МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1991

УДК 539.214; 539.374

Е. И. РЫЖАК

К ВОПРОСУ ОБ ОСУЩЕСТВИМОСТИ ОДНОРОДНОГО ЗАКРИТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРИ ИСПЫТАНИЯХ В ЖЕСТКОЙ ТРЕХОСНОЙ МАШИНЕ

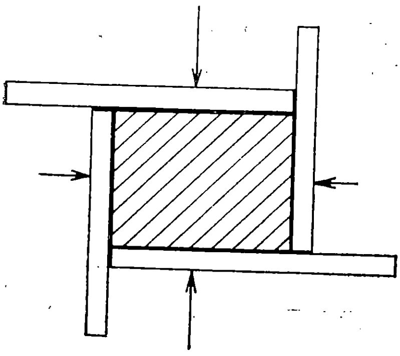
Изучается устойчивость процесса закритического деформирования материалов при испытаниях. Принимаемые конфигурации образца и граничные условия являются идеализацией таковых в реально существующих жестких трехосных машинах. Анализ основывается на определении устойчивости, данном Д. Друккером, и на доказанной в работе теореме типа теоремы Ван Хофа (о достаточных условиях устойчивости однородных тел). Показано, что однородное закритическое деформирование ортотропных тел с симметричным тензором жесткостей в идеализированной машине указанного типа устойчиво вплоть до нарушения условий Адамара (т. е. до абсолютного предела теоретически допустимых состояний материала). Поэтому нет оснований отвергать как заведомо ошибочную интерпретацию соответствующих экспериментальных данных в терминах присущего материалу свойства разупрочнения, которое может быть наглядно представлено в виде «падающего» участка диаграммы деформирования.

1. Введение. Данная работа является продолжением работы [1] и посвящена дальнейшему изучению закритического поведения тел при испытаниях. Вопрос об интерпретации имеющихся многочисленных данных по закритическому деформированию остается дискуссионным (см. напр. обзор [2]). По мнению автора, имеющееся у определенной части механиков (в основном, теоретиков) недоверие к интерпретации упомянутых данных в терминах присущего материалу свойства разупрочнения обусловлено двумя моментами: (1) интуитивным убеждением в применимости к реальным неодномерным телам тех выводов об устойчивости и неустойчивости, которые получены с помощью традиционных одномерных моделей сплошной среды; (2) отсутствием строгих результатов такого же рода для тех конфигураций и граничных условий, которые были бы хоть сколько-нибудь сопоставимы с реальными условиями проводимых испытаний.

В [1] известные математические результаты (теоремы Адамара и Ван Хофа об устойчивости) и некоторые вытекающие из них следствия были, по существу, интерпретированы как доказательства устойчивости (а значит, и принципиальной осуществимости) закритических состояний материала при определенных условиях. В этой связи были также уточнены те рамки, в которых справедливо перенесение на трехмерные тела выводов, полученных из анализа одномерных моделей: одномерные рассмотрения оказались адекватными лишь в тех случаях, когда виртуальные скорости деформирования имеют диадное строение (комбинация сдвига по системе параллельных плоскостей и растяжения по нормали к ним).

Однако результаты работы [1], хотя и строгие, по двум причинам имеют весьма отдаленное отношение к испытаниям образцов в реально существующих машинах. Во-первых, использование теоремы Ван Хофа предполагает, что в гипотетической испытательной машине полностью предписанным является движение точек поверхности образца (или внешней поверхности обоймы, охватывающей образец и жестко соединенной с ним); реально, таких машин не существует. Во-вторых, изучена устойчивость *состояний равновесия* тела, а не *равновесных процессов*, совершаемых телом, и нет гарантий, что из одного следует другое. Более того, известны примеры, когда равновесное состояние упругопластического тела устойчиво, а процесс — неустойчив (так называемая неустойчивость по Шенли [3, 4]).

В данной работе изучается устойчивость именно процесса закритического однородного пластического деформирования (в частности, однородного состояния равновесия), совершаемого телом в некотором идеализированном варианте реально существующего типа испытательных машин — так называемых жестких трехосных машинах. В этих машинах (плоская схема расположения плит представлена на фиг. 1) поверхность образца скользит по гладкой поверхности плит, образующих прямоугольный параллелепипед, габариты которого изменяются заданным образом. Предписанной, следовательно, является только нормальная составляющая смещения точек поверхности. Теорема Ван Хофа в этом случае для анализа устойчивости непригодна, и в работе доказана и использована другая теорема (типа теоремы Ван Хофа), в которой предполагаются условия проскальзывания на границе (но допускаемый класс тел оказывается более узким, а форма области — не произвольной).



Фиг. 1

Показана устойчивость однородного закритического деформирования однородных ортотропных тел в такой машине вплоть до стадии, когда нарушаются условия Адамара (тогда возникает неустойчивость, которая не может быть подавлена никакими граничными условиями [5, 6]). Достижимая степень закритичности проиллюстрирована на примере некоторых традиционных определяющих соотношений.

2. Определяющие соотношения. Закритические состояния материала. В работе рассматриваются упругопластические (в частности, упругие) материалы. Для дальнейшего анализа понадобится только инкрементальная форма записи определяющего упругопластического закона в конфигурации $\varkappa$ с уже имеющимися ненулевыми напряжениями $\mathbf{T}$.

В данном разделе не будем подробно останавливаться на вопросах, связанных со строгим описанием конфигураций, движений и деформаций,— это будет сделано в следующем разделе. Ограничимся лишь очерком необходимых понятий малых дисторсий, деформаций и поворотов.

Пусть материальные точки тела идентифицируются их радиус-векторами $\mathbf{x}$ в конфигурации $\varkappa$, а в некоторой близкой к $\varkappa$ конфигурации χ радиус-векторы точек задаются равенством:

$$\mathbf{r}(\mathbf{x})=\mathbf{x}+\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

Тогда поле $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x})$ называется полем малых смещений, и ему соответствуют поля малых дисторсий, малых деформаций и малых поворотов (все — тензоры второго ранга):

$$\delta\mathbf{H}\equiv\nabla\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) \tag{2.2}$$

$$\delta\mathbf{D}\equiv{}^1/_2(\nabla\delta\mathbf{u}+(\nabla\delta\mathbf{u})^T) \tag{2.3}$$

$$\delta\boldsymbol{\omega}\equiv{}^1/_2(\nabla\delta\mathbf{u}-(\nabla\delta\mathbf{u})^T) \tag{2.4}$$

Будем считать, что инкрементальная форма упругопластического определяющего закона с гладкой поверхностью текучести для малых деформаций относительно конфигурации $\varkappa$ сводится к кусочно-линейному соотношению между малым приращением тензора напряжений (либо Коши, либо Пиолы,— они различны из-за наличия начальных напряжений) и малой дисторсией в данной материальной точке. Одно из этих линейных соотношений — линеаризованный закон активного пластического нагружения, другое — линеаризованный закон упругой разгрузки. На гиперплоскости (в пространстве малых дисторсий), касательной к поверхности текучести, оба линейных соотношения совпадают.

Рассмотрим сначала инкрементальное соотношение для тензора напряжений Коши:

$$\delta\mathbf{T}=\mathbf{C}:\delta\mathbf{H}, \qquad \mathbf{C}=\begin{cases}\mathbf{C}^p, & \delta\mathbf{H}:\mathbf{S}\geqslant 0\\ \mathbf{C}^e, & \delta\mathbf{H}:\mathbf{S}<0\end{cases} \tag{2.5}$$

где $\mathbf{C}^e$ и $\mathbf{C}^p$ — тензоры (четвертого ранга) жесткостей упругого и пластического откликов, $\mathbf{S}$ — тензор, задающий нормаль к поверхности текучести в пространстве дисторсий, двоеточие соответствует свертке по двум индексам.

Для того, чтобы соотношение (2.5) являлось материально объективным [5], необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathbf{C}:\delta\mathbf{H}=\mathbf{T}\cdot\delta\boldsymbol{\omega}-\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{T}+\mathbf{L}:\delta\mathbf{D} \tag{2.6}$$

Введем для изомеров тензоров четвертого ранга следующее обозначение: справа вверху указывается та перестановка векторов, которую нужно произвести в каждой тетраде, например:

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\otimes\mathbf{c}\otimes\mathbf{d}^{(1342)}\equiv\mathbf{a}\otimes\mathbf{c}\otimes\mathbf{d}\otimes\mathbf{b} \tag{2.7}$$

Заметим, что $\mathbf{L}^{(2134)}=\mathbf{L}$ (в силу симметрии тензоров Коши); без ограничения общности примем, что $\mathbf{L}^{(1243)}=\mathbf{L}$ (т. е. $\mathbf{L}:\delta\mathbf{D}=\mathbf{L}:\delta\mathbf{H}$). Тогда имеем: $\mathbf{C}^e-\mathbf{C}^p=\mathbf{L}^e-\mathbf{L}^p=k^e\boldsymbol{\sigma}\otimes\mathbf{S}$. Последнее равенство является необходимым и достаточным условием того, что два линейных отображения совпадают на гиперплоскости $\delta\mathbf{H}:\mathbf{S}=0$. В силу симметрий тензоров $\mathbf{L}^p$ и $\mathbf{L}^e$ относительно перестановок тензоры $\mathbf{S}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ симметричны.

Для тензора напряжений Пиолы имеем:

$$\delta\mathbf{T}_\varkappa=\mathbf{A}:\delta\mathbf{H} \tag{2.8}$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{L}+\mathbf{T}\otimes\mathbf{I}+{}^1/_2(\mathbf{T}\otimes\mathbf{I}-\mathbf{I}\otimes\mathbf{T})^{(1423)}-{}^1/_2(\mathbf{T}\otimes\mathbf{I}+\mathbf{I}\otimes\mathbf{T})^{(1432)} \tag{2.9}$$

$$\mathbf{A}^e-\mathbf{A}^p=\mathbf{L}^e-\mathbf{L}^p=k^e\boldsymbol{\sigma}\otimes\mathbf{S} \tag{2.10}$$

где $\mathbf{I}$ — единичный тензор второго ранга.

Тензор $\mathbf{A}^e$ — симметричный тензор четвертого ранга ($\mathbf{A}^{e(3412)}=\mathbf{A}^e$, это соответствует перестановке первой пары индексов со второй), поскольку он является второй производной плотности упругой энергии по дисторсии; из (2.9) следует, что тензор $\mathbf{L}^e$ — несимметричный, а симметричным является тензор $\mathbf{L}^{se}\equiv\mathbf{L}^e+{}^1/_2(\mathbf{T}\otimes\mathbf{I}-\mathbf{I}\otimes\mathbf{T})$. В данной работе будем рассматривать такие законы пластичности, для которых $\mathbf{A}^p$ — также симметричный тензор (а вместе с ним и $\mathbf{L}^{sp}\equiv\mathbf{L}^p+{}^1/_2(\mathbf{T}\otimes\mathbf{I}-\mathbf{I}\otimes\mathbf{T})$). Тогда тензор $(\mathbf{A}^e-\mathbf{A}^p)$ — симметричный, и поэтому тензор $\boldsymbol{\sigma}$ коллинеарен тензору $\mathbf{S}$; без ограничения общности можно положить $\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{S}$. Тогда имеем:

$$\mathbf{A}^e=\mathbf{A}^p+k^e\mathbf{S}\otimes\mathbf{S}, \quad \mathbf{L}^e=\mathbf{L}^p+k^e\mathbf{S}\otimes\mathbf{S}, \quad \mathbf{L}^{se}=\mathbf{L}^{sp}+k^e\mathbf{S}\otimes\mathbf{S} \tag{2.11}$$

Будем считать (это принимается почти всегда), что тело при пластическом нагружении не может быть жестче, чем при разгрузке, так что $k^e\geqslant 0$.

Для тензора жесткостей **A** можно записать

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}^p+k\mathbf{S}\otimes\mathbf{S},\quad k=\begin{cases}0, & \delta\mathbf{H}:\mathbf{S}\geqslant 0\\ k^e, & \delta\mathbf{H}:\mathbf{S}<0\end{cases}\tag{2.12}$$

Если ввести тензор

$$\boldsymbol{\Omega}\equiv(\mathbf{L}^{se})^{-1}:\mathbf{S}\tag{2.13}$$

и нормировать **S** таким образом, чтобы $\boldsymbol{\Omega}:\boldsymbol{\Omega}=1$, то

$$k^e=\frac{1}{h+\boldsymbol{\Omega}:\mathbf{S}}=\frac{1}{h+\boldsymbol{\Omega}:\mathbf{L}^e:\boldsymbol{\Omega}}\tag{2.14}$$

где h — пластический модуль материала [7, 1].

Определим теперь, что понимается в данной работе под закритическим состоянием материала (называемым также состоянием разупрочнения и состоянием, соответствующим падающему участку диаграммы материала).

Определение. Закритическим будем называть состояние материала, для которого нарушается постулат Друккера [8], т. е. существуют такие малые деформации $\delta\mathbf{D}$ относительно этого состояния, что

$$\delta\mathbf{D}:\mathbf{L}:\delta\mathbf{D}<0\tag{2.15}$$

Конечно, это только одно из возможных обобщений постулата Друккера на случай конечных деформаций (начальных напряжений).

Заметим, что тензором **L** определяется приращение (коротационное) напряжений Коши, рассчитываемых на единичную площадку в текущей конфигурации тела («истинных» напряжений), поэтому выполнение (2.15) не может трактоваться как уменьшение «номинальных» напряжений в результате уменьшения площади какого-либо сечения тела, в то время как истинные напряжения возрастают (это одно из распространенных «толкований» падающей диаграммы, отрицающих ее реальность). Таким образом, изучаемая в работе закритичность не может быть истолкована как «кажущаяся» — это как раз истинная закритичность (в терминах истинных напряжений).

3. Критерий устойчивости состояния равновесия и процесса равновесного однородного деформирования. Исходя из того, что конечной целью исследования является выяснение вопроса устойчивости процесса однородного деформирования однородного тела в жесткой трехосной машине, ограничимся рассмотрением однородных упругопластических тел, имеющих первоначально и в дальнейшем форму прямоугольного параллелепипеда, габариты которого медленно изменяются заданным образом. Точнее говоря, будем считать, что имеется поверхность прямоугольного параллелепипеда, изменяющегося заданным образом в зависимости от некоторого параметра (этим задается процесс деформирования тела), причем точки поверхности тела могут свободно скользить по этой ведущей поверхности и произвольно двигаться внутри. При этом (в предположении конечности скоростей деформаций) материальные точки поверхности тела не могут переходить с грани на грань, а значит, уходить с ребер и из вершин. Таким образом, движение материальных точек, оказавшихся в вершинах, является предписанным, а движение точек тела, оказавшихся на ребрах, состоит в скольжении вдоль изменяющихся ребер.

Будем считать, что предписанному движению ведущей поверхности соответствует (среди прочих) некоторый процесс равновесного однородного деформирования тела (в ходе которого тело испытывает активное пластическое нагружение), и изучается вопрос о возможности самопроизвольного отклонения процесса деформирования тела от этого однородного процесса, т. е. вопрос об устойчивости однородного процесса. Для отклоненного процесса допускается наличие областей разгрузки.

При изучении устойчивости будем исходить из следующего принципа эквивалентности: если имеются две механические системы, между движениями которых установлено взаимно однозначное соответствие, при котором уравнения движения одной из них переходят в уравнения движения другой, то соответствующие друг другу равновесные движения этих систем могут быть устойчивы или неустойчивы только одновременно. Поэтому изучение устойчивости движений одной системы эквивалентно изучению устойчивости соответствующих движений другой.

С помощью такого принципа эквивалентности исходная задача об устойчивости процесса равновесного однородного деформирования может быть сведена к задаче об устойчивости положения равновесия для некоторого гипотетического тела, заключенного внутри неизменного прямоугольного параллелепипеда с прежним условием свободного проскальзывания на гранях. Исходному однородному процессу деформирования будет соответствовать процесс изменения напряжений и определяющих параметров гипотетического тела при неизменном равновесном положении его материальных точек.

При изучении устойчивости положения равновесия воспользуемся определением, данным Д. Друккером [8].

Определение. Положение равновесия считается устойчивым в малом, если при переходе в силу некоторого процесса из равновесной конфигурации в любую другую (вообще говоря, неравновесную) бесконечно близкую конфигурацию сторонние силы, уравновешивающие тело, совершают положительную работу.

Перейдем к математическому описанию исходного тела и происходящих в нем процессов, а также к описанию соответствующего гипотетического тела.

Обозначим через $\varkappa$ отсчетную конфигурацию исходного тела. Его материальные точки будем идентифицировать с помощью их радиус-векторов $\mathbf{x}$ в отсчетной конфигурации. Произвольная конфигурация χ исходного тела задается отображением

$$\mathbf{r}=\mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\varkappa \tag{3.1}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор материальной точки $\mathbf{x}$ в конфигурации χ.

Исследуемому на устойчивость однородному равновесному процессу отвечает однопараметрическое семейство конфигураций $\chi_0(q)$, т. е. семейство отображений

$$\mathbf{r}=\mathbf{f}_0(\mathbf{x},\ q)=\mathbf{x}_0+(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{F}_0(q) \tag{3.2}$$

Без ограничения общности можно считать, что движение ведущей поверхности задано значениями отображения (3.2) на границе тела ($\mathbf{x}\in\partial\varkappa$).

Хотя вершины и ребра прямоугольного параллелепипеда являются множествами меры нуль на его поверхности, а конечность деформаций исключает возможность появления силовых особенностей, все же не будем сразу выбрасывать их из рассмотрения с тем, чтобы не упустить каких-либо возможных эффектов, связанных с непроизвольностью тангенциальных смещений поверхности тела на этих множествах. Будем считать вершины предельным состоянием зон сцепления с ведущей поверхностью, а ребра — предельным состоянием зон проскальзывания вдоль некоторых прямых, заданных на ведущей поверхности. Как уже говорилось, эти множества состоят из одних и тех же материальных точек, т. е. соответствующие подобласти $\partial\varkappa$ неизменны. Обозначим их через Σ_1 (сцепление) и Σ_2 (скольжение вдоль прямых); через Σ_3 обозначим совокупность подобластей свободного проскальзывания на $\partial\varkappa$ (собственно грани).

Для произвольного процесса деформирования тела $\chi(q)$, задаваемого семейством отображений

$$\mathbf{r}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\ q) \tag{3.3}$$

текущее положение зон Σ_1, Σ_2 и Σ_3 совпадает с их текущим положением в процессе $\chi_0(q)$; в равной мере это относится и к области, занимаемой телом. Если ввести обратное по пространственной переменной отображение

$$\mathbf{y}=\mathbf{f}_0^{-1}(\mathbf{r}, q)=\mathbf{x}_0+(\mathbf{r}-\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{F}_0^{-1}(q) \tag{3.4}$$

то этот факт можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered}\mathbf{x}\in\varkappa\Rightarrow\mathbf{y}=\mathbf{f}_0^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, q), q)\equiv\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, q)\in\varkappa\\ \mathbf{x}\in\Sigma_j,\quad j=1, 2, 3,\Rightarrow\mathbf{y}=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, q)\in\Sigma_j\end{gathered} \tag{3.5}$$

Введенное в (3.5) семейство отображений $\mathbf{y}=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, q)$ можно рассматривать как процесс деформирования $\eta(q)$ некоторого тела, помещенного внутрь поверхности неизменного прямоугольного параллелепипеда $\partial\varkappa$ с условием проскальзывания вдоль граней. Исходному процессу $\chi_0(q)$ соответствует тождественный процесс $\eta_0(q)=\varkappa$, т. е.

$$\mathbf{y}=\boldsymbol{\varphi}_0(\mathbf{x}, q)\equiv\mathbf{f}_0^{-1}(\mathbf{f}_0(\mathbf{x}, q), q)=\mathbf{x} \tag{3.6}$$

Всякому процессу $\chi(q)$, отличному от $\chi_0(q)$, соответствует процесс $\eta(q)$, отличный от тождественного. Соответствие между процессами $\chi(q)$ и $\eta(q)$ является взаимно однозначным.

Сделаем некоторые дополнительные предположения, касающиеся рассматриваемых процессов $\chi(q)$. Будем считать, что отображения $\mathbf{f}(\mathbf{x}, q)$ совпадают с $\mathbf{f}_0(\mathbf{x}, q)$ вплоть до некоторого значения параметра $q=q_0$, а при $q>q_0$ совпадения уже нет; $\mathbf{f}(\mathbf{x}, q)$ дважды кусочно-непрерывно дифференцируемо по q; при $q=q_0$ непрерывность $\mathbf{f}(\mathbf{x}, q)$ не нарушается, а производные по q, в том числе и первые, могут терпеть разрыв. Что касается пространственной переменной, то $\mathbf{f}(\mathbf{x}, q)$ непрерывно по $\mathbf{x}$ при всех значениях q, при $q\leqslant q_0$ $\mathbf{f}(\mathbf{x}, q)$ непрерывно дифференцируемо (совпадает с $\mathbf{f}_0(\mathbf{x}, q)$), при $q>q_0$ $\mathbf{f}(\mathbf{x}, q)$ кусочно-непрерывно дифференцируемо по $\mathbf{x}$, причем множества разрыва градиента, зарождающиеся при $q=q_0+0$, являются материальными поверхностями, т. е. поверхностями, неизменными в $\varkappa$. Совокупности таких поверхностей, различные для различных процессов, обозначим через Σ_f.

Напряжения в исходном теле в процессе деформирования будем описывать с помощью тензоров напряжений Пиолы $\mathbf{T}_\varkappa(\mathbf{x}, q)$, которые удовлетворяют соотношению безмоментности:

$$\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{T}_\varkappa=\mathbf{T}_\varkappa^T\cdot\mathbf{F},\quad \mathbf{F}(\mathbf{x}, q)\equiv\nabla\mathbf{f}(\mathbf{x}, q) \tag{3.7}$$

Для равновесного процесса в предположении отсутствия массовых сил имеем:

$$\nabla\cdot\mathbf{T}_{\varkappa0}=0 \tag{3.8}$$

$$\forall\mathbf{n},\quad (|\mathbf{n}|=1),\quad \forall\mathbf{x}\in\operatorname{int}(\varkappa):\quad [\mathbf{n}\cdot\mathbf{T}_{\varkappa0}]_-^+=0 \tag{3.9}$$

где дивергенция берется по отношению к отсчетной конфигурации, $\operatorname{int}(\varkappa)$ — множество внутренних точек $\varkappa$, $\mathbf{n}$ — нормаль к некоторой площадке, проходящей через точку $\mathbf{x}$, $[\quad]_-^+$ — скачок некоторой величины на этой площадке. На границе тела равны нулю проекции усилий на направления возможных перемещений:

$$\mathbf{x}\in\Sigma_2\quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}_{\varkappa0}\cdot\boldsymbol{\mu}=0 \tag{3.10}$$

$$\mathbf{x}\in\Sigma_3\quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}_{\varkappa0}\cdot(\mathbf{I}-\boldsymbol{\nu}\otimes\boldsymbol{\nu})=0 \tag{3.11}$$

где $\boldsymbol{\mu}$ — текущее значение направляющих векторов ребер, $\boldsymbol{\nu}$ — нормали к текущему положению граней, $\mathbf{I}$ — единичный тензор второго ранга. В зоне сцепления ($\mathbf{x}\in\Sigma_1$) усилия произвольны.

В качестве параметра q примем «медленное» время ξt, где ξ — малый параметр. Запишем уравнения движения исходного тела и преобразуем их определенным образом с тем, чтобы перейти к уравнениям движения гипотетического тела:

$$\rho_\varkappa \mathbf{r}^{\cdot\cdot}=\nabla\cdot\mathbf{T}_\varkappa \tag{3.12}$$

($\rho_\varkappa$ — плотность в конфигурации $\varkappa$, точки в верхнем индексе означают материальные производные по времени соответствующего порядка, т. е. производные при $\mathbf{x}=\mathrm{const}$). Выразим $\mathbf{r}^{\cdot\cdot}$ через $\mathbf{y}$ и его производные:

$$\mathbf{r}=\mathbf{f}_0(\mathbf{y}(\mathbf{x},\ t),\ \xi t)=\mathbf{x}_0+(\mathbf{y}(t)-\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{F}_0(\xi t) \tag{3.13}$$

$$\mathbf{r}^{\cdot}=\mathbf{y}^{\cdot}\cdot\mathbf{F}_0+\xi(\mathbf{y}-\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{F}_0'(\xi t) \tag{3.14}$$

$$r^{\cdot\cdot}=y^{\cdot\cdot}\cdot\mathbf{F}_0+2\xi\mathbf{y}^{\cdot}\cdot\mathbf{F}_0'+\xi^2(\mathbf{y}-\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{F}_0'' \tag{3.15}$$

где штрих означает производную по q. Для основного процесса $\mathbf{y}(\mathbf{x},t)=\mathbf{x}$ и

$$\mathbf{r}^{\cdot\cdot}=\xi^2(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{F}_0'' \tag{3.16}$$

Поскольку основной процесс считается равновесным, можно или положить, что $\mathbf{F}_0''=0$, или принять, что членами второго и выше порядков по ξ мы пренебрегаем. С учетом этого, подставляя (3.15) в (3.12) и умножая обе части уравнения на $\mathbf{F}_0^{-1}$, получим:

$$\rho_\varkappa\mathbf{y}^{\cdot\cdot}=(\nabla\cdot\mathbf{T}_\varkappa)\cdot\mathbf{F}_0^{-1}-2\xi y^{\cdot}\cdot\mathbf{F}_0'\cdot\mathbf{F}_0^{-1} \tag{3.17}$$

Тензор $\mathbf{F}_0$ не зависит от $\mathbf{x}$, поэтому его можно внести под знак дивергенции. Введем обозначения:

$$\mathbf{\Pi}_\varkappa\equiv\mathbf{T}_\varkappa\cdot\mathbf{F}_0^{-1},\quad \mathbf{\Phi}\equiv\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}_0^{-1}=\nabla\varphi \tag{3.18}$$

Тогда (3.17) запишется как уравнение движения гипотетического тела с радиус-вектором частиц $\mathbf{y}(\mathbf{x},\ t)$ и напряжениями Пиолы $\mathbf{\Pi}_\varkappa$ в отсчетной конфигурации $\varkappa$:

$$\rho_\varkappa\mathbf{y}^{\cdot\cdot}=\nabla\cdot\mathbf{\Pi}_\varkappa-\rho_\varkappa\mathbf{y}^{\cdot}\cdot(2\xi\rho_\varkappa^{-1}\mathbf{F}_0'\cdot\mathbf{F}_0^{-1}) \tag{3.19}$$

Нетрудно убедиться, что $\mathbf{\Phi}^T\cdot\mathbf{\Pi}_\varkappa=\mathbf{\Pi}_\varkappa^T\cdot\mathbf{\Phi}$, т. е. введенные «напряжения» удовлетворяют условию безмоментности для напряжений Пиолы. Кроме того, поскольку $\mathbf{f}_0(\mathbf{x})$ и $\mathbf{f}_0^{-1}(\mathbf{r})$ переводят прямоугольный параллелепипед в прямоугольный же параллелепипед, то $\mathbf{F}_0^{-1}$ переводит нормали к $\partial\chi$ в нормали к $\partial\varkappa$ $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}_0^{-1}\times\mathbf{n}=0)$, и условие свободного проскальзывания на поверхности исходного тела переходит в условие свободного проскальзывания на поверхности гипотетического тела.

В уравнение (3.19) входит поле массовых вязких сил, причем тензор коэффициентов вязкого сопротивления однороден и сколь угодно мал для достаточно медленного основного процесса. Однако, поскольку главные вязкости (т. е. собственные значения этого тензора) могут быть отрицательны, а отрицательная вязкость, даже сколь угодно малая, вызывает неустойчивость в системах с положительной жесткостью, то просто отбросить вязкие силы на том основании, что они малы, нельзя. Если же принять во внимание, что реальные тела обладают вязкостью, пусть малой, но положительной и при этом не зависящей от темпа основного процесса, то эта вязкость будет «унаследована» и гипотетическим телом, и соответствующая ей положительная работа вязких напряжений для произвольных движений при достаточно малых значениях ξ подавит отрицательную работу вязких массовых сил (можно дать строгие оценки с помощью функциональных неравенств для $\mathbf{y}^{\cdot}$ и $\nabla\mathbf{y}^{\cdot}$). Таким образом, итоговая эффективная вязкость в системе «гипотетическое тело + массовые силы» для достаточно медленного основного процесса положительна, а положительная вязкость устойчивости не ухудшает. С учетом всего этого малые вязкие силы в (3.19) могут быть отброшены, и, в соответствии с принятым принципом эквивалентности, исследование устойчивости достаточно медленного процесса однородного деформирования исходного тела сводится к исследованию устойчивости статической медленной эволюции гипотетического тела $\{\mathbf{y}, \mathbf{\Pi}_\varkappa\}$, определяющие соотношения которого, унаследованные от определяющих соотношений исходного тела,— это упругопластические соотношения при наличии заданным образом изменяющихся деформаций немеханической природы (аналогичных температурным деформациям и т. п.). Граничные условия для гипотетического тела те же, что и для исходного, но только на поверхности неизменного прямоугольного параллелепипеда.

На основе приведенного выше определения Д. Друккера дадим математическую формулировку критерия устойчивости положения равновесия гипотетического тела.

Допустим, что в силу некоторого процесса $\eta(q)$, $\eta(q_0)=\varkappa$ гипотетическое тело отклоняется от равновесной конфигурации $\varkappa$. Конфигурации процесса $\eta(q)$, вообще говоря, не являются равновесными, но будем считать, что имеются сторонние силы, объемные и поверхностные, которые уравновешивают тело в этих конфигурациях:

$$\mathbf{x}\in\operatorname{int}(\varkappa)\setminus\Sigma_f:\quad \nabla\cdot\mathbf{\Pi}_\varkappa+\mathbf{b}^{ex}=0,\quad \mathbf{b}^{ex}(\mathbf{x}, q_0)=0 \tag{3.20}$$

$$\mathbf{x}\in\Sigma_f:\quad [\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Pi}_\varkappa]_-^+ +\mathbf{c}^{ex}=0,\quad \mathbf{c}^{ex}(\mathbf{x}, q_0)=0 \tag{3.21}$$

$$\mathbf{x}\in\partial\varkappa:\quad \mathbf{t}^{ex}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Pi}_\varkappa \tag{3.22}$$

В силу гладкости отображения $\mathbf{f}_0(\mathbf{x}, q)$ множество Σ_f — это одновременно и совокупность поверхностей разрыва $\nabla\boldsymbol{\varphi}$. В (3.22) учтено, что при наличии кинематических связей сторонние силы задаются с точностью до реакций связей, и в данном случае эти реакции выбраны вполне конкретным образом; при $q=q_0$ усилия $\mathbf{t}^{ex}$ — это чистые реакции связей, не производящие работы при движениях, совместимых со связями.

Для работы сторонних сил на некотором малом начальном участке (q_0, q_0+a) процесса $\eta(q)$ имеем:

$$W^{ex}(a)=\int\limits_{q_0}^{q_0+a} dq\left(\int\limits_{\varkappa}\mathbf{b}^{ex}\cdot\mathbf{y}'\,dV+\int\limits_{\Sigma_f}\mathbf{c}^{ex}\cdot\mathbf{y}'\,d\Sigma+\int\limits_{\partial\varkappa}\mathbf{t}^{ex}\cdot\mathbf{y}'\,d\Sigma\right) \tag{3.23}$$

$$W^{ex}(a)=aW^{ex\prime}(q_0+0)+{}^1/_2a^2W^{ex\prime\prime}(q_0+0)+o(a^2) \tag{3.24}$$

$$W^{ex\prime}(q_0+0)=\int\limits_{\varkappa}\mathbf{b}^{ex}(q_0)\cdot\mathbf{y}'\,dV+\int\limits_{\Sigma_f}\mathbf{c}^{ex}(q_0)\cdot\mathbf{y}'\,d\Sigma+\int\limits_{\partial\varkappa}\mathbf{t}^{ex}(q_0)\cdot\mathbf{y}'\,d\Sigma=0 \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}W^{ex\prime\prime}(q_0+0)&=\int\limits_{\varkappa}\mathbf{b}^{ex\prime}\cdot\mathbf{y}'\,dV+\int\limits_{\Sigma_f}\mathbf{c}^{ex\prime}\cdot\mathbf{y}'\,d\Sigma+\int\limits_{\partial\varkappa}\mathbf{t}^{ex\prime}\cdot\mathbf{y}'\,d\Sigma+\int\limits_{\varkappa}\mathbf{b}^{ex}\cdot\mathbf{y}''\,dV+\\&+\int\limits_{\Sigma_f}\mathbf{c}^{ex}\cdot\mathbf{y}''\,d\Sigma+\int\limits_{\partial\varkappa}\mathbf{t}^{ex}\cdot\mathbf{y}''\,d\Sigma=-\int\limits_{\varkappa}(\nabla\cdot\mathbf{\Pi}_\varkappa')\cdot\mathbf{y}'\,dV-\\&-\int\limits_{\Sigma_f}[\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Pi}_\varkappa']_-^+\cdot\mathbf{y}'\,d\Sigma+\int\limits_{\partial\varkappa}\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Pi}_\varkappa'\cdot\mathbf{y}'\,d\Sigma\end{aligned} \tag{3.26}$$

Поясним исчезновение последнего из интегралов, содержащих $\mathbf{y}''(\mathbf{x}, q_0)$: граничные точки гипотетического тела скользят по граням и ребрам неподвижного прямоугольного параллелепипеда; т. к. грани — плоские, а ребра — прямые, то $\mathbf{y}''$, так же как и $\mathbf{y}'$, лежат, соответственно, в плоскостях граней и на прямых ребер и, следовательно, ортогональны их реакциям.

Заметим, что для изменяющегося, но остающегося при этом равновесным поля напряжений $\mathbf{\Pi}_{\varkappa 0}(\mathbf{x}, q)$ и его производная по q также удовлетворяет уравнениям равновесия внутри тела и на его поверхности. Поэтому

$$W^{\mathrm{ex}\prime\prime}(q_0+0) = -\int_{\varkappa} (\nabla\cdot(\mathbf{\Pi}_{\varkappa}' - \mathbf{\Pi}_{\varkappa 0}'))\cdot\mathbf{y}'\, dV -$$

$$-\int_{\Sigma_f} [\mathbf{n}\cdot(\mathbf{\Pi}_{\varkappa}' - \mathbf{\Pi}_{\varkappa 0}')]_-^+\cdot\mathbf{y}'\, d\Sigma + \int_{\partial\varkappa} \mathbf{n}\cdot(\mathbf{\Pi}_{\varkappa}' - \mathbf{\Pi}_{\varkappa 0}')\cdot\mathbf{y}'\, d\Sigma$$

Применяя теорему Гаусса — Остроградского, получим

$$W^{\mathrm{ex}\prime\prime}(q_0+0) = \int_{\varkappa} (\mathbf{\Pi}_{\varkappa}' - \mathbf{\Pi}_{\varkappa 0}') : \nabla\mathbf{y}'\, dV > 0 \qquad (3.27)$$

Положительность интеграла в правой части (3.27) означает положительность $W^{\mathrm{ex}\prime\prime}(q_0+0)$ и, следовательно, положительность $W^{\mathrm{ex}}(a)$ при малых значениях a, т. е. устойчивость в малом статической эволюции гипотетического тела, и, одновременно, в силу принятого принципа эквивалентности, устойчивость в малом процесса медленного однородного деформирования исходного тела. Выразим этот интеграл через величины, относящиеся к исходному телу:

$$\mathbf{\Pi}_{\varkappa}' - \mathbf{\Pi}_{\varkappa 0}'|_{q=q_0+0} = (\mathbf{T}_{\varkappa}' - \mathbf{T}_{\varkappa 0}')\cdot\mathbf{F}_0^{-1} + (\mathbf{T}_{\varkappa} - \mathbf{T}_{\varkappa 0})\cdot(\mathbf{F}_0^{-1})' = \mathbf{T}_{\varkappa}' - \mathbf{T}_{\varkappa 0}' \qquad (3.28)$$

$$\nabla\mathbf{y}'|_{q=q_0+0} = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}_0^{-1})'|_{q=q_0+0} = \mathbf{F}' - \mathbf{F}_0' \qquad (3.29)$$

$$W^{\mathrm{ex}\prime\prime}(q_0+0) = \int_{\varkappa} (\mathbf{T}_{\varkappa}' - \mathbf{T}_{\varkappa 0}') : (\mathbf{F}' - \mathbf{F}_0')\, dV > 0 \qquad (3.30)$$

Заметим, что неравенство (3.30) может быть получено непосредственно из определения Д. Друккера устойчивости процесса квазистатического деформирования, которое гласит, что положительной должна быть работа уравновешивающих сторонних сил на перемещениях, дополнительных к основному процессу. Однако, по мнению самого Д. Друккера [8], это определение не имеет ясной физической интерпретации, поскольку содержит «нефизическую» величину — работу на дополнительных перемещениях (в отличие от определения устойчивости положения равновесия, от которого мы и отталкивались).

С учетом инкрементальных определяющих упругопластических соотношений (2.8), а также с учетом симметрии скалярного произведения тензоров второго ранга, получим:

$$W^{\mathrm{ex}\prime\prime}(q_0+0) = \int_{\varkappa} (\mathbf{F}' - \mathbf{F}_0') : (\mathbf{A}:\mathbf{F}' - \mathbf{A}^p:\mathbf{F}_0')\, dV \qquad (3.31)$$

Воспользуемся соотношением (2.12):

$$W^{\mathrm{ex}\prime\prime}(q_0+0) = \int_{\varkappa} (\mathbf{F}' - \mathbf{F}_0') : (\mathbf{A}^p : \mathbf{F}' + k\mathbf{S}(\mathbf{S}:\mathbf{F}') - \mathbf{A}^p : \mathbf{F}_0')\, dV =$$

$$= \int_{\varkappa} (\nabla\mathbf{y}' : \mathbf{A}^p : \nabla\mathbf{y}' + k(\mathbf{S}:\mathbf{F}')^2 - k(\mathbf{S}:\mathbf{F}_0')(\mathbf{S}:\mathbf{F}'))\, dV \geqslant \int_{\varkappa} \nabla\mathbf{y}' : \mathbf{A}^p : \nabla\mathbf{y}'\, dV \qquad (3.32)$$

Здесь учтена активность основного однородного процесса, т. е. положительность величины $\mathbf{S}:\mathbf{F}_0'$, и неположительность произведения $k(\mathbf{S}:\mathbf{F}')$.

Таким образом, получено, что достаточным условием устойчивости в малом для медленного процесса активного пластического однородного деформирования однородного тела внутри изменяющегося прямоугольного параллелепипеда с гладкими стенками является положительная определенность квадратичного функционала

$$R^p\{\mathbf{u}\}\equiv\int\limits_{\varkappa}\nabla\mathbf{u}:\mathbf{A}^p:\nabla\mathbf{u}\,dV>0 \tag{3.33}$$

на полях виртуальных скоростей, соответствующих условиям проскальзывания при фиксированном положении граней параллелепипеда. Иначе говоря, достаточное условие устойчивости такого процесса — это устойчивость в малом положения равновесия при фиксированном положении граней для эквивалентного упругого тела с жесткостью $\mathbf{A}^p$ (аналог принципа равноактивной бифуркации [3, 4]).

В дальнейшем будет показано, что для однородных ортотропных тел с плоскостями ортотропии, параллельными плоскостям граней параллелепипеда, достаточным условием положительной определенности $R^p\{\mathbf{u}\}$ является выполнение условия Адамара для тензора $\mathbf{A}^p$ (это же условие является и необходимым в силу теоремы Адамара [5], распространенной на случай упругопластических тел [6]). Доказательство соответствующей математической теоремы (аналога теоремы Ван Хофа) дано в следующем разделе.

4. Теорема типа теоремы Ван Хофа. Введем некоторые необходимые понятия и сформулируем, прежде всего, классическую теорему Ван Хофа [9, 5, 10].

Определение. Будем называть тензор четвертого ранга $\mathbf{A}$ адамаровым, если для него выполняется строгое неравенство Адамара, т. е. если для любых двух ненулевых векторов $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$

$$\mathbf{g}_1\otimes\mathbf{g}_2:\mathbf{A}:\mathbf{g}_1\otimes\mathbf{g}_2>0 \tag{4.1}$$

Если ввести обозначение

$$a\equiv\min_{|\mathbf{g}_1|\cdot|\mathbf{g}_2|=1}\mathbf{g}_1\otimes\mathbf{g}_2:\mathbf{A}:\mathbf{g}_1\otimes\mathbf{g}_2 \tag{4.2}$$

то нетрудно убедиться, что $\mathbf{g}_1\otimes\mathbf{g}_2:\mathbf{A}:\mathbf{g}_1\otimes\mathbf{g}_2\geqslant a\mathbf{g}_1\otimes\mathbf{g}_2:\mathbf{g}_1\otimes\mathbf{g}_2=a|\mathbf{g}_1|^2|\mathbf{g}_2|^2$ и тензор $\mathbf{A}$ является адамаровым тогда и только тогда, когда $a>0$.

При формулировании теоремы Ван Хофа будем считать пространство трехмерным (она справедлива, вообще говоря, в n-мерном); условия, которые мы будем накладывать на области и векторные поля, вообще говоря, могут быть несколько ослаблены.

Теорема Ван Хофа. Если $\varkappa$ — ограниченная область в R^3 с кусочно гладкой границей (необязательно односвязная), $\mathbf{A}_0$ — адамаров тензор, $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — непрерывное кусочно-гладкое векторное поле, обращающееся в нуль на границе области $\partial\varkappa$ и не равное нулю тождественно, то имеет место неравенство:

$$R_0\{\mathbf{u}\}\equiv\int\limits_{\varkappa}\nabla\mathbf{u}:\mathbf{A}_0:\nabla\mathbf{u}\,dV\geqslant a_0\int\limits_{\varkappa}\nabla\mathbf{u}:\nabla\mathbf{u}\,dV>0 \tag{4.3}$$

(первое неравенство справедливо и для тензора, не являющегося адамаровым).

Нетривиальность утверждения теоремы заключается в том, что подынтегральная функция может принимать как положительные, так и отрицательные значения, это не противоречит неравенству Адамара, т. к. не все тензоры второго ранга являются диадами. Более того, неравенство Адамара (правда, нестрогое) является необходимым условием положительной определенности фунционала $R_0\{\mathbf{u}\}$ (теорема Адамара); из теоремы Ван Хофа следует, что оно же (в строгом варианте) является и достаточным условием, так что утверждение теоремы в некотором смысле максимально.

Требование постоянства (однородности) тензора $\mathbf{A}_0$ и, в особенности, требование обращения в нуль поля $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ на границе сильно сужают приложения теоремы Ван Хофа в задачах устойчивости. Если первое требование можно определенным образом обходить, не выходя за рамки самой теоремы [1], то обойти второе требование, оставаясь в рамках теоремы, невозможно. Однако для двух специальных (но достаточно широких) классов тензоров $\mathbf{A}_0$ и специального класса конфигураций области $\varkappa$ может быть сформулирована и доказана другая теорема (аналогичная теореме Ван Хофа), в которой на всей границе или на ее части условие «прилипания» $\mathbf{u}|_{\partial\varkappa}=0$ заменено условием «проскальзывания» $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\varkappa}=0$.

Упомянутые классы тензоров четвертого ранга — это класс тензоров, имеющих одну плоскость симметрии и класс тензоров, имеющих три взаимно ортогональные плоскости симметрии (ортотропные тензоры). Заметим, что двух ортогональных плоскостей симметрии быть не может: если есть две, то есть и третья.

Будем обозначать элементы представления ортогональной группы в пространстве тензоров четвертого ранга теми же символами, что и соответствующие элементы самой ортогональной группы. Действие ортогонального тензора $\mathbf{Q}$ на тензор $\mathbf{A}$ задается равенством:

$$\mathbf{A}*\mathbf{Q}\equiv\mathbf{A}::(\mathbf{Q}\otimes\mathbf{Q}\otimes\mathbf{Q}\otimes\mathbf{Q}^{(13572468)}) \tag{4.4}$$

Это означает, что каждая тетрада преобразуется по правилу [11]:

$$(\mathbf{a}_1\otimes\mathbf{a}_2\otimes\mathbf{a}_3\otimes\mathbf{a}_4)*\mathbf{Q}=\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{Q}\otimes\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{Q}\otimes\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{Q}\otimes\mathbf{a}_4\cdot\mathbf{Q} \tag{4.5}$$

Для любого $\mathbf{A}$, любого ортогонального $\mathbf{Q}$ и любого тензора второго ранга $\mathbf{H}$:

$$(\mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{Q}):\mathbf{A}*\mathbf{Q}:(\mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{Q})=\mathbf{H}:\mathbf{A}:\mathbf{H} \tag{4.6}$$

Если тензор $\mathbf{A}_0$ инвариантен относительно некоторого ортогонального тензора $\mathbf{Q}_0$, то для любого $\mathbf{H}$:

$$(\mathbf{Q}_0^T\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{Q}_0):\mathbf{A}_0:(\mathbf{Q}_0^T\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{Q}_0)=(\mathbf{Q}_0^T\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{Q}_0):\mathbf{A}_0*\mathbf{Q}_0:(\mathbf{Q}_0^T\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{Q}_0)=\mathbf{H}:\mathbf{A}_0:\mathbf{H} \tag{4.7}$$

Ортогональный тензор $\mathbf{Q}_j$, задающий отражение относительно плоскости с единичной нормалью $\mathbf{e}_j$, имеет вид (условие о суммировании не действует):

$$\mathbf{Q}_j=\mathbf{I}-2\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_j \tag{4.8}$$

Определим тензоры четвертого ранга с симметрией (симметриями).

Определение. Тензор четвертого ранга $\mathbf{A}_0$ называется тензором с симметрией относительно плоскости с нормалью $\mathbf{e}_1$, если

$$\mathbf{A}_0*\mathbf{Q}_1=\mathbf{A}_0 \tag{4.9}$$

Определение. Тензор четвертого ранга $\mathbf{A}_0$ называется ортотропным, если существует такой ортонормированный базис $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, что

$$\mathbf{A}_0*\mathbf{Q}_j=\mathbf{A}_0 \quad (j=1, 2, 3) \tag{4.10}$$

Теперь может быть сформулирована

Теорема. Пусть область $\varkappa$ представляет собой прямоугольный параллелепипед с гранями, ортогональными единичным векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (первая, вторая и третья группы граней).

1. Если $\mathbf{A}_0$ — постоянный адамаров тензор, симметричный, скажем, относительно плоскости первой группы граней, и если $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — непрерыв-

ное кусочно-гладкое векторное поле, обращающееся в нуль на гранях второй и третьей групп, удовлетворяющее условию проскальзывания $\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_1=0$ на гранях первой группы и не равное нулю тождественно, то справедливо неравенство (4.3).

2. Если $\mathbf{A}_0$ — постоянный ортотропный адамаров тензор, плоскости ортотропии которого — это плоскости граней, и если $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — непрерывное кусочно-гладкое векторное поле, удовлетворяющее условию проскальзывания на всех гранях ($\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_j=0$ на гранях j-й группы) и не равное нулю тождественно, то также справедливо неравенство (4.3).

Прежде чем приступать к доказательству теоремы, заметим, что на самом деле область определения поля $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ не обязательно должна быть прямоугольным параллелепипедом, она может быть любой подобластью параллелепипеда, но на ее границе условие проскальзывания должно ставиться только там, где граничная поверхность области является частью граничной поверхности параллелепипеда; на остальной части границы должно быть задано условие $\mathbf{u}=0$. Тогда поле $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ может быть непрерывно и кусочно-гладко продолжено нулем до поля во всем параллелепипеде, оно будет удовлетворять условию теоремы, а $R_0\{\mathbf{u}\}$ для всего параллелепипеда будет совпадать с $R_0\{\mathbf{u}\}$ для собственно области определения поля $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, так как в дополнительной части параллелепипеда $\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})=0$.

Доказательство. Предлагаемый метод доказательства основан на разложении поля $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и его градиента $\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})$ в ряд Фурье (оригинальное доказательство Ван Хофа основывалось на разложении в интеграл Фурье, что для доказательства данной теоремы не подходит). Как известно, ряд Фурье для градиента получается дифференцированием ряда Фурье для самого поля $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, заданного в прямоугольном параллелепипеде $\varkappa'$ (определяемом условиями $-l_j\leqslant\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_j\leqslant l_j$, $j=1, 2, 3$), если поле $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ удовлетворяет условиям «периодичности», т. е. если на гранях одной группы в точках, лежащих на одной и той же нормали, значения поля $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ одинаковы (например, $\mathbf{u}(-l_1, x_2, x_3)=\mathbf{u}(l_1, x_2, x_3)$ и т. д.). Этот результат получается применением теоремы Гаусса — Остроградского к выражению для коэффициента ряда Фурье для градиента и учета условия периодичности, в силу которого поверхностный интеграл обращается в нуль.

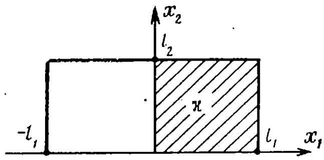
Если поле $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ равно нулю на поверхности $\partial\varkappa$, то оно уже удовлетворяет условию периодичности. Если поле удовлетворяет условию проскальзывания на гранях одной группы (для определенности, первой), то оно может быть достроено до поля, удовлетворяющего условию периодичности в параллелепипеде $\varkappa'$, содержащем $\varkappa$, таким образом, чтобы знак интеграла от функции $\nabla\mathbf{u}:\mathbf{A}_0:\nabla\mathbf{u}$ по $\varkappa'$ совпадал со знаком интеграла от той же функции по $\varkappa$ (при условии, что $\mathbf{A}_0$ — тензор с симметрией относительно плоскости проскальзывания). Действительно, если мы отразим относительно плоскости $\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_1=0$ параллелепипед $\varkappa$ $(0\leqslant\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_j\leqslant l_j,\ j=1, 2, 3)$ вместе с заданным в нем полем $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и примем в качестве $\varkappa'$ объединение параллелепипеда $\varkappa$ и его образа (фиг. 2, плоский аналог), то совокупное поле $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ будет непрерывным, кусочно-гладким и периодическим, т. к. векторы, параллельные плоскости отражения, преобразуются в себя. Кроме того, оно будет симметричным относительно плоскости $\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_1=0$, а вместе с ним симметричным будет и поле градиента:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})=(\mathbf{u}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{Q}_1^T))\cdot\mathbf{Q}_1,\quad \mathbf{x}\in\mathbf{Q}_1(\varkappa) \tag{4.11}$$

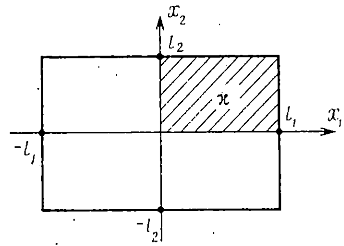
$$\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{Q}_1^T\cdot(\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{Q}_1^T))\cdot\mathbf{Q}_1,\quad \mathbf{x}\in\mathbf{Q}_1(\varkappa) \tag{4.12}$$

Тогда, в силу (4.7), при $\mathbf{x}\in\mathbf{Q}_1(\varkappa)$:

$$\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}):\mathbf{A}_0:\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})=\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{Q}_1^T):\mathbf{A}_0:\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{Q}_1^T)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

и, поэтому,

$$\int_{\varkappa'} \nabla \mathbf{u} : \mathbf{A}_0 : \nabla \mathbf{u}\, dV = 2 \int_{\varkappa} \nabla \mathbf{u} : \mathbf{A}_0 : \nabla \mathbf{u}\, dV \tag{4.13}$$

что и доказывает совпадение знаков интегралов. Таким образом, задача исследования знака интеграла $R_0\{\mathbf{u}\}$ для поля с проскальзыванием и тензором $\mathbf{A}_0$ с симметрией сведена к задаче с периодическим полем $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, что позволяет воспользоваться разложением поля в ряд Фурье, который можно почленно дифференцировать.

Если поле $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию проскальзывания на всех гранях, а тензор $\mathbf{A}_0$ ортотропен, то это поле также может быть достроено до поля, удовлетворяющего условиям периодичности в параллелепипеде $\varkappa'$, содержащем $\varkappa$, так, чтобы знак $\int_{\varkappa'} \nabla \mathbf{u} : \mathbf{A}_0 : \nabla \mathbf{u}\, dV$ совпадал со знаком $\int_{\varkappa} \nabla \mathbf{u} : \mathbf{A}_0 : \nabla \mathbf{u}\, dV$. Построение состоит в преобразовании параллелепипеда $\varkappa$ $(0 \leqslant \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j \leqslant l_j)$ и заданного в нем поля $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ в силу группы, порожденной отражениями $\mathbf{Q}_j$ относительно плоскостей $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j = 0$, $j = 1, 2, 3$. Эта группа содержит восемь различных преобразований $\pm \mathbf{I}$, $\pm \mathbf{Q}_1$, $\pm \mathbf{Q}_2$, $+\mathbf{Q}_3$, поэтому параллелепипед $\varkappa'$ $(-l_j \leqslant \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j \leqslant l_j)$ — это восьмикратно отраженный параллелепипед $\varkappa$ (фиг. 3, плоский аналог). В силу (4.7), совершенно аналогично (4.13), получим

$$\int_{\varkappa'} \nabla \mathbf{u} : \mathbf{A}_0 : \nabla \mathbf{u}\, dV = 8 \int_{\varkappa} \nabla \mathbf{u} : \mathbf{A}_0 : \nabla \mathbf{u}\, dV \tag{4.14}$$

причем поле $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ в $\varkappa'$ удовлетворяет условиям непрерывности, кусочной гладкости и периодичности.

Покажем теперь, что для такого периодичного поля $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и произвольного постоянного адамарова тензора $\mathbf{A}_0$ справедливо неравенство (4.3) для области $\varkappa'$.

Введем обозначения, связанные с разложением в ряд Фурье в $\varkappa'$.

Пусть $\mathbf{m}$, $\boldsymbol{\mu}$ — целочисленные векторы, лежащие в одном из координатных полупространств, например: $\{\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_1 > 0\} \cup \{\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_1 = 0,\ \mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_2 > 0\} \cup \{\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_1 = 0,\ \mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_2 = 0,\ \mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_3 > 0\}$. Дискретные векторы $\mathbf{p}_\mathbf{m}$ задаются равенством:

$$\mathbf{p}_\mathbf{m} \equiv \mathbf{m} \cdot \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} \equiv (\pi/l_1)\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + (\pi/l_2)\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + (\pi/l_3)\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \tag{4.15}$$

Система функций $(\varphi_0, \varphi_\mathbf{m}, \psi_\mathbf{m})$, где

$$\varphi_0(\mathbf{x}) \equiv (8 l_1 l_2 l_3)^{-1/2}, \quad \varphi_\mathbf{m} \equiv {}^1\!/_2 (l_1 l_2 l_3)^{-1/2} \cos \mathbf{p}_\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}, \quad \psi_\mathbf{m} \equiv {}^1\!/_2 (l_1 l_2 l_3)^{-1/2} \sin \mathbf{p}_\mathbf{m} \cdot \mathbf{x} \tag{4.16}$$

является ортонормированной в $\varkappa'$ в том смысле, что

$$\int_{\varkappa'} \varphi_m \varphi_\mu \, dV = \int_{\varkappa'} \psi_m \psi_\mu \, dV = \delta_{m\mu}, \quad \int_{\varkappa'} \varphi_m \psi_\mu \, dV = 0 \tag{4.17}$$

В силу непрерывности, кусочной гладкости и периодичности поля $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ имеем:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_0 \varphi_0(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{m}} \mathbf{a}_m \varphi_m(\mathbf{x}) + \mathbf{b}_m \psi_m(\mathbf{x}) \Rightarrow \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) =$$

$$= \sum_{\mathbf{m}} -\mathbf{p}_m \otimes \mathbf{a}_m \psi_m(\mathbf{x}) + \mathbf{p}_m \otimes \mathbf{b}_m \varphi_m(\mathbf{x}) \tag{4.18}$$

Тогда

$$\nabla \mathbf{u} \otimes \nabla \mathbf{u} = \sum_{\mathbf{m}} \sum_{\mu} (\mathbf{p}_m \otimes \mathbf{a}_m \otimes \mathbf{p}_\mu \otimes \mathbf{a}_\mu \psi_m \psi_\mu + \mathbf{p}_m \otimes \mathbf{b}_m \otimes \mathbf{p}_\mu \otimes \mathbf{b}_\mu \varphi_m \varphi_\mu -$$

$$- \mathbf{p}_m \otimes \mathbf{a}_m \otimes \mathbf{p}_\mu \otimes \mathbf{b}_\mu \psi_m \varphi_\mu - \mathbf{p}_m \otimes \mathbf{b}_m \otimes \mathbf{p}_\mu \otimes \mathbf{a}_\mu \varphi_m \psi_\mu) \tag{4.19}$$

Интегрируя (4.19) по $\varkappa'$ с учетом (4.17), получим:

$$\int_{\varkappa'} \nabla \mathbf{u} \otimes \nabla \mathbf{u} \, dV = \sum_{\mathbf{m}} (\mathbf{p}_m \otimes \mathbf{a}_m \otimes \mathbf{p}_m \otimes \mathbf{a}_m + \mathbf{p}_m \otimes \mathbf{b}_m \otimes \mathbf{p}_m \otimes \mathbf{b}_m) \tag{4.20}$$

В силу постоянства тензора $\mathbf{A}_0$ имеем (при $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ не равном нулю тождественно):

$$\int_{\varkappa'} \nabla \mathbf{u} : \mathbf{A}_0 : \nabla \mathbf{u} \, dV = \mathbf{A}_0 :: \int_{\varkappa'} \nabla \mathbf{u} \otimes \nabla \mathbf{u} \, dV =$$

$$= \sum_{\mathbf{m}} (\mathbf{p}_m \otimes \mathbf{a}_m : \mathbf{A}_0 : \mathbf{p}_m \otimes \mathbf{a}_m + \mathbf{p}_m \otimes \mathbf{b}_m : \mathbf{A}_0 : \mathbf{p}_m \otimes \mathbf{b}_m) \geqslant$$

$$\geqslant a_0 \sum_{\mathbf{m}} (\mathbf{p}_m \otimes \mathbf{a}_m : \mathbf{p}_m \otimes \mathbf{a}_m + \mathbf{p}_m \otimes \mathbf{b}_m : \mathbf{p}_m \otimes \mathbf{b}_m) = a_0 \int_{\varkappa'} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} \, dV > 0$$

Значит, то же неравенство справедливо и для интеграла по $\varkappa$, что и доказывает сформулированную теорему.

Из теоремы вытекает достаточное условие положительной определенности функционалов вида

$$R\{\mathbf{u}\} \equiv \int_{\varkappa} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) : \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, dV \tag{4.21}$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ удовлетворяет условиям теоремы, а тензорное поле $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ не является ни однородным, ни ортотропным (или с симметрией относительно плоскости). Это условие заключается в том, что квадратичная форма $\mathbf{H}:\mathbf{A}(\mathbf{x}):\mathbf{H}$ ($\mathbf{H}$ — произвольный тензор второго ранга) должна допускать равномерную миноранту $\mathbf{H}:\mathbf{A}_0:\mathbf{H}$, где $\mathbf{A}_0$ — ортотропный (или с симметрией относительно плоскости) адамаров тензор, фигурирующий в условии теоремы. Доказательство почти очевидно и совершенно аналогично доказательству следствия 1 [1] из теоремы Ван Хофа.

Из упомянутого достаточного условия следует, что функционал $R\{\mathbf{u}\}$ положительно определен, если $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ слабо отличается от некоторого адамарова тензора $\mathbf{A}_0$, обладающего нужной инвариантностью, а именно, если, например,

$$(\max_{\mathbf{x} \in \varkappa} (\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_0)^s :: (\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_0)^s)^{1/2} < a_0 \tag{4.22}$$

где $\mathbf{A}^s \equiv {}^1/_2(\mathbf{A}+\mathbf{A}^{(3412)})$ — это симметризованный (по перестановке пар индексов) тензор $\mathbf{A}$.

5. Пределы устойчивого закритического деформирования в жесткой трехосной машине. Соединяя результаты двух предыдущих разделов, получаем, что деформирование однородных упругопластических (в частности, упругих) тел, для которых тензор жесткости $\mathbf{A}^p$ ортотропен (с плоскостями ортотропии, параллельными плоскостям плит машины), устойчиво до тех пор, пока для $\mathbf{A}^p$ выполняются условия Адамара. Напомним, что за пределами выполнения условий Адамара устойчивых состояний тела быть уже не может ни при каких граничных условиях.

Подчеркнем, что положительная определенность $R^p\{\mathbf{u}\}$ (3.33) является достаточным условием устойчивости именно процесса однородного деформирования, так что если имеется однородное адамарово состояние с однородным полем напряжений, то близкие последующие состояния также будут однородными и, следовательно, однородным будет и новое поле напряжений и т. д. до тех пор, пока не обратится в нуль величина $a_0{}^p$. Это справедливо применительно к испытаниям как начально изотропных и трансверсально изотропных тел, так и начально ортотропных с нужной ориентацией плоскостей ортотропии.

Соотнесем теперь условие Адамара и условие закритичности деформирования (нарушение постулата Друккера) и приведем оценки достижимой степени закритичности для некоторых характерных упругопластических определяющих соотношений и видов напряженного состояния. Эти оценки (за исключением примера 1) получены в работе [1], где имеются подробные выкладки.

В [1] показано, что для того, чтобы тензор $\mathbf{A}$ был адамаровым, достаточно (но не необходимо), чтобы адамаровым был другой тензор (более простой структуры):

$$\mathbf{B} \equiv \mathbf{L} - 2\tau \mathbf{1}^{\mathrm{def}} \qquad (5.1)$$

где $\mathbf{1}^{\mathrm{def}} \equiv {}^1/_2(\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}^{(1324)}+\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}^{(1342)})$ — проектор на подпространство симметричных тензоров второго ранга, $\tau^2 \equiv {}^1/_2(\mathbf{T}-{}^1/_3(\mathbf{T}:\mathbf{I})\mathbf{I}):(\mathbf{T}-{}^1/_3(\mathbf{T}:\mathbf{I})\mathbf{I})$, τ — интенсивность касательных напряжений. Именно тензор $\mathbf{B}$ исследован на выполнение для него условия Адамара во всех трех рассматриваемых примерах.

Пример 1. Рассмотрим несколько экзотическое, но удобное для анализа нелинейно упругое тело, для которого тензор $\mathbf{L}^s$ соответствует изотропному закону Гука:

$$\mathbf{L}^s = 2G\mathbf{1}^{\mathrm{def}} + (K - {}^2/_3 G)\mathbf{I}\otimes\mathbf{I} \qquad (5.2)$$

Нетрудно установить, что тензор $\mathbf{B}$ является адамаровым, если

$$G > \tau > 0, \quad K > -{}^4/_3 G + 2\tau \qquad (5.3)$$

С другой стороны, определяющий закон (5.2) соответствует разупрочнению (2.15), если хотя бы один из модулей G или K отрицателен. Очевидно, что при не слишком больших значениях τ закритическое деформирование устойчиво по крайней мере до значения

$$K_* = -{}^4/_3 G + 2\tau < 0 \qquad (5.4)$$

Пример 2. Пусть упругопластическое тело подчиняется ассоциированному закону течения Мизеса при активном нагружении и изотропному закону Гука при разгрузке. Обозначим через $\mathbf{N}$ нормированный ($\mathbf{N}:\mathbf{N}=1$) девиатор тензора напряжений $\mathbf{T}$. Тогда закону Мизеса соответствует $\boldsymbol{\Omega}=\mathbf{N}$ в (2.13, 2.14) и

$$\mathbf{L}^{sp} = \frac{h}{1+(h/2G)}\mathbf{N}\otimes\mathbf{N} + 2G(\mathbf{1}^{\mathrm{def}} - \mathbf{N}\otimes\mathbf{N}) + (K - {}^2/_3 G)\mathbf{I}\otimes\mathbf{I} \qquad (5.5)$$

Если считать, что $K>0$ и $G>0$, то (5.5) соответствует разупрочнению (2.15) при отрицательных значениях пластического модуля h.

Пусть $\mathbf{N}$ — девиатор одноосного растяжения:

$$\mathbf{N}=(3\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1-\mathbf{I})/\sqrt{6} \tag{5.6}$$

Вводя приведенный пластический модуль

$$h'=\frac{h}{h+\boldsymbol{\Omega}:\mathbf{L}^e:\boldsymbol{\Omega}}=\frac{h}{h+2G} \tag{5.7}$$

из условий Адамара для тензора $\mathbf{B}$ получим:

$$h_*'=G^{-1}(\tau-(G-\tau)(^3/_2K-\tau)/(2(G-\tau)+3(^3/_2K-\tau))) \tag{5.8}$$

В случае, когда коэффициент Пуассона равен нулю ($G={}^3/_2K$), равенство (5.8) принимает наиболее наглядную форму

$$h_*'=-{}^1/_5(1-6\tau G^{-1}) \tag{5.9}$$

и если материал выходит на падающий участок диаграммы деформирования ($h'<0$) при $\tau<{}^1/_6G$, то в пределах $h_*'<h'<0$ заведомо имеет место устойчивое однородное закритическое деформирование.

Пример 3. Пусть упругопластическое тело обладает свойствами внутреннего трения и дилатансии. Примем коэффициенты последних равными друг другу (ассоциированность пластического течения). Тогда можно воспользоваться определяющим законом (2.11) с такой нормалью к поверхности текучести, для которой (2.13):

$$\boldsymbol{\Omega}=\mathbf{N}\cos\beta+(1/\sqrt{3})\,\mathbf{I}\sin\beta \tag{5.10}$$

Пусть $\mathbf{N}$ — девиатор чистого сдвига:

$$\mathbf{N}=1/\sqrt{2}(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2) \tag{5.11}$$

Коэффициент Пуассона сразу положим равным нулю. Тогда

$$\mathbf{L}^{sp}=2G(h'\boldsymbol{\Omega}\otimes\boldsymbol{\Omega}+(\mathbf{1}^{\text{def}}-\boldsymbol{\Omega}\otimes\boldsymbol{\Omega})) \tag{5.12}$$

$$h_*'=(\tau G^{-1}-{}^1/_3\sin^2\beta)/(1-{}^1/_3\sin^2\beta) \tag{5.13}$$

Если $\tau<{}^1/_3\sin^2\beta G$, то при $h_*'<h'<0$ имеет место устойчивое однородное закритическое деформирование.

Аналогичные оценки достижимой степени закритичности могут быть получены, конечно, для любого ортотропного симметричного упругопластического (упругого) определяющего закона.

В заключение отметим, что для ортотропных однородных упругопластических материалов с симметричным тензором жесткости установлено, что их однородное закритическое деформирование в идеальной жесткой трехосной испытательной машине (при условии параллельности плоскостей ортотропии плоскостям плит машины) устойчиво в пределах, определяемых условиями Адамара, т. е. в тех пределах, вне которых модель сплошной среды вообще перестает быть применимой.

Таким образом, сомнения, которым подвергается интерпретация (в терминах присущей материалу падающей диаграммы) данных закритического деформирования таких материалов в жестких трехосных машинах (по той причине, что закритическое деформирование якобы всегда неустойчиво и его однородность не закономерна) не имеют под собой оснований.

Диаграмма деформирования не может быть падающей лишь для тех путей деформирования, для которых виртуальные скорости деформаций имеют диадное строение. Для таких путей диаграмма обрывается в том месте, где перестает быть восходящей (как для привычных одномерных моделей сплошной среды).

Для путей деформирования недиадного строения падающая диаграмма (скажем, диаграмма «деформация объемного сжатия — давление», пример 1) реальна в такой же степени, как и диаграмма восходящая (при условии, что для всех диадных продолжений в данной точке она все же восходящая). Если такая диаграмма получена как результат интерпретации данных испытаний в жесткой трехосной машине, то ее следует считать достоверно отражающей свойства материала.

Автор благодарен В. В. Захарову, В. И. Кондаурову, Ш. А. Мухамедиеву и Л. В. Никитину за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никитин Л. В., Рыжак Е. И.* Об осуществимости состояний материала, соответствующих «падающему» участку диаграммы // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 2. С. 155–161.
2. *Read H. E., Hegemier G. A.* Strain softening of rock, soil and concrete – A review article // Mech. of materials. 1984. V. 3. № 4. P. 271–294.
3. *Клюшников В. Д.* Устойчивость упругопластических систем. М.: Наука, 1980. 240 с.
4. *Клюшников В. Д.* Лекции по устойчивости деформируемых систем. М.: Изд-во МГУ, 1986. 224 с.
5. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
6. *Рыжак Е. И.* О необходимости условий Адамара для устойчивости упругопластических тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 4. С. 101–104.
7. *Rice J. R.* The localization of plastic deformation // Theoretical and applied mechanics. Proc. 14th IUTAM Congr. Amsterdam: North – Holland, 1976. P. 207–220.
8. *Drucker D. C.* A definition of stable inelastic material // J. Appl. Mech. ASME. 1959. V. 26. P. 101–106.
9. *Van Hove L.* Sur L'extension de la condition de Legendre du calcul des variations aux integrales multiples a plusieurs fonctions inconnues // Proc. Kön. Nederl. Akad. Wetensch. 1947. V. 50. P. 18–23.
10. *Gurtin M.* The linear theory of elasticity // Handbuch der Physik. B.: Springer, 1972. V. 6a/2. P. 1–295.
11. *Рыхлевский Я.* О законе Гука // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 420–435.

Москва

Поступила в редакцию
22.V.1989