плоских колебаний с частотой $2\omega_0$ только по собственной форме с номером $k=2$ по цилиндрической координате φ. В системе координат $Cx_1x_2x_3$ проекции исходной собственной формы будут

$$\mathbf{V}_2=(U_2\sin 2\varphi\cos\varphi-V_2\cos 2\varphi\sin\varphi,\ U_2\sin 2\varphi\sin\varphi+V_2\cos 2\varphi\cos\varphi,\ 0) \tag{3.1}$$

Так как для всех точек недеформированного кольца цилиндрические координаты $\rho=R_0=\mathrm{const}$ и $z=0$, то функции U_2 и V_2 являются постоянными, и будут определены ниже.

Подставляя в уравнение (2.7) $n_1=0$ перепишем его в виде

$$I_1^{\cdot}=2\chi b\rho_* A^{-5}I_1(I_2^2-I_1^2)^2 n_2, \qquad n_2=b_{212}^2/\nu_2^2, \qquad \nu_2=(3/\pi)(\mathrm{E}J/5\rho_* R_0^4)^{1/2}$$

ν_2 — частота собственных колебаний по основной форме [5], Е — модуль упругости, $\rho_*=\rho_0 S$ — линейная плотность материала кольца, J, S — соответственно момент инерции и площадь поперечного сечения кольца.

Далее, из условия ортонормированности собственных форм, используя (3.1), получим

$$\int_0^{2\pi}\mathbf{V}_2\mathbf{V}_2\,d\varphi=\pi(U_2^2+V_2^2)=1 \tag{3.2}$$

Условие нерастяжимости кольца при изгибных колебаниях в первом приближении представляется в виде [5]:

$$\vartheta_1=\partial\vartheta_2/\partial\varphi \tag{3.3}$$

где $\vartheta_1=U_2\sin 2\varphi$, $\vartheta_2=V_2\cos 2\varphi$. Отметим, что ϑ_1 описывает радиальное перемещение точки кольца, а ϑ_2 — его касательное перемещение. Из (3.3) получим: $U_2=-2V_2$, а из (3.2) определим $U_2=-2/(5\pi)^{1/2}$, $V_2=1/(5\pi)^{1/2}$. Тогда коэффициент b_{212} будет: $b_{212}^2=\pi R_0^4/20$, а $n_2=\pi^3R_0^8\rho_*/(36\mathrm{E}J)$.

4. Динамический случай. Пусть движение системы как целого вокруг центра масс происходит под действием осциллирующего момента, так что частоты движения сравнимы с одной из собственных частот, при этом необходимо учитывать в (1.6) инерционные члены. (Предположение о малости деформаций сохраняется). Для такой динамической постановки задачи зафиксируем номер $k=2$ и произвольный номер m собственной формы. В этом случае вектор угловой скорости подвижной системы координат будет

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_*-\boldsymbol{\psi}, \quad \boldsymbol{\omega}_*=J_0^{-1}\mathbf{G}=(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

$$\boldsymbol{\psi}=J_0^{-1}J_1[\mathbf{u}]J_0^{-1}\mathbf{G}=-2\rho_0 h_{2m12}A^{-2}(I_2^2-I_1^2)^{1/2}(p_{2m}\sin\varphi_1+q_{2m}\cos\varphi_1,$$

$$q_{2m}\sin\varphi_1-p_{2m}\cos\varphi_1,\ 0)$$

В дальнейшем индекс $2m$ опускаем. Вычисляя, найдем

$$(\boldsymbol{\omega}_*\times[\boldsymbol{\omega}_*\times\mathbf{u}], \mathbf{V})=[(n_{11}+n_{22})\Lambda_{11}+n_{33}\Lambda_{33}]q$$

$$(\boldsymbol{\omega}_*\times[\boldsymbol{\omega}_*\times\mathbf{u}], \mathbf{W})=[(n_{11}+n_{22})\Lambda_{11}+n_{33}\Lambda_{33}]p \qquad (4.1)$$

$$\Lambda_{ii}=\int_\Omega(\mathbf{V}\mathbf{e}_i)^2\,dx=\int_\Omega(\mathbf{W}\mathbf{e}_i)^2\,dx, \qquad (i=1,2,3)$$

$$(\boldsymbol{\omega}_*\times\mathbf{u}^\cdot, \mathbf{V})=-2\omega_3B_{12}p^\cdot, \quad (\boldsymbol{\omega}_*\times\mathbf{u}^\cdot, \mathbf{W})=2\omega_3B_{12}q^\cdot$$

$$(\boldsymbol{\omega}_*^\cdot\times\mathbf{u}, \mathbf{V})=(\boldsymbol{\omega}_*^\cdot\times\mathbf{u}, \mathbf{W})=0, \qquad B_{12}=\int_\Omega(\mathbf{V}\mathbf{e}_1)(\mathbf{W}\mathbf{e}_2)\,dx$$

Справедливы следующие равенства

$$(\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}], \mathbf{V})=(\boldsymbol{\omega}_*\times[\boldsymbol{\omega}_*\times\mathbf{r}], \mathbf{V})+$$

$$+(\boldsymbol{\omega}_*, 2\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{V})-\mathbf{V}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\psi})-\mathbf{r}(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{V})= \qquad (4.2)$$

$$=(\boldsymbol{\omega}_*\times[\boldsymbol{\omega}_*\times\mathbf{r}], \mathbf{V})+4\rho_0 b_{12}^2A^{-1}g_1q,$$

$$(\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}], \mathbf{W})=(\boldsymbol{\omega}_*\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}], \mathbf{W})+4\rho_0 b_{12}^2A^{-1}g_1p$$

С учетом (4.1) и (4.2) уравнение (1.6) для нормальных координат представимо в виде

$$q^{\cdot\cdot}+a_1q^\cdot+a_2q-a_3p^\cdot=-a_4\sin 2\varphi_1 \qquad (4.3)$$

$$p^{\cdot\cdot}+a_1p^\cdot+a_2p+a_3q^\cdot=a_4\cos 2\varphi_1$$

$$a_1=\chi b\nu^2, \quad a_3=4\omega_3B_{12}, \quad a_4=g_1b_{12}$$

$$a_2=\nu^2-[(g_1+2g_2)\Lambda_{11}+g_1\Lambda_{33}]+4\rho_0b_{12}^2A^{-1}g_1$$

Уравнения колебаний (4.3) решаются совместно с уравнениями, описывающими движение тела как целого в переменных Андуайе.

Авторы благодарят В. Ф. Журавлева за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вильке В. Г.* Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы. М.: Изд-во МГУ, 1986. 192 с.
2. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
3. *Вильке В. Г.* Об инерциальных свойствах собственных форм осесимметричного упругого тела // Вестн. МГУ. Сер. 1 Математика, механика. 1986. № 2. С. 66–72.
4. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
5. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.VI.1989