МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1991

УДК 531.374

Е. В. СИНИЦЫН

АСИМПТОТИКА СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ИССЛЕДОВАНИИ ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА

Исследуется динамика вязкоупругого тела. Ранее [1–2] [1] изучалась динамика вязкоупругих тел в гравитационном поле. Приближенные решения для внутренних степеней свободы строились на основе предположений: период свободных упругих колебаний мал по сравнению со временем их затухания и обе эти величины много меньше характерного времени движения тела как целого. При этом использовался способ аналогичный асимптотическому методу, разработанному в [3–4] для механических систем, содержащих упругие и диссипативные элементы.

В данной работе первое из указанных предположений не вводится и используется более общая модель линейной теории вязкоупругости [5–7]. Получена система уравнений динамики вязкоупругого тела. При помощи метода пограничных функций дано математическое обоснование и получена оценка погрешности асимптотики решения этой системы в случае квазистатического режима деформации тела. Построены приближенные решения для внутренних степеней свободы. Методом осреднения получено уравнение, описывающее эволюцию регулярной прецессии симметричного вязкоупругого тела в случае Эйлера.

1. Постановка задачи и уравнения движения. Рассмотрим однородное изотропное вязкоупругое тело массы m и плотности ρ со свободной границей. Ω — объем, занимаемый телом в недеформированном состоянии. Пусть $O\xi_1\xi_2\xi_3$ — инерциальная система координат. Свяжем с телом «среднюю» систему координат $O_1x_1x_2x_3$ с началом в центре масс и перемещающуюся в нем согласно условиям

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{r},t)\rho\, dx=0, \qquad \int\limits_{\Omega} \mathbf{r}\times\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\rho\, dx=0, \qquad dx=dx_1\, dx_2\, dx_3$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки недеформированного тела, $\mathbf{u}(\mathbf{r},\ t)$ — ее смещение.

Введем следующие обозначения $\mathbf{R}=OO_1$, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость трехгранника $O_1x_1x_2x_3$, ω_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ — ее проекции на подвижные оси, $\mathbf{F}$ — поле внешних массовых сил, зависящих от абсолютного положения точки тела, ее скорости и от времени. Штрихом будем обозначать производные по времени от векторных величин в системе $O_1x_1x_2x_3$, точкой — в системе $O\xi_1\xi_2\xi_3$ и производные по времени от скалярных величин.

Опишем принимаемую модель материала тела. Предположим, что вязкоупругий коэффициент Пуассона ν является постоянным (не зависит от времени). Тогда определяющие соотношения линейной теории вяз-

[1] См. также: *Климов Д. М., Маркеев А. П., Холостова О. В.* К динамике упруго-вязкого кольца в гравитационном поле: Препринт № 406. М.: ИПМ, 1989.

коупругости малых деформаций [5—7] запишем в виде

$$\sigma_{kk}=\frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\left(E\varepsilon_{kk}+\eta\varepsilon_{kk}^{\cdot}+\int_0^t\mu(t-\xi)\frac{\partial\varepsilon_{kk}}{\partial\xi}d\xi\right)$$

$$s_{ij}=2\left(Ee_{ij}+\eta e_{ij}^{\cdot}+\int_0^t\mu(t-\xi)\frac{\partial e_{ij}}{\partial\xi}d\xi\right) \tag{1.1}$$

В выражениях (1.1) σ_{kk}, ε_{kk} и s_{ij}, e_{ij} — шаровые части и компоненты девиаторов тензоров напряжений и деформаций соответственно; E и η — константы, характеризующие вязкоупругие свойства материала; $\mu(t-\xi)$ — функция релаксации. Функцию релаксации $\mu(t-\xi)$ (1.1) можно представить в виде [6]:

$$\mu(t-\xi)=\sum_{j=1}^{M}G_je^{-(t-\xi)/\tau_j} \tag{1.2}$$

где G_j, τ_j, M — константы.

Предположение о постоянстве коэффициента Пуассона позволяет искать переменные в виде [6]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t)=\sum_{n=1}^{\infty}q_n(t)\mathbf{U}_n(\mathbf{r}) \tag{1.3}$$

здесь $\mathbf{U}_n$ — n-я собственная форма колебаний соответствующей упругой задачи. В системе $O_1x_1x_2x_3$ считаем известными компоненты $\mathbf{U}_n$: U_n^1, U_n^2, U_n^3.

Тензор инерции относительно центра масс представляется в форме

$$J=J_0+J_1+J_2$$

$$J_0=\mathrm{diag}\{A,B,C\},\qquad J_1=2\sum_{n=1}^{\infty}q_nJ_1^n,\qquad J_2=\sum_{k,l=1}^{\infty}q_kq_lJ_2^{kl} \tag{1.4}$$

$$J_1^n=\begin{Vmatrix} H_{22}^n+H_{33}^n & -H_{12}^n & -H_{13}^n\\ -H_{12}^n & H_{11}^n+H_{33}^n & -H_{23}^n\\ -H_{13}^n & -H_{23}^n & H_{11}^n+H_{22}^n\end{Vmatrix}$$

$$H_{ij}^n=\int_\Omega x_iU_n^j\rho\,dx,\qquad i,j=1,2,3$$

Явный вид J_2^{kl} в дальнейшем не понадобится.

Составим полную систему уравнений, описывающую движение тела. Уравнение изменения момента количества движения

$$\mathbf{K}'+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}=\mathbf{M},\qquad \mathbf{M}=\int_\Omega(\mathbf{r}+\mathbf{u})\times\mathbf{F}\rho\,dx \tag{1.5}$$

$$\mathbf{K}=J\boldsymbol{\omega}+\mathbf{K}_*,\qquad \mathbf{K}_*=\sum_{k,l=1}^{\infty}q_kq_l^{\cdot}\int_\Omega\mathbf{U}_k\times\mathbf{U}_l\rho\,dx$$

Уравнение изменения количества движения

$$m\mathbf{R}^{\cdot\cdot}-\int_\Omega\mathbf{F}\rho\,dx=0 \tag{1.6}$$

Кинематические уравнения Эйлера запишем в сокращенном виде [3]:

$$\sigma^{\cdot}=f(\sigma,\ \omega) \tag{1.7}$$

где $\sigma=(\varphi,\ \psi,\ \theta)$ — углы Эйлера, вводимые обычным образом.

Уравнения движения сплошной среды, с учетом (1.1)—(1.4) получаем в виде

$$q_n^{\cdot\cdot}+\lambda_n^2\left(Eq_n+\eta q_n^{\cdot}+\int_0^t \mu(t-\xi)\frac{\partial q_n}{\partial \xi}d\xi\right)=Q_n \tag{1.8}$$

здесь λ_n^2 — собственные значения оператора теории упругости, Q_n — обобщенные силы.

$$Q_n=F_n+\Lambda_n \tag{1.9}$$

$$F_n=\int_\Omega \mathbf{F}\mathbf{U}_n\rho\, dx-2(H_{12}{}^n\omega_1\omega_2+H_{12}{}^n\omega_1\omega_3+H_{23}{}^n\omega_2\omega_3)+$$

$$+(H_{22}{}^n+H_{33}{}^n)\,\omega_1^2+(H_{33}{}^n+H_{11}{}^n)\,\omega_2^2+(H_{11}{}^n+H_{22}{}^n)\,\omega_3^2$$

Λ_n — сумма линейных однородных форм от q_n, $q_n^{\cdot}$.

Совокупность (1.5)—(1.8) составляет замкнутую систему уравнений динамики вязкоупругого тела в произвольном силовом поле. Будем считать $\mathbf{R}(t)=\mathbf{R}_0(t)$ — известными функциями времени, что не внесет изменений в ход рассуждений.

2. Асимптотическое разложение решений. Система (1.5), (1.7), (1.8) может быть упрощена в случае квазистатического режима деформаций тела.

Предположим, что период свободных упругих колебаний и время их затухания много меньше характерного времени движения как целого. Положим в (1.1), (1.2)

$$E=E^0/\varepsilon,\ \eta=\eta^0/\varepsilon,\ G_j=G_j^0/\varepsilon,\ \mu(t-\xi)=\mu^0(t-\xi)/\varepsilon,\ 0<\varepsilon\ll 1 \tag{2.1}$$

Сделаем замену переменных $q_n=\varepsilon q_n^*$, $p_n=q_n^{*\cdot}$. Используя равенство $J^{-1}=J_0^{-1}+\varepsilon J_0^{-1}J_1(q_n^*)J_0^{-1}+O(\varepsilon^2)$, разрешим уравнение (1.5) относительно производных и запишем систему (1.5), (1.7), (1.8) в виде

$$\mathbf{y}^{\cdot}=\mathbf{\Phi}(\mathbf{p},\ \mathbf{q}^*,\ \mathbf{y},\ \varepsilon,\ t),\ \mathbf{q}^{*\cdot}=\mathbf{p} \tag{2.2}$$

$$\varepsilon\mathbf{p}^{\cdot}=\mathbf{P}(\mathbf{p},\mathbf{q}^*,\mathbf{L},\mathbf{y},\varepsilon,t),\qquad \mathbf{L}=\int_0^t\mu^0(t-\xi)\,\mathbf{p}\,d\xi$$

В (2.2) введены следующие обозначения: $\mathbf{p}=(p_1,\ldots,p_N)^T$, $\mathbf{q}^*=(q_1^*,\ldots,q_N^*)^T$, N — число рассматриваемых форм колебаний, $\mathbf{y}=(\boldsymbol{\omega},\ \sigma)^T$. Вектор-функции $\mathbf{P}$ и $\mathbf{\Phi}$ определяются в соответствии с (1.5), (1.7), (1.8). Условие выбора N дадим ниже.

Зададим начальные условия (значок * над $\mathbf{q}$ в дальнейшем опускаем)

$$\mathbf{y}(0,\ \varepsilon)=\mathbf{y}_0,\ \mathbf{q}(0,\ \varepsilon)=\mathbf{q}_0,\ \mathbf{p}(0,\ \varepsilon)=\mathbf{p}_0 \tag{2.3}$$

Система (2.2), (2.3) является системой сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. При удовлетворении ряду условий [8], которые с проверкой будут обсуждаться ниже, построение асимптотического разложения решений возможно методом пограничных функций. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t,\ \varepsilon)&=\mathbf{y}^0(t)+\Pi_0 y(t/\varepsilon)+\varepsilon(\mathbf{y}^1(t)+\Pi_1 y(t/\varepsilon))+\ldots\\ \mathbf{q}(t,\ \varepsilon)&=\mathbf{q}^0(t)+\Pi_0 q(t/\varepsilon)+\varepsilon(\mathbf{q}^1(t)+\Pi_1 q(t/\varepsilon))+\ldots\\ \mathbf{p}(t,\ \varepsilon)&=\mathbf{p}^0(t)+\Pi_0 p(t/\varepsilon)+\varepsilon(\mathbf{p}^1(t)+\Pi_1 p(t/\varepsilon))+\ldots\end{aligned}\tag{2.4}$$

Здесь $\mathbf{y}^0$, $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{q}^0$ — решение задачи

$$\mathbf{y}^{0\cdot}=\mathbf{\Phi}(\mathbf{p}^0,\ \mathbf{q}^0,\ \mathbf{y}^0,\ 0,\ t),\ \mathbf{q}^{0\cdot}=\mathbf{p}^0,\ 0=\mathbf{P}(\mathbf{p}^0,\ \mathbf{q}^0,\ \mathbf{L}^0,\ \mathbf{y}^0,\ 0,\ t)\tag{2.5}$$

$$\mathbf{L}^0=\int_0^t \mu^0(t-\xi)\,\mathbf{p}^0\,d\xi,\qquad \mathbf{y}^0(0)=\mathbf{y}_0,\qquad \mathbf{q}^0(0)=\mathbf{q}_0$$

Первое уравнение в (2.5) описывает сферическое движение относительно осей Кенига абсолютно твердого тела с конфигурацией Ω. Его решение считаем известным. Второе и третье уравнения описывают квазистатический процесс деформации тела под действием внешних сил и сил инерции в системе $O_1x_1x_2x_3$, движущейся по закону $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{y}^0$. Функции $\mathbf{y}^k(t)$, $\mathbf{q}^k(t)$, $\mathbf{p}^k(t)$ ($k=1,\ 2,\ldots$), $\Pi_k y(\tau)$, $\Pi_k q(\tau)$, $\Pi_k p(\tau)$ ($k=0,\ 1,\ldots$) в (2.4) удовлетворяют некоторым системам интегро-дифференциальных уравнений [8, с. 227–229], и $|\Pi_k y(\tau)|$, $|\Pi_k q(\tau)|$, $|\Pi_k p(\tau)|<\bar{C}_k e^{-\varkappa_k\tau}$, $\bar{C}_k$, $\varkappa_k=\mathrm{const}$.

Убедимся, что для системы (2.2), (2.3) выполнены все условия работы [8].

Собственные значения матрицы $(\partial \mathbf{P}^j/\partial \mathbf{p}_i)$ ($i,\ j=1,\ldots,N$), вычисленные в точке ($\mathbf{p}^0$, $\mathbf{q}^0$, $\mathbf{L}^0$, $\mathbf{y}^0$, 0, t) должны иметь отрицательные вещественные части. В самом деле, матрица

$$\left(\frac{\partial \mathbf{P}^j}{\partial \mathbf{p}_i}\right)=\Gamma=\begin{Vmatrix}-\lambda_1^2\eta^0 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & -\lambda_N^2\eta^0\end{Vmatrix}$$

постоянна и удовлетворяет указанному требованию.

Функция релаксации (2.1) и правые части системы (2.2) удовлетворяют всем условиям гладкости, наложенным в [8].

Начальное значение $\mathbf{p}_0-\mathbf{p}^0(0)$ для $\Pi_0 p(\tau)$ должно принадлежать области влияния точки покоя $\Pi_0 p=0$.

Для $\Pi_0 p(\tau)$ получаем уравнение $d\Pi_0 p/d\tau=\Gamma\Pi_0 p$, решение которого обладает требуемым свойством.

Таким образом, выполнены все предположения из [8], при которых возможно построение асимптотики методом пограничных функций. На интервалах времени порядка характерного времени движения тела как целого, частью асимптотического решения типа погранслоя можно пренебречь.

Построение асимптотики системы (2.2) заменим построением функции $\mathbf{Y}=\mathbf{y}^0(t)+\varepsilon\mathbf{y}^1(\mathbf{p}^0,\ \mathbf{q}^0,\ \mathbf{y}^0,\ t)$. По теореме 2 из [4] и теореме 5.1 из [8], начиная с некоторого момента времени справедлива оценка (на интервале порядка ε^{-1}):

$$|\mathbf{y}(t,\ \varepsilon)-\mathbf{Y}(t,\ \varepsilon)|<\bar{C}\varepsilon^2,\ \bar{C}=\mathrm{const}\tag{2.6}$$

Найдем решение второго и третьего уравнений (2.5). Используя преобразование Лапласа по времени

$$\bar{g}(s)=\int_0^\infty g(t)e^{-st}\,dt$$

из (1.8), (2.5) получим

$$(E^0+\eta^0 s+s\bar{\mu}^0(s))\bar{q}_n{}^0(s)=(\bar{Q}_n{}^0(s)+D(s,\ q_{0n}))/\lambda_n{}^2$$

$$D(s,\ q_{0n})=(\eta^0+\bar{\mu}^0(s))\,q_{0n}$$

здесь $\bar{Q}_n{}^0(s)$ — изображение обобщенных сил (1.9), вычисленных при $\varepsilon=0$. В соответствии с (1.2) имеем

$$\bar{q}_n{}^0(s)=\frac{1}{\lambda_n{}^2}\left(E^0+\eta^0 s+\sum_{j=1}^{M}\frac{G_j{}^0 s}{s+\tau_j{}^{-1}}\right)^{-1}(\bar{Q}_n{}^0(s)+D(s,\ q_{0n}))$$

Так как $\lambda_i{}^2\leqslant\lambda_j{}^2$ ($i<j$), то N выберем из условия: $\lambda_N{}^{-2}$ порядка ε.

Лемма из [4, с. 47] позволяет привести полученное выражение к виду

$$\bar{q}_n{}^0(s)=\frac{1}{\lambda_n{}^2}\left(\sum_{j=1}^{M+1}\frac{C_j\delta_j}{s+\delta_j}\right)(\bar{Q}_n{}^0(s)+D(s,\ q_{0n})) \tag{2.7}$$

где C_j, δ_j — положительные размерные константы.

Оригинал выражения (2.7) даст искомое приближенное решение для внутренних степеней свободы.

В частности, для вязкоупругого тела, состоящего из материала Кельвина — Фойгта ($M=0$), при $\eta^0=\delta bE^0$ ($b=\text{const}$, δ порядка ε^χ, $1/2<\chi<1$) после разложения (2.7) в ряд по степеням δ и вычисления оригинала, с погрешностью $O(\varepsilon)$ получаем

$$q_n{}^0=(Q_n{}^0-\delta bQ_n{}^{0\cdot})/\lambda_n{}^2E^0 \tag{2.8}$$

Выражение (2.8) совпадает с формулой, полученной в [1—2] на основе разработанного в [3—4] метода, и используемой для определения $q_n{}^0(t)$.

После определения $q_n{}^0(t)$ по изображениям (2.7), из системы уравнений (1.5), (1.7) с учетом линейных членов по ε получим систему уравнений для определения $\mathbf{Y}(t)$. Оценка приближенного решения $Y(t)$ дается формулой (2.6).

Таким образом дано строгое математическое обоснование и получена оценка погрешности асимптотики решений уравнений динамики вязкоупругого тела (п. 1) в случае квазистатического режима его деформаций.

Приведенный алгоритм может быть использован при решении задач динамики вязкоупругих тел или твердых тел, несущих вязкоупругие элементы из материалов, обладающих большими коэффициентами демпфирования или удовлетворяющих более сложным, чем модель Кельвина — Фойгта, моделям линейной теории вязкоупругости.

3. Эволюция регулярной прецессии симметричного вязкоупругого тела в случае Эйлера. В качестве примера рассмотрим динамически симметричное тело ($A=B$), причем выполнены условия: $\mathbf{R}_0(t)\equiv 0$, $\mathbf{F}\equiv 0$. Тогда уравнение моментов (1.5) примет вид

$$\mathbf{K}'+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}=0 \tag{3.1}$$

Отсюда следует, что кинетический момент постоянен по величине и по направлению в системе $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$. Направим ось $O_1\xi_3$ по вектору $\mathbf{K}$.

Из (3.1), (1.4), оставляя линейные по ε члены, получим

$$J_0\boldsymbol{\omega}^{\cdot}+\boldsymbol{\omega}\times J_0\boldsymbol{\omega}=-2\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\{q_n\boldsymbol{\omega}\times J_1{}^n\boldsymbol{\omega}+q_nJ_1{}^n\boldsymbol{\omega}^{\cdot}+q_n{}^{\cdot}J_1{}^n(\boldsymbol{\omega})\} \tag{3.2}$$

Задача (3.2), (1.7) при $\varepsilon=0$ интегрируется в квадратурах. Движение тела в этом случае является регулярной прецессией

$$\begin{gathered}\omega_1^0=K_0A^{-1}\sin\theta^0\sin\varphi\\ \omega_2^0=K_0A^{-1}\sin\theta^0\cos\varphi,\quad \omega_3^0=K_0C^{-1}\cos\theta^0\end{gathered}\tag{3.3}$$

здесь $K_0=|\mathbf{K}|$ — модуль кинетического момента в невозмущенном движении (φ, θ — углы Эйлера) $\varphi^{\cdot}=\varkappa=K_0\cos\theta^0(1/C-1/A)$, $\theta^0=\mathrm{const}$.

Из (1.9), (2.7), (3.3) получаем выражения изображений Лапласа функций $q_n^0(t)$

$$\begin{gathered}\bar q_n^0(s)=\frac{K_0^2}{2\lambda_n^2s}\left(\sum_{j=1}^{M+1}\frac{C_j\delta_j}{s+\delta_j}\right)\Big\{A^{-2}\sin^2\theta^0(H_{22}^n+2H_{33}^n+H_{11}^n+\\ +(H_{11}^n-H_{22}^n)\frac{s^2}{s^2+4\varkappa^2}-2H_{12}^n\frac{2\varkappa s}{s^2+4\varkappa^2}\Big)+2(H_{11}^n+H_{22}^n)C^{-2}\cos^2\theta^0-\\ -2A^{-1}C^{-1}\sin\theta^0\cos\theta^0\left(H_{13}^n\frac{\varkappa s}{s^2+\varkappa^2}+H_{23}^n\frac{s^2}{s^2+\varkappa^2}\right)+D(s,q_{0n})\Big\}\end{gathered}\tag{3.4}$$

Выражения, стоящие в правых частях (3.4) — дробно-рациональные функции от s. Корни полиномов, стоящих в знаменателях, либо вещественные неположительные, либо чисто мнимые. Оригиналы выражений (3.4) выписываются по формуле из [9]. Пренебрегая экспоненциально затухающими со временем членами, получаем $q_n^0(t)$, соответствующие установившемуся режиму квазистатических деформаций тела,

$$\begin{gathered}q_n^0(t)=\frac{K_0^2}{\lambda_n^2}\left(\sum_{j=1}^{M+1}C_j\right)\left(A^{-2}\sin^2\theta^0\left(\frac{H_{11}^n+H_{22}^n}{2}+H_{33}^n\right)+\right.\\ \left.+(H_{11}^n+H_{22}^n)C^{-2}\cos^2\theta^0\right)+\mathrm{Re}\left\{A^{-2}\sin^2\theta^0\left(\sum_{j=1}^{M+1}\frac{C_j\delta_j}{\delta_j+2i\varkappa}\right)\times\right.\\ \times\left(\frac{H_{11}^n-H_{22}^n}{2}+iH_{12}^n\right)e^{i2\varkappa t}-A^{-1}C^{-1}\sin\theta^0\cos\theta^0\left(\sum_{j=1}^{M+1}\frac{C_j\delta_j}{\delta_j+i\varkappa}\right)\times\\ \left.\times(H_{23}^n-iH_{13}^n)e^{i\varkappa t}\right\}\Big),\qquad i=(-1)^{1/2}\end{gathered}\tag{3.5}$$

После подстановки (3.5) в (3.2) получаем выражение вида

$$J_0\boldsymbol{\omega}^{\cdot}+\boldsymbol{\omega}\times J_0\boldsymbol{\omega}=\varepsilon\Psi(\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{\omega}^0)\tag{3.6}$$

где $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}^0+\varepsilon\boldsymbol{\omega}^1$. Так как $\boldsymbol{\omega}$ отличается от точного решения на величину порядка ε^2 (2.6), а $\boldsymbol{\omega}^0$ — на величину порядка ε, то без потери точности уравнение (3.6) можно заменить уравнением

$$J_0\boldsymbol{\omega}^{\cdot}+\boldsymbol{\omega}\times J_0\boldsymbol{\omega}=\varepsilon\Psi(\boldsymbol{\omega})\tag{3.7}$$

Эволюционные движения возмущенной системы будем изучать с помощью метода осреднения. Для этого воспользуемся каноническими переменными Андуайе [10]: I_1, I_2, φ_1, φ_2. Здесь $I_2=|\mathbf{K}|$, $I_1=|\mathbf{K}|\cos\theta$; φ_1, φ_2 в нашем случае совпадают с углами Эйлера φ, ψ соответственно.

Заметим, что в силу (3.1) медленная переменная I_2 не эволюционирует. Эволюцию другой медленной переменной I_1 получаем, непосредственно осредняя третье из уравнений (3.7) по «быстрым» переменным φ и ψ.

Проделав указанные выкладки, имеем

$$\gamma^{\cdot}=k\gamma\{A^{-2}G(2\gamma)\alpha_1(1-\gamma^2)^2+C^{-2}G(\gamma)\alpha_2\gamma^2(1-\gamma^2)\} \tag{3.8}$$

$$\gamma=\cos\theta,\quad k=2\varepsilon K_0^4(C-A)A^{-3}C^{-1}$$

$$G(x)=\sum_{j=1}^{M+1}\frac{C_j\delta_j}{\delta_j^2+K_0^2(C-A)^2A^{-2}C^{-2}x^2}$$

$$\alpha_1=\sum_{n=1}^{N}\left(\left(\frac{H_{11}^n+H_{22}^n}{2\lambda_n}\right)^2+\left(\frac{H_{12}^n}{\lambda_n}\right)^2\right),\qquad \alpha_2=\sum_{n=1}^{N}\left(\left(\frac{H_{23}^n}{\lambda_n}\right)^2+\left(\frac{H_{13}^n}{\lambda_n}\right)^2\right)$$

Уравнение (3.8) описывает эволюцию регулярной прецессии симметричного вязкоупругого тела в случае Эйлера. Если $A<C$, то $k>0$. При этом $\lim_{t\to\infty}\gamma(t)=\pm1$ в зависимости от того, $\gamma(0)$ больше или меньше нуля соответственно. Угол нутации стремится к нулю, либо к π, т. е. тело стремится к вращению вокруг оси динамической симметрии. При $A>C$ имеем $k<0$ и $\lim_{t\to\infty}\gamma(t)=0$. Это означает, что тело стремится к вращению вокруг одного из диаметров, лежащих в экваториальной плоскости эллипсоида инерции. Уравнение (3.8) имеет три стационарных решения $\gamma=0$, $\gamma=\pm1$.

Анализ уравнения (3.8) в малой окрестности положений равновесия показал, что решение $\gamma=0$ $(\theta=\pi/2)$ асимптотически устойчиво при $A>C$ и неустойчиво при $A<C$, а решения $\gamma=\pm1$ $(\theta=0,\ \pi)$ асимптотически устойчивы при $A<C$ и неустойчивы при $A>C$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маркеев А. П.* К динамике упругого тела в гравитационном поле // Космич. исследования. 1989. Т. 27. № 2. С. 163–175.
2. *Климов Д. М., Маркеев А. П.* Плоские движения упруговязкого кольца в гравитационном поле // Изв. АН СССР МТТ. 1990. № 3. С. 3–14.
3. *Черноусько Ф. Л.* О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 1. С. 34–42.
4. *Черноусько Ф. Л., Шамаев А. С.* Асимптотика сингулярных возмущений в задаче динамики твердого тела с упругими и диссипативными элементами // Изв. АН СССР МТТ. 1983. № 3. С. 33–42.
5. *Бленд Д.* Теория линейной вязко-упругости. М.: Мир, 1965. 199 с.
6. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
7. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
8. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
9. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
10. *Вильке В. Г.* Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы. М.: Изд-во МГУ, 1986. 192 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.XII.1989