

УДК 539.214;539.374

© 1990 г.

В. С. БОНДАРЬ, А. Н. ФРОЛОВ

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ  
НЕУПРУГОГО ПОВЕДЕНИЯ И НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ  
МАТЕРИАЛА ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ**

В работе сформулированы основные положения и уравнения математической модели неупругого поведения и накопления повреждений материала при сложном неизоэтермическом нагружении.

Приведены результаты исследований процессов неупругого поведения при сложном нагружении по пространственным траекториям деформаций.

Рассмотрены процессы накопления повреждений при простом и сложном нагружении. Результаты расчетов сопоставлены с результатами экспериментов.

**1. Введение.** Проблемы надежного функционирования и снижения материалоемкости конструкций современной техники, работающих в условиях высокого уровня силовых и температурных нагрузок, а также ионизирующего излучения, делают весьма актуальной задачу разработки математической модели неупругого поведения и накопления повреждений материала.

Предлагаемая математическая модель неупругого поведения и накопления повреждений материала является обобщением и развитием идей, выдвинутых в различных вариантах теорий пластичности, ползучести и неупругости, базирующихся на концепции микронапряжений, выдвинутой В. В. Новожиловым и его школой [1, 2]. Обобщенная модель неупругости, так в дальнейшем будет называться предлагаемая теория, может быть применена для практических расчетов неупругого поведения и накопления повреждений материала конструкции при произвольном процессе сложного неизоэтермического нагружения и ионизирующего излучения. Область применимости модели ограничена скоростями деформирования, при которых становятся существенными динамические эффекты, и температурами, при которых происходят структурные изменения материала.

**2. Основные положения и уравнения обобщенной модели неупругости.** Материал однороден и начально изотропен. В процессе неупругого деформирования в нем может возникать только неупругая деформационная анизотропия. Материал может быть чувствителен к виду напряженного состояния, т. е. иметь различные характеристики неупругого поведения и разрушения, например, при растяжении, сжатии, сдвиге. В процессе деформирования возможно как упругое, так и неупругое изменение объема материала. Тензор деформации представляется в виде суммы тензоров упругой деформации, не зависящей от истории нагружения и определяющей конечным состоянием процесса, и неупругой деформации, зависящей от процесса нагружения,

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^H \quad (1)$$

Упругие деформации при изменении напряжений следуют обобщенному закону Гука, при изменении температуры — закону температурного расширения, а при изменении флюенса (интегрального потока ионизирующего излучения) — закону распухания.

Тогда для тензора приращений упругой деформации имеют место уравнения

$$d\varepsilon_{ij}^e = E^{-1} [d\sigma_{ij} - \nu(3\delta_{ij}d\sigma_0 - d\sigma_{ij})] + \alpha_{ij}^e dT + \alpha_{ij}^e \Phi \quad (2)$$

$$\alpha_{ij}^e dT = \alpha_T \delta_{ij} - E^{-2} [\sigma_{ij} - \nu(3\sigma_0 \delta_{ij} - \sigma_{ij})] \partial E / \partial T - E^{-1} (3\sigma_0 \delta_{ij} - \sigma_{ij}) \partial \nu / \partial T \quad (T \neq \Phi) \quad (3)$$

где  $E$ ,  $\nu$ ,  $\alpha_T$ ,  $\alpha_\Phi$  — соответственно модуль Юнга, коэффициент Пуассона,

коэффициент температурного расширения и коэффициент распухания, являющиеся функциями температуры  $T$  и флюенса  $\Phi$ . Полагается, что текущему моменту времени процесса нагружения в пространстве составляющему тензора напряжений соответствует поверхность нагружения, разделяющая области упругого и неупругого состояний. Поверхность нагружения изотропно расширяется или сужается, смещается и изменяет форму в процессе нагружения. Начальная поверхность нагружения может иметь форму, отличную от поверхности Мизеса. Текущая поверхность нагружения определяется процессом нагружения.

Уравнение поверхности нагружения принимается в следующем виде

$$f(\sigma_{ij}) = I_2(D_\sigma^*) - \frac{1}{3}C^2 = 0; \quad I_2(D_\sigma^*) = \frac{1}{2}s_{ij}^*s_{ij}^* \quad (4)$$

$$s_{ij}^* = s_{ij} - a_{ij}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0\delta_{ij}, \quad \sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$$

Здесь  $I_2(D_\sigma^*)$  — второй инвариант девиатора активных напряжений. Тензор  $a_{ij}$  характеризует смещение поверхности нагружения в девиаторном пространстве, а скаляр  $C$  отвечает размеру (радиусу) поверхности нагружения. Тензор смещения (добавочных напряжений, остаточных микронапряжений)  $a_{ij}$  и радиус  $C$  являются функционалами процесса нагружения. Соотношение (4) и терминология теории введены в [1], но в отличие от [1] здесь смещение и радиус зависят от первого инварианта тензора напряжений и соответственно третьих инвариантов девиаторов добавочных и активных напряжений, что позволяет описать изменение формы поверхности нагружения, а также рассмотреть неупругое изменение объема. Для радиуса поверхности нагружения принимается следующее уравнение

$$dC = q_e d\varepsilon_{u*}^n + q_\sigma d\sigma + q_\mu d\mu_* + q_T dT + q_\Phi d\Phi - q_R dt$$

$$d\sigma = dI_1(T_\sigma) = d\sigma_{ii}, \quad d\mu_* = n_{ij} ds_{ij}^* / \sigma_u^* \quad (5)$$

$$n_{ij} = \frac{27}{2} s_{ih}^* s_{jh}^* / (\sigma_u^*)^2 - 3\mu_*^3 / 2s_{ij}^* / \sigma_u^* - 3\delta_{ij}$$

$$\mu_* = \frac{27}{2} I_3(D_\sigma^*) / [3I_2(D_\sigma^*)]^{3/2}, \quad I_3(D_\sigma^*) = \frac{1}{3} s_{ij}^* s_{jk}^* s_{ki}^*, \quad \sigma_u^* = (\frac{3}{2} s_{ij}^* s_{ij}^*)^{1/2}$$

Здесь  $\varepsilon_{u*}^n$  — длина дуги неупругой деформации (накопленная неупругая деформация);  $I_1(T_\sigma)$  — первый инвариант тензора напряжений;  $\mu_*$  — параметр вида активного напряженного состояния ( $\mu_* \in [-1, +1]$ ; при сжатии  $\mu_* = -1$ ; при сдвиге  $\mu_* = 0$ ; при растяжении  $\mu_* = +1$ );  $\sigma_u^*$  — интенсивность активных напряжений;  $I_3(D_\sigma^*)$  — третий инвариант девиатора активных напряжений;  $q_e, q_\sigma, q_\mu, q_T, q_\Phi, q_R$  — функции, подлежащие экспериментально определению.

Дифференциальная форма соотношения (5) развивает идеи, выдвинутые в [3].

Первое и последнее слагаемые в уравнении (5) отвечают за упрочнение и разупрочнение, остальные обеспечивают изменение радиуса поверхности при изменении вида напряженного состояния, температуры. По знаку  $q_e$  определяются циклически упрочняющиеся ( $q_e > 0$ ), стабильные ( $q_e = 0$ ) и разупрочняющиеся ( $q_e < 0$ ) материалы. Параметр  $q_R$  обеспечивает возврат механических свойств при отдыхе, отжиге. Зависимость параметра  $q_R$  от повреждения позволяет описать разупрочнение материала при ползучести (третью стадию ползучести).

Принимается трехчленная структура уравнений для смещения поверхности нагружения, т. е. разложение девиатора приращений смещения (добавочных напряжений) осуществляется по компонентам трех девиаторов — приращений неупругой деформации, добавочных напряжений и неупругих деформаций,

$$da_{ij} = \frac{2}{3} g de_{ij}^n + (\frac{2}{3} g_e e_{ij}^n + g_a a_{ij}) d\varepsilon_{u*}^n + (\frac{2}{3} g_e^T e_{ij}^n + g_a^T a_{ij}) dT + (\frac{2}{3} g_e^\Phi e_{ij}^n + g_a^\Phi a_{ij}) d\Phi - (\frac{2}{3} g_e^R e_{ij}^n + g_a^R a_{ij}) dt \quad (6)$$

Здесь  $g, g_e, g_a, g_e^T, g_a^T, g_e^\Phi, g_a^\Phi, g_e^R, g_a^R$  — функции, подлежащие экспериментально определению.

Идея трехчленной структуры уравнения (6) была высказана в [4]. Предлагаемое уравнение (6) конкретизирует и существенно расширяет возможности идей, изложенных в [4].

Первые три слагаемых в уравнении (6) описывают процессы образования и снятия добавочных напряжений при неупругом деформировании, два последних слагаемых обеспечивают снятие добавочных напряжений при рекристаллизационном отжиге, остальные слагаемые обеспечивают изменение добавочных напряжений при изменении температуры и флюенса. Зависимость параметров  $g_e^R$  и  $g_a^R$  от повреждения  $\omega$  также внесит свой вклад в описание разупрочнения материала при ползучести. Отмеченная зависимость параметров от повреждения в аналогичных соотношениях ранее рассматривалась в [5]. Неупругие деформации зависят от истории нагружения и являются функционалами процесса. Считается, что поле приращений неупругих деформаций в пространстве напряжений имеет потенциал. Тогда, принимая в качестве потенциала функцию (4), тензор приращений неупругой деформации будет определяться уравнением

$$d\varepsilon_{ij}^H = ({}^3/2 n_{ij}^* / n_u^*) d\varepsilon_{u*}^H + \delta_{ij} d\varepsilon_0^H \quad (7)$$

$$n_{ij}^* = s_{ij}^* - {}^2/3 q_{ij} n_{ij}, \quad n_u^* = ({}^3/2 n_{ij}^* n_{ij}^*)^{1/2}, \quad d\varepsilon_0^H = -(\sigma_u^* / n_u^*) q_{\sigma} \varepsilon_{u*}^H \quad (8)$$

Неупругое изменение объема (разрыхление), следуя уравнению (8), определяется величиной накопленной неупругой деформации и становится заметным при циклических нагружениях, когда накопленная неупругая деформация достигает значительных величин. Зависимость поверхности нагружения от первого инварианта тензора напряжений, а также от первых инвариантов тензоров активных и добавочных напряжений, и следующее из этого неупругое изменение объема (разрыхление) материала впервые рассмотрено [6] и [7].

Используя зависимость (4)–(8), можно получить уравнение для приращения накопленной неупругой деформации

$$d\varepsilon_{u*}^H = \frac{1}{E_*} \left[ \frac{{}^3/2 n_{ij}^* d\sigma_{ij}}{n_u^*} - B^{\sigma} d\sigma_{ii} - B^T dT - B^{\Phi} d\Phi + B^R dt \right] \quad (9)$$

$$E_* = \frac{\sigma_u^*}{n_u^*} q_e + g + g_e \varepsilon_{u*}^H + g_a a_u^*, \quad B^{\sigma} = \frac{\sigma_u^*}{n_u^*} q_{\sigma}$$

$$B^T = \sigma_u^* q_T / n_u^* + g_e^T \varepsilon_{u*}^H + g_a^T a_u^*$$

$$B^{\Phi} = \sigma_u^* q_{\Phi} / n_u^* + g_e^{\Phi} \varepsilon_{u*}^H + g_a^{\Phi} a_u^*$$

$$B^R = \sigma_u^* q_R / n_u^* + g_e^R \varepsilon_{u*}^H + g_a^R a_u^*$$

$$\varepsilon_{u*}^H = n_{ij} \varepsilon_{ij}^H / n_u^*, \quad a_u^* = {}^3/2 n_{ij}^* a_{ij} / n_u^*$$

Уравнение (9) связывает приращение накопленной неупругой деформации с приращениями напряжений. С помощью уравнений (1)–(3), (7)–(9) можно получить связь между приращением накопленной неупругой деформации и любым набором приращений напряжений и деформаций.

Поверхность нагружения разделяет области упругого и неупругого состояний. Если изображающая точка состояния находится внутри поверхности нагружения, то это состояние только упруго. Если же изображающая точка принадлежит поверхности нагружения, то в этом случае возможно как упругое состояние (нейтральное нагружение), так и неупругое.

Условия упругого и соответственно неупругого состояний, полученные из принадлежности изображающей точки поверхности нагружения и положительности приращения накопленной неупругой деформации, имеют вид

$$\sigma_u^* < C \vee d\varepsilon_{u*}^H \leq 0; \quad \sigma_u^* = C \wedge d\varepsilon_{u*}^H > 0 \quad (10)$$

Здесь под приращением накопленной неупругой деформации подразумевается выражение задаваемое уравнением (9) или аналогичным ему.

Для описания процесса накопления повреждений используется энергетический подход. В качестве энергии, расходуемой на создание повреждений в материале принимается [8] энергия, равная работе добавочных напряжений на поле неупругих деформаций. В процессе нагружения имеют место накопление повреждений за счет работы добавочных напряжений, залечивание повреждений и охрупчивание материала. Элементарное приращение повреждения определяется отношением элементарной работы добавочных напряжений к текущему значению энергии разрушения, изменение которой обусловлено изменением вида напряженного состояния, температуры, флюенса, а также охрупчиванием. Следует отметить, что залечивание повреждений и охрупчивание связаны с длительностью процесса нагружения.

Тогда кинетические уравнения накопления повреждений, залечивания и охрупчивания принимаются в следующем виде

$$d\omega = a_{ij} de_{ij}^p / W - g_\omega dt \quad (11)$$

$$dW = q_w^\sigma d\sigma + q_w^\mu d\mu_a + q_w^T dT + q_w^\Phi d\Phi - q_w dt \quad (12)$$

$$d\mu_a = m_{ij} da_{ij} / a_u, \quad a_u = ({}^3/2 a_{ij} a_{ij})^{1/2}$$

$$m_{ij} = {}^{27}/2 a_{ik} a_{jk} / (a_u)^2 - 3\mu_a {}^3/2 a_{ij} / a_u - 3\delta_{ij}$$

$$\mu_a = {}^{27}/2 I_3(D_a) / [3I_2(D_a)]^{3/2}$$

$$I_2(D_a) = {}^4/2 a_{ij} a_{ij}, \quad I_3(D_a) = {}^4/3 a_{ij} a_{jk} a_{ki}$$

Здесь  $W$  — энергия разрушения;  $\mu_a$  — параметр вида добавочного напряженного состояния ( $\mu_a \in [-1, +1]$ ; при сжатии  $\mu_a = -1$ , при сдвиге  $\mu_a = 0$ ; при растяжении  $\mu_a = +1$ );  $a_u$  — интенсивность добавочных напряжений;  $I_2(D_a)$ ,  $I_3(D_a)$  — второй и третий инварианты девиатора добавочных напряжений;  $g_\omega$ ,  $q_w^\sigma$ ,  $q_w^\mu$ ,  $q_w^T$ ,  $q_w^\Phi$ ,  $q_w$  — функции, подлежащие экспериментальному определению.

Ответственность добавочных напряжений (остаточных микронапряжений) за процесс накопления повреждений впервые была отмечена в [9], где сформулирована гипотеза пропорциональности скорости накопления повреждений интенсивности остаточных микронапряжений.

Первое слагаемое в уравнении (11) описывает процесс накопления повреждений за счет работы добавочных напряжений на поле неупругих деформаций. В данном случае работой добавочных напряжений на неупругом изменении объема пренебрегается по сравнению с работой на неупругом формоизменении. Второе слагаемое в уравнении (11) описывает процесс залечивания повреждений, интенсивность которого зависит от уровня повреждения, а также характера напряженного состояния.

Последнее слагаемое в уравнении (12) описывает изменение энергии разрушения за счет процессов охрупчивания материала, а остальные слагаемые обеспечивают изменение энергии разрушения при изменении вида напряженного состояния, температуры и флюенса. Вид напряженного состояния здесь определяется первым инвариантом тензора напряжений, а также параметром зависящим от второго и третьего инвариантов девиатора добавочных напряжений.

Учет вида напряженного состояния при определении повреждений рассматривался в [10] и [11] введением параметров, зависящих от инвариантов тензора и девиатора напряжений.

Критерием разрушения материала будет достижение повреждением предельного значения, обычно принимаемого равным единице.

Итак, в общем случае, обобщенную модель неупругости замыкают следующие функции, подлежащие экспериментальному определению:

$$E, \nu, \alpha_T, \alpha_\Phi, q_e, q_\sigma, q_\mu, q_T, q_\Phi, q_R, g, g_e, g_a, g_e^T, g_a^T, g_e^\Phi, g_a^\Phi,$$

$$g_e^R, g_a^R, g_\omega, q_w^\sigma, q_w^\mu, q_w^T, q_w^\Phi, q_w$$

Кроме того, необходимо иметь начальные значения радиуса поверхности нагружения и энергии разрушения.

Однако, используя закономерности деформирования и разрушения материала в условиях пластичности и ползучести, число функций, подлежащих экспериментальному определению, может быть значительно сокращено. В результате обобщенная модель неупругости будет замыкаться 13-ю материальными функциями:  $E(\Phi, T)$ ;  $\nu(\Phi, T)$ ;  $\alpha_T(\Phi, T)$ ;  $\alpha_\Phi(\Phi, T)$  — упругие параметры;  $E_{a0}(\Phi, T, \sigma, \mu_a)$ ;  $\beta(\Phi, T, \sigma, \mu_a)$ ;  $\sigma_a^\sim(\Phi, T, \sigma, \mu_a)$  — модули анизотропного упрочнения;  $C_p(\Phi, T, \sigma, \mu_*, \varepsilon_{u*}^n)$  — функция изотропного упрочнения;  $P_c(\Phi, T, \sigma, \mu_*, C, \omega)$ ;  $P_a(\Phi, T, \sigma, \mu_a, a_u, \omega)$  — функции изотропной и анизотропной ползучести;  $W_0(\Phi, T, \sigma, \mu_a)$  — начальная энергия разрыва;  $\lambda(\Phi, T, \sigma)$ ;  $\kappa(\Phi, T, \sigma_u)$  — модули залечивания и охрупчивания.

Разработан расчетно-экспериментальный метод определения материальных функций, а также способы их аппроксимации. Базовыми экспериментами являются испытания на растяжение — сжатие, знакопеременное кручение в условиях пластичности; ползучесть при растяжении, сжатии, кручении; малоцикловую усталость с выдержками и без выдержек; длительную прочность. Все эти эксперименты проводятся при различных уровнях флюенса и температуры.

Функции (13) выражаются [12] через материальные функции следующим образом

$$\begin{aligned} q_\varepsilon &= \partial C_p / \partial \varepsilon_{u*}^n, \quad q_R = q_P C \\ q_\sigma &= q \partial C_p / \partial \sigma + (1-q) \partial C_{p0} / \partial \sigma \quad (\sigma \rightleftharpoons \mu_* \rightleftharpoons T \rightleftharpoons \Phi) \\ q &= (C - C_{p0}) / (C_p - C_{p0}), \quad C_{p0} = C_p |_{\varepsilon_{u*}^n = 0} \\ g &= E_{a0} + \beta \sigma_a^\sim, \quad g_\varepsilon = \beta E_{a0}, \quad g_a = -\beta \\ g_\varepsilon^T &= \partial E_{a0} / \partial T - E_{a0} / \sigma_a^\sim \partial \sigma_a^\sim / \partial T \quad (T \rightleftharpoons \Phi) \\ g_a^T &= (1 / \sigma_a^\sim \partial \sigma_a^\sim / \partial T) \quad (T \rightleftharpoons \Phi) \\ g_\varepsilon^R &= g_\varepsilon P_a, \quad g_a^R = g P_a / a_u + g_a P_a \\ g_\omega &= \lambda \omega, \quad q_w = \kappa W \\ q_w^\sigma &= (W / W_0) (\partial W_0 / \partial \sigma) \quad (\sigma \rightleftharpoons \mu_a \rightleftharpoons T \rightleftharpoons \Phi) \end{aligned}$$

Начальные значения радиуса поверхности нагружения и энергии разрушения определяются функциями  $C_{p0}$  и  $W_0$  соответственно.

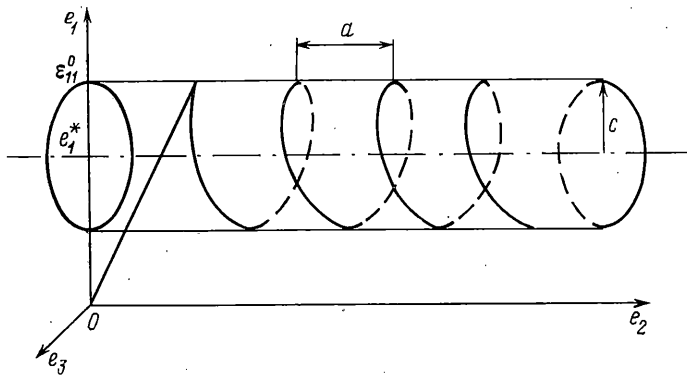
Обобщенная модель неупругости апробирована [13–16] на широком спектре программ экспериментальных исследований при сложном нагружении, включая и циклические нагружения, как в условиях только пластичности или ползучести, так и в условиях одновременного развития пластичности и ползучести. Рассматривались материалы как чувствительные, так и не чувствительные к виду напряженного состояния. Анализировались [15, 16] результаты расчетных и экспериментальных исследований усталости при изотермических и неизотермических процессах нагружения. В этих процессах имели место эффекты охрупчивания и залечивания.

Сопоставление результатов расчета на основе обобщенной модели неупругости и результатов экспериментальных исследований показало надежное их соответствие как качественное, так и количественное.

**3. Сложное нагружение по пространственным винтовым траекториям.** Наибольший интерес в экспериментах по криволинейным пространственным траекториям представляют, конечно, испытания по траекториям в виде винтовой линии на цилиндрической поверхности. В данном случае реализуется траектория с постоянными кривизной и кручением.

Экспериментальные исследования<sup>1</sup> проводились на тонкостенных трубчатых образцах из стали 45 при комнатной температуре. Деформирование образца осуществлялось осевой силой, крутящим моментом и внутренним давлением ( $P, M, q$ -опыты). Траектории представляют собой в пространстве деформаций винтовые линии, рас-

<sup>1</sup> Вавакин А. С., Васин Р. А., Викторов В. В. и др. Экспериментальное исследование упругопластического деформирования стали при сложном нагружении по криволинейным пространственным траекториям деформаций. М., 1986. 67 с. — Деп. в ВИНТИ, № 7298—В86.



Фиг. 1

положенные на поверхности цилиндра с осью симметрии, параллельной оси  $e_2$  и пересекающей ось  $e_1$  в точке  $e_1^*=0,005$ . Общий вид траектории изображен на фиг. 1. Первоначальный лучевой участок траектории осуществлялся путем простого растяжения до значения осевой деформации  $\varepsilon_{11}^0 = e_1^* + c$  ( $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{12} = 0$ ).

Соответствующим выбором параметров  $a$  и  $c$  получали траектории с заданными значениями кривизны и кручения. Ниже будут анализироваться траектории с кривизной  $\kappa = (0,005)^{-1}$  и кручением  $\tau = (0,0166)^{-1}$ ,  $(0,005)^{-1}$ ,  $(0,0025)^{-1}$ , а также с другой кривизной  $\kappa = (0,003)^{-1}$  и кручением  $\tau = (0,01)^{-1}$ ,  $(0,003)^{-1}$ ,  $(0,0015)^{-1}$ . Таким образом будет рассмотрено две серии траекторий. Каждая серия состоит из трех траекторий, имеющих одинаковую кривизну и различные кручения.

Рассматриваемые винтовые траектории имеют радиусы кривизны равные 0,005 и 0,003, что меньше следа запаздывания соответственно в 3 и 5 раз. Таким образом траектории относятся к траекториям большой кривизны. Аналогично, сопоставляя обратную величину кручения со следом запаздывания, первые траектории из каждой серии можно отнести к траекториям среднего кручения, а остальные — к траекториям большого кручения.

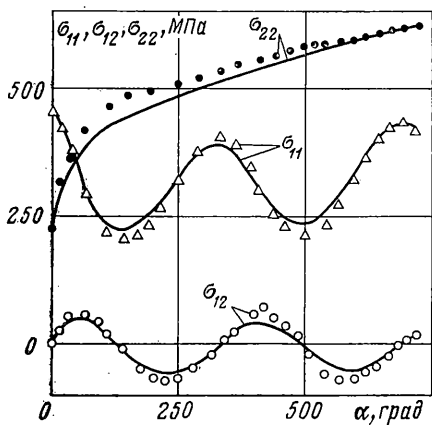
Расчетные и экспериментальные изменения напряжений для двух винтовых траекторий наибольшего кручения приведены на фиг. 2, 3. Сплошными линиями на всех фигурах показаны результаты расчетов на основе обобщенной модели неупругости. Экспериментальные результаты изображаются светлыми треугольниками, светлыми и темными кружками. Отличие результатов расчета и эксперимента не превышает 10%.

Изучение векторных свойств для пространственных винтовых траекторий будем проводить, рассматривая изменения вдоль траекторий угла сближения, характеризующего отклонение вектора напряжений от касательной к траектории, и угла компланарности, характеризующего выход вектора скорости напряжений из плоскости векторов напряжений и скорости деформаций.

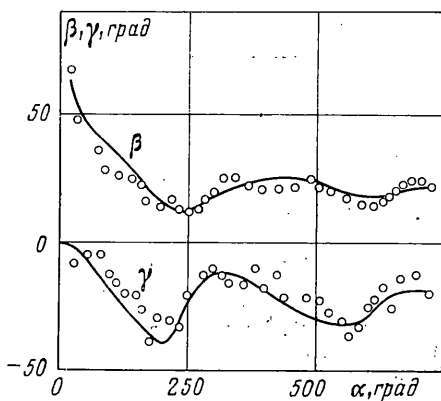
Изменения углов сближения  $\beta$  и компланарности  $\gamma$  приведены на фиг. 4, 5 для двух из шести рассматриваемых винтовых траекторий. Результаты расчета на основе обобщенной модели неупругости показаны сплошными линиями, а эксперимента — светлыми кружками. При определении экспериментальных значений углов сближения и компланарности необходимо было находить скорости напряжений и деформаций. Эти скорости вычислялись на основе схемы осредненных разностей (схемы второго порядка точности). Колебательный вид зависимостей углов сближения и компланарности около стационарных значений есть результат некоторого отличия экспериментальных траекторий от винтовых вследствие сжимаемости материала, которая не учитывалась при задании программы деформирования.

Стационарные значения угла сближения и угла компланарности для траекторий с радиусом кривизны 0,005 и разным кручением ( $1/\tau = 0,0166$ ; 0,005; 0,0025) соответственно равны  $\beta = 43, 32, 20^\circ$  и  $\gamma = 22, 26, 30^\circ$ . Причем максимальное значение угла компланарности при наибольшем кручении достигает  $40^\circ$ . Стационарные значения угла сближения и угла компланарности для второй серии траекторий с радиусом кривизны 0,003 и разным кручением ( $1/\tau = 0,01$ ; 0,003; 0,0015) соответственно равны  $\beta = 50, 36, 23^\circ$  и  $\gamma = 24, 28, 32^\circ$ . В этой серии максимальное значение угла компланарности при наибольшем кручении достигает  $50^\circ$ . Следует отметить, что стационарные значения угла сближения для траекторий с одинаковой кривизной существенно зависят от кручения траектории. Зависимость стационарных значений угла компланарности от кручения траектории более умеренная.

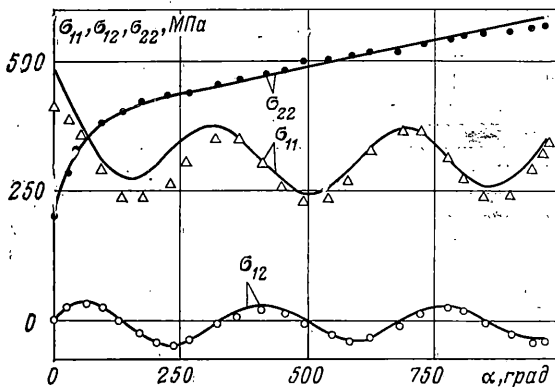
Соответствие расчетных и экспериментальных значений углов сближения и компланарности удовлетворительное. Конечно, основное влияние на разброс экспериментальных значений углов сближения и компланарности внесло численное дифференцирование напряжений и деформаций. К тому же в эксперименте кольцевая деформация задавалась в виде многозвенной ломаной. Применение для обработки экспериментальных результатов сглаживающей аппроксимации, например сглаживающих кубических сплайнов, существенно улучшило бы представление экспериментальных результатов. Но даже и при используемой обработке экспериментальных результатов отличие расчета и эксперимента по стационарным значениям



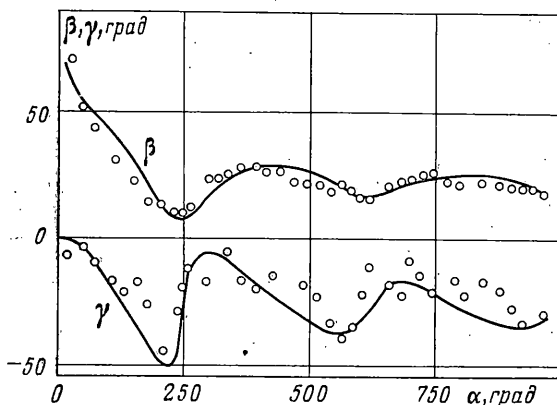
Фиг. 2



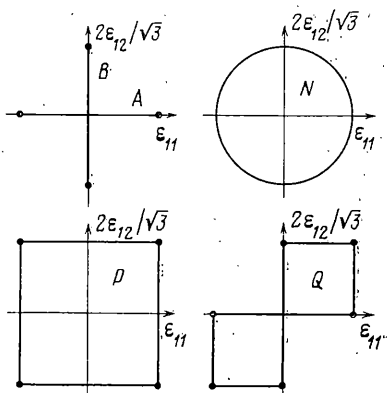
Фиг. 4



Фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 6

углов сближения и компланарности, а также максимальным значениям угла компланарности не превышает  $5^\circ$ .

4. Малоцикловая усталость при сложном нагружении. Накопление повреждений при циклическом изотермическом и неизотермическом нагружениях рассмотрено ранее в [15]. Нагружение было одноосным, т. е. осуществлялось простое лучевое нагружение. Расчет на основе обобщенной модели неупругости получено, что синфазный неизотермический режим нагружения обладает большим повреждающим эффектом нежели изотермический и противофазный неизотермический режимы. Наблюдаемое почти на порядок отличие долговечностей подтверждается результатами экспериментов.

Ниже рассматривается малоцикловая усталость при сложном изотермическом нагружении. Экспериментальные исследования [16, 17] проводились на трубчатых образцах из стали AISI304 в условиях циклического растяжения-сжатия и кручения

Траектория	$\Delta \varepsilon_{11}$	$2\Delta \varepsilon_{12}/\sqrt{3}$	$N_{\text{сост}}$	$N_{1,0 \text{ эк}}$	$N_f \text{ эк}$
A	0,0092	0	8700	10 000	10 300
B	0	0,0092	7400	5000÷7000	32100÷33900
N	0,007	0,007	3600	3340÷3600	3560÷3730
P	0,005	0,005	5900	5110÷6000	5110÷6200
Q	0,005	0,005	9100	7340÷ —	9800÷11080

(P, M — опыты). Реализовалось жесткое нагружение, т. е. задавались осевая и сдвиговая деформации. Испытания проводились по траекториям изображенным на фиг. 6 (A — осевое растяжение-сжатие; B — знакопеременное кручение; N — нагружение по окружности со сдвигом фаз на 90°; P — квадрат; Q — двойной квадрат). В таблице приведены размахи деформаций при циклическом нагружении по каждой траектории. Экспериментальные числа циклов до появления первой поверхностной трещины длиной 1 мм и до окончательного разрушения обозначены соответственно как  $N_{1,0 \text{ эк}}$  и  $N_f \text{ эк}$ . Расчетное число циклов до появления трещины, полученное на основе обобщенной модели неупругости, обозначено как  $N_{\text{сост}}$ . Для определения начальной энергии разрушения  $W_0$  использовались экспериментальные результаты испытаний по траекториям A и B.

При циклическом растяжении-сжатии экспериментальные числа циклов до появления трещины и окончательного разрушения практически совпадают — отличие не превышает 3÷5%. Число циклов до окончательного разрушения при циклическом кручении отличается от числа циклов до появления трещины уже в несколько раз (4÷5 раз). Таким образом скорость роста трещины при кручении значительно меньше скорости при растяжении-сжатии. Одной из основных причин этого отличия является неоднородность напряженного состояния по толщине образца при кручении. Поэтому при анализе результатов экспериментальных исследований по малоцикловой усталости как при простом, так и при сложном нагружении для оценки первой стадии разрушения (накопления повреждений) необходимо в качестве критерия разрушения принимать появление трещины как можно меньших размеров, исходя из возможностей измерительных средств. В противном случае различная относительная продолжительность первой и второй стадий разрушения при растяжении-сжатии и знакопеременном кручении может привести к существенному отличию полученных результатов по накоплению повреждений от действительных.

Долговечность при осевом растяжении-сжатии отличается от долговечности при кручении для одинаковых размахов эквивалентных деформаций. Это объясняется различной величиной интенсивности деформаций при осевом деформировании и при сдвиге, т. к. при осевом деформировании имеет место упругая объемная деформация.

Траектории сложного нагружения N, P и Q имеют практически одинаковые длины дуг деформирования, а траектории P и Q к тому же одинаковые размахи интенсивностей деформаций. Однако долговечности при циклическом нагружении по этим траекториям существенно различны. Большим повреждающим эффектом обладает траектория N постоянной кривизны, нежели траектории P и Q с изломами. И чем больше излом на траектории, тем меньше ее повреждающий эффект. Все это объясняется различным характером разориентации добавочных напряжений и приращений неупругой деформации вдоль каждой траектории сложного нагружения, что в конечном итоге сказывается на работе добавочных напряжений и на повреждении.

Расчетная долговечность для всех рассматриваемых траекторий соответствует экспериментальной — отличие по числу циклов до появления трещин не превышает 20%.

Предложенная обобщенная модель неупругости позволяет исследовать неупругое поведение и разрушение материалов при произвольных процессах сложного неизотермического нагружения.

Проведенные экспериментально-теоретические исследования процессов сложного нагружения по плоским и пространственным траекториям позволили установить и описать ряд особенностей в неупругом поведении и разрушении материалов, не обнаруживаемых известными теориями.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 78—89.
2. Новожилов В. В. О сложном нагружении и перспективах феноменологического подхода к исследованию микронапряжений // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 393—400.



3. *Коротких Ю. Г.* О базовом эксперименте для модели термовязкопластичности // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1977. Вып. 6. С. 3–20.
4. *Кадашевич Ю. И.* О различных вариантах тензорно-линейных соотношений в теории пластичности // Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1967. Вып. 6. С. 39–45.
5. *Хажинский Г. М.* О теории ползучести и длительной прочности металлов // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 6. С. 29–36.
6. *Новожилов В. В.* О пластическом разрыхлении // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 681–689.
7. *Кадашевич Ю. И.* Теория пластичности, учитывающая эффект Баушингера и влияние среднего нормального напряжения на границу текучести // Тр. Ленингр. технол. ин-та целлюлозно-бум. пром-сти, 1965. Вып. 18. С. 234–235.
8. *Бондарь В. С., Горохов В. Б., Санников В. М.* Исследование малоциклового прочностного оболочек вращения при сложном теплосиловом нагружении // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Механика деформируемых систем. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1979. Вып. 12. С. 120–126.
9. *Новожилов В. В., Рыбакина О. Г.* Перспективы построения критерия прочности при сложном нагружении // Инж. ж. МТТ. 1966. № 5. С. 103–111.
10. *Коротких Ю. Г.* Описание процессов накопления повреждений материала при неизотермическом вязкопластическом деформировании // Проблемы прочности. 1985. № 1. С. 18–23.
11. *Мовчан А. А.* Феноменологическое описание дислокационного механизма образования дефектов при пластическом деформировании // ПМТФ. 1987. № 1. С. 147–155.
12. *Бондарь В. С.* Математическая модель неупругого поведения и накопления повреждений материала // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1987. С. 24–29.
13. *Бондарь В. С.* Теория пластичности, ползучести и неупругости в условиях сложного нагружения // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация исследований: Горький, Изд-е Горьк. ун-та, 1987. С. 75–86.
14. *Бондарь В. С.* Пластичность материалов, чувствительных к виду напряженного состояния // Расчеты на прочность и жесткость. М.: Мосстанкин. 1988. С. 3–14.
15. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: Справочник/В. И. Мясенков, В. П. Мальцев, В. П. Майборода и др./Под общ. ред. В. И. Мясенкова. М.: Машиностроение, 1989. 520 с.
16. *Бондарь В. С.* Прогнозирование долговечности материала при неупругом деформировании // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1987. Вып. 28. С. 122–126.
17. *Соси Д.* Модели разрушения при многоосной усталости // Теорет. основы инж. расчетов. 1988. № 3. С. 9–21.

Москва

Поступила в редакцию  
22.I.1990