

УДК 539.3

© 1990 г.

Н. Х. АРУТЮНЯН, В. Э. НАУМОВ, Ю. Н. РАДАЕВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКИ НАРАЩИВАЕМОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА¹.

Ч. I. КИНЕМАТИКА И МЕРЫ ДЕФОРМАЦИИ РАСТУЩЕГО ТЕЛА

Предложена общая математическая модель растущего твердого деформируемого тела. Нарращивание тела осуществляется за счет присоединения к нему в процессе деформирования дополнительных объемов материала. Рассмотрения ограничиваются процессами непрерывного наращивания, когда за каждый бесконечно малый интервал времени к телу присоединяется бесконечно малый объем материала. Конфигурация растущего тела непрерывно изменяется, во-первых, под действием приложенных к нему нагрузок и, во-вторых, за счет неравномерного притока дополнительного материала извне. Существенно, что в рамках предлагаемой концепции растущего тела учитывается импульсное воздействие приращиваемых элементов на растущее тело и их ударная деформация в момент присоединения.

Изложена кинематика конечных деформаций растущего тела, основанная на использовании модифицированного лагранжева описания движения сплошной среды. Отмечается, что кинематика растущего тела принципиально отличается от кинематики континуума постоянного состава. Введено понятие тензора дисторсии растущего тела, который представляется в виде тройного мультипликативного разложения в соответствии с тремя стадиями деформации приращиваемых элементов (до присоединения, в момент удара и в составе растущего тела).

1. Введение. В последние годы происходит бурное развитие разнообразных технологических процессов, связанных с деформированием твердых тел, к которым, в силу особенностей этих технологий, в ходе деформирования присоединяются новые частицы материала. К числу подобных процессов можно отнести, например, лазерное и температурное напыление (наплавку), непрерывную разливку, намотку, быстрое отверждение. В связи с этим представляется актуальной задачей разработка теоретической основы для моделирования процессов формоизменения тел, масса которых непрерывно увеличивается за счет притока материала извне.

Формоизменение таких тел, которые в дальнейшем называются наращиваемыми или растущими, обусловлено одновременным действием двух принципиально различных факторов — деформированием тела под действием приложенных к нему поверхностных и объемных сил, а также неравномерным притоком вещества к разным участкам поверхности растущего тела. При этом динамический характер нагружения и движения растущего тела может определяться, в общем случае, как быстрыми изменениями приложенных нагрузок, так и ударным взаимодействием тела с присоединяющимися частицами.

Рассмотрения в дальнейшем ограничиваются процессами непрерывного (инкрементального) наращивания тел, когда за каждый бесконечно малый промежуток времени к телу приращивается бесконечно малый объем материала. В качестве такого объема может выступать, например, слой материала, имеющий неравномерную инфинитезимальную толщину, покрывающий в данный момент времени полностью или частично внешнюю поверхность растущего тела.

Обзор возможных приложений модели динамически наращиваемого тела мы здесь не приводим. Некоторые соображения по этому поводу были высказаны авторами в предшествующих публикациях². Заметим только, что, в принципе, предложенную в этой работе модель можно рассматривать как обобщение идей И. В. Мещерского, развившего основы динамики абсолютно твердых тел переменной массы, на случай деформируемых тел. (Случай реактивного удаления частиц деформируемого тела в данной работе не обсуждается.)

¹ Публикуемые результаты были доложены авторами на 3-ей Всесоюзной конференции по нелинейной теории упругости, проходившей в г. Сыктывкаре в сентябре 1989 г.

² Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Динамическое наращивание деформируемых тел: Препринт № 374. М.: ИПМ АН СССР, 1989. 43 с.

Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Волны в растущих упругих телах: Препринт № 405. М.: ИПМ АН СССР, 1989. 44 с.

2. Закон движения растущего тела. Определим необходимые для дальнейшего понятия. Тело, существовавшее до начала наращивания, будем называть основным телом. Тело, составленное из материальных элементов, которые присоединились к основному телу за промежуток времени от момента начала наращивания до рассматриваемого момента времени, назовем дополнительным телом, а объединение основного тела с дополнительным телом — растущим телом. Под телом, согласно [3], подразумевается трехмерное дифференцируемое многообразие, образованное материальными частицами X . Часть поверхности растущего тела, по которой в рассматриваемый момент времени присоединяются материальные частицы, будем называть поверхностью наращивания.

Поверхность наращивания Σ в трехмерном евклидовом пространстве R^3 , предполагаемая для простоты связной и кусочно-гладкой, в каждый момент времени t может быть задана параметрическим уравнением (x — место (точка) физического пространства):

$$x = x(E^1, E^2, t), \quad (E^1, E^2) \in \Pi, \quad t \geq 0 \quad (2.1)$$

где E^α ($\alpha=1, 2$) — гауссовы параметры, изменяющиеся в пределах некоторой замкнутой односвязной области $\Pi \subset R^2$. Для определенности принимается, что наращивание начинается в момент $t=0$ некоторой абсолютной шкалы времени (продолжительность процесса наращивания пока несущественна). Поскольку рассматриваются только процессы непрерывного наращивания, то подразумевается непрерывность отображения (2.1) по t . Более того, будем считать отображение (2.1) по крайней мере дважды кусочно-непрерывно дифференцируемым по t .

Не ограничивая общности, плоскую область Π можно считать не изменяющейся с течением времени, так как в противном случае подстановка в (2.1) гладкого диффеоморфизма $E^\alpha = E^\alpha(E_*^1, E_*^2, t)$ ($\alpha=1, 2$), реализующего отображение выбранной фиксированной плоской области Π_* на область Π , приводит к параметризации поверхности наращивания $x = x(E_*^1, E_*^2, t)$ с независимой от времени областью изменения гауссовых параметров Π_* . Следовательно, область Π можно фиксировать произвольным образом, но так, чтобы уравнение $x = x(E^1, E^2, 0)$ являлось параметризацией поверхности наращивания в момент начала наращивания.

Будем считать, что задан закон движения (или просто движение) растущего тела, если в каждый момент времени t известно движение до момента t всех частиц, входящих в состав растущего тела к моменту t . При этом движение частицы до момента присоединения ее к растущему телу само по себе описываться пока не будет; предполагается, что оно определяется дополнительными уравнениями.

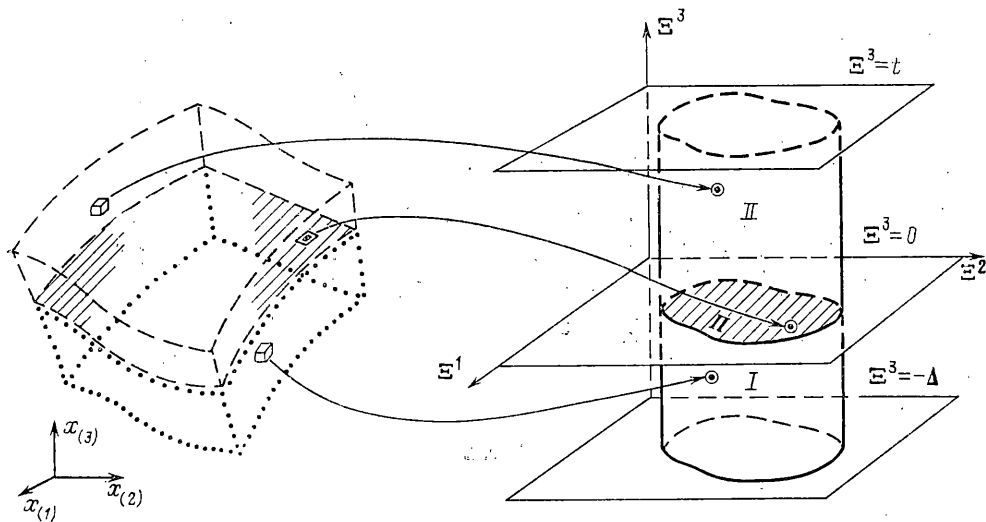
Для описания движения воспользуемся материальным способом (см., например, [4]), который применительно к растущим телам будет несколько модифицирован. Закон движения растущего тела отождествляется с отображением

$$x = \chi(X, t), \quad t \geq \tau_X^* \quad (2.2)$$

где символ X означает материальную частицу, τ_X^* — момент присоединения частицы X к растущему телу. Для исследования отображения (2.2) средствами анализа необходимо поставить в соответствие символическому аргументу X точку некоторого дифференцируемого многообразия (метку частицы X).

Что касается частиц, принадлежащих основному телу, то при выборе для них меток затруднений не возникает: в качестве метки частицы берется, как обычно, положение в пространстве (лагранжева переменная) X , которое частица занимала в момент начала наращивания.

Переходя к идентификации частиц, принадлежащих дополнительному телу, заметим, следуя [2], что пространственные координаты частицы в момент ее присоединения к растущему телу, вообще говоря, не могут служить ее меткой. Это связано с тем обстоятельством, что в принципе в одной и той же точке пространства к растущему телу в разные момен-



Фиг. 1

ты могут присоединяться различные частицы. В качестве метки приращиваемой частицы, согласно [2], возьмем тройку чисел (E^1, E^2, E^3) , где E^1, E^2 — гауссовы координаты места присоединения частицы X к поверхности наращивания, а $E^3 \equiv \tau_x^*$. Метки частиц, присоединившихся к растущему телу за промежуток времени от начала наращивания до текущего момента времени t , образуют замкнутое многообразие в пространстве меток $\{\mathfrak{E}: (E^1, E^2) \in \Pi, 0 \leq E^3 \leq t\}$, которое, как было отмечено выше, без ограничения общности можно считать прямым цилиндром над Π .

Предположим далее, что замкнутая область пространства, которую занимало основное тело при $t=0$, — обозначим ее Ω — диффеоморфна замкнутой цилиндрической области $\{\mathfrak{E}: (E^1, E^2) \in \Pi, -\Delta \leq E^3 \leq t\}$ в пространстве меток (Δ — фиксированное положительное число). Тогда существует гладкий диффеоморфизм $X = \Lambda(\mathfrak{E})$ указанного цилиндра на область Ω , удовлетворяющий условию

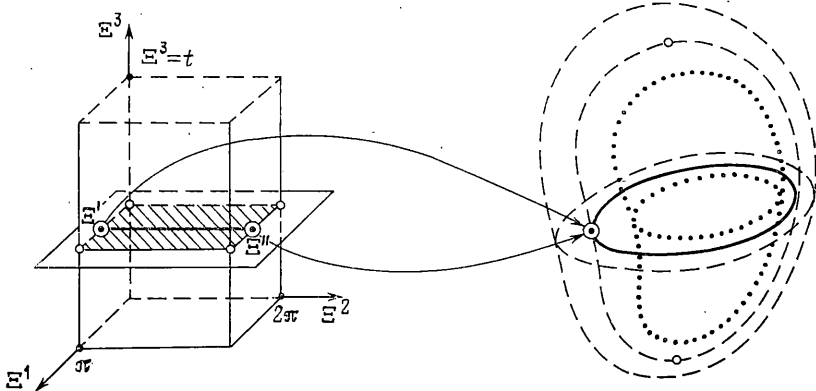
$$\Lambda(E^1, E^2, 0) = x(E^1, E^2, 0), \quad (E^1, E^2) \in \Pi \quad (2.3)$$

где в правой части фигурирует отображение (2.1).

Таким образом, метки материальных частиц, входящих в состав растущего тела до момента времени $t > 0$, образуют многообразие в виде замкнутого цилиндра над плоской областью Π :

$$C^* = \{\mathfrak{E}: (E^1, E^2) \in \Pi, -\Delta \leq E^3 \leq t\} \quad (2.4)$$

схематически изображенного на фиг. 1 справа. Многообразие (2.4) назовем цилиндром, ассоциированным с растущим телом в момент t , или, более кратко, ассоциированным цилиндром. Координаты меток \mathfrak{E} , очевидно, имеют различный смысл в зависимости от положения точки \mathfrak{E} относительно плоскости $E^3 = 0$ внутри ассоциированного цилиндра C^* . Если точка \mathfrak{E} расположена выше этой плоскости (область II на фиг. 1), то координата E^3 есть момент присоединения соответствующей частицы к растущему телу. Если точка \mathfrak{E} расположена ниже указанной плоскости (область I), то все три координаты E^i ($i=1, 2, 3$) можно рассматривать как криволинейные координаты в области Ω , определяемые уравнениями $X^m = \Lambda^m(E^1, E^2, E^3)$ ($m=1, 2, 3$). Метки частиц, расположенных на части границы основного тела $X = \Lambda(E^1, E^2, 0)$, $(E^1, E^2) \in \Pi$, отождествляются с метками частиц, примыкающих к этой границе со стороны дополнительного тела (т. е. с частицами, лежащими на поверхности наращивания при $t=0$), в силу условия (2.3). Слева на фиг. 1 условно показано объектное растущее тело; пунктиром выделено основное тело, штриховыми линиями — дополнительное тело.



Фиг. 2

Остановимся на одном частном случае, когда растущее тело в каждый момент времени t диффеоморфно шару, а поверхность наращивания Σ диффеоморфна сфере, т. е. наращивание осуществляется по всей внешней замкнутой поверхности тела. Осуществляя параметризацию сферы с помощью полярных углов, выберем в качестве области Π прямоугольник $\{(E^1, E^2): 0 \leq E^1 \leq \pi, 0 \leq E^2 \leq 2\pi\}$. Таким образом, ассоциированный цилиндр в данном случае можно представить в виде прямоугольного параллелепипеда с отождествленными гранями $\{0 \leq E^1 \leq \pi, E^2 = 0, 0 \leq E^3 \leq t\}$ и $\{0 \leq E^1 \leq \pi, E^2 = 2\pi, 0 \leq E^3 \leq t\}$.

На фиг. 2 слева показана верхняя часть ассоциированного цилиндра, соответствующая дополнительному телу. Поверхности наращивания в некоторый момент времени $t = t_0 > 0$ соответствует сечение (заштриховано) параллелепипеда плоскостью $E^3 = t_0$. Метки E' и E'' идентифицируют одну и ту же частицу дополнительного тела. Справа на фиг. 2 условно изображена актуальная конфигурация растущего тела. Сплошной жирной линией показан образ отрезка, соединяющего точки E' и E'' , штриховыми линиями — положения поверхности наращивания в разные моменты времени, пунктирной линией — граница основного тела.

Движение растущего тела после подстановки в (2.2) отображения $X \rightarrow E$ определяется отображением

$$x = \chi(E, t), \quad t \geq 0 \quad (2.5)$$

ассоциированного цилиндра C^* на актуальную конфигурацию растущего тела. Обратное отображение

$$E = \chi^{-1}(x, t), \quad t \geq 0 \quad (2.6)$$

определено в области пространства, занимаемой растущим телом в момент времени t . Отображения (2.5), (2.6) будем считать, по крайней мере, дважды кусочно-непрерывно дифференцируемыми по соответствующим независимым переменным.

3. Представление кинематических полей в конвективных координатах. Исходя из движения растущего тела (2.5), обычным образом определяют поля скоростей и ускорений растущего тела:

$$v(E, t) = \dot{\chi}(E, t), \quad a(E, t) = \ddot{\chi}(E, t) \quad (3.1)$$

Здесь и в ряде случаев ниже точками сверху обозначаются материальные производные по времени (частные производные по t при фиксированной переменной E). Соответствующие поля в пространственном (эйлеровом) описании движения получаются в результате подстановки в (3.1) отображения (2.6):

$$v(x, t) = \dot{\chi}(\chi^{-1}(x, t), t), \quad a(x, t) = \ddot{\chi}(\chi^{-1}(x, t), t) \quad (3.2)$$

Отметим также соотношение [1], связывающее поля (3.2):

$$a(x, t) = \dot{v}(x, t) + \{\text{grad } v(x, t)\}v(x, t) \quad (3.3)$$

где штрихом обозначается частное дифференцирование по t при фиксированной переменной x .

Отображение (2.5) при каждом фиксированном t естественным образом определяет криволинейную координатную систему в актуальной конфигурации растущего тела, которая называется конвективной системой координат. Если в пространстве введены декартовы координаты $x_{(i)}$ ($i=1, 2, 3$), то конвективные координаты определяются функциями

$$x_{(i)} = \chi_{(i)}(\Xi^1, \Xi^2, \Xi^3, t) \quad (3.4)$$

Здесь и в дальнейшем индекс в круглых скобках означает компоненты соответствующей величины относительно неподвижной системы координат в пространстве. Индексы, не заключенные в скобки, означают, что компоненты соответствующей величины рассматриваются относительно конвективной системы координат. При этом, если в пространстве введена прямоугольная декартова система координат, то индекс в обозначениях координат помещается снизу. Если в пространстве фиксирована произвольная криволинейная система координат, то соответствующие индексы располагаются сверху. Условимся также, что индексы, обозначаемые малыми латинскими буквами, всюду принимают значения 1, 2, 3, а греческими — значения 1, 2.

Векторы локального ковариантного базиса конвективной системы координат обозначим через e . Компоненты метрического тензора конвективных координат определяются по формуле

$$g_{ij} = (\partial \chi_{(k)} / \partial \Xi^i) (\chi_{(k)} / \partial \Xi^j) \quad (3.5)$$

Декартовы компоненты скорости и ускорения имеют вид

$$v_{(i)} = \dot{\chi}_{(i)}, \quad a_{(i)} = \ddot{\chi}_{(i)} \quad (3.6)$$

Векторные поля v и a разложим по векторам локального базиса e^i : $v = v_i e^i$, $a = a_i e^i$. Имеем следующие равенства [3]:

$$v_i = \partial \chi_{(k)} / \partial \Xi^i \dot{\chi}_{(k)}, \quad a_i = \partial \chi_{(k)} / \partial \Xi^i \ddot{\chi}_{(k)} \quad (3.7)$$

Компоненты метрического тензора и символы Кристоффеля системы криволинейных координат $x^{(i)}$ обозначим через $g_{(ij)}$ и Γ_{ij}^k . Вместо формул (3.5) — (3.7) имеем соответственно формулы [4]:

$$g_{ij} = g_{(mn)} (\partial \chi^{(m)} / \partial \Xi^i) (\partial \chi^{(n)} / \partial \Xi^j) \quad (3.8)$$

$$v^{(i)} = \frac{\partial \chi^{(i)}}{\partial t}, \quad a^{(i)} = \frac{\partial^2 \chi^{(i)}}{\partial t^2} + \Gamma_{(jh)}^{(i)} \frac{\partial \chi^{(h)}}{\partial t} \frac{\partial \chi^{(j)}}{\partial t} \quad (3.9)$$

$$v_i = \frac{\partial \chi^{(h)}}{\partial \Xi^i} \frac{\partial \chi^{(j)}}{\partial t} g_{(jh)}$$

$$a_i = \frac{\partial \chi^{(h)}}{\partial \Xi^i} \frac{\partial^2 \chi^{(i)}}{\partial t^2} g_{(jh)} + \Gamma_{(mp,h)} \frac{\partial \chi^{(m)}}{\partial t} \frac{\partial \chi^{(p)}}{\partial t} \frac{\partial \chi^{(h)}}{\partial \Xi^i} \quad (3.10)$$

Функции $g_{(ij)}$, Γ_{ij}^k заданы в зависимости от криволинейных координат $x^{(i)}$, но в формулы (3.8) — (3.10) следует подставить движение

$$x^{(i)} = \chi^{(i)}(\Xi^1, \Xi^2, \Xi^3, t) \quad (3.11)$$

Сделаем одно замечание, касающееся особенностей кинематики растущих тел, которое имеет принципиальное значение. В исследованиях по механике растущих тел неоднократно обращалось внимание на невозможность, в общем случае, корректного определения поля перемещений растущего тела (см., например, [5]). Действительно, поле перемещений, определяемое как множество векторов, соединяющих точки пространства, где частицы присоединились к растущему телу, с пространственными положениями этих частиц в рассматриваемый момент времени, является, вообще говоря, многозначным. Это связано с тем, что различные частицы могут присоединяться к растущему телу в разные моменты времени в одной и той же точке пространства. Следовательно, в общей математической теории растущих тел вектор перемещения лишается того значения и содержания, которое он имеет в классической механике сплошных сред. В дальнейшем это понятие не используется.

4. Закон наращивания деформируемого тела. Характерная особенность растущего тела состоит в том, что часть его внешней границы — поверхность наращивания — участвует в двух условно разделяемых кинематических процессах. С одной стороны, движение поверхности наращивания определяется деформацией растущего тела под действием приложенных к нему нагрузок и внешних силовых полей. С другой стороны, эта часть поверхности перемещается (возможно, точнее было бы сказать «распространяется») вследствие притока вещества извне. Таким образом, традиционных кинематических переменных для описания движения поверхности растущего тела оказывается недостаточно. Ниже излагается один из возможных подходов, позволяющий описать изменение геометрии поверхности наращивания при неравномерном притоке вещества к телу.

Поверхность наращивания Σ является образом верхнего основания $\Xi^3=t$ ассоциированного цилиндра при отображении (2.5) и, следовательно, определяется параметрическим уравнением

$$\mathbf{x}=\chi(\Xi^1, \Xi^2, t, t), (\Xi^1, \Xi^2) \in \Pi \quad (4.1)$$

Рассмотрим два достаточно близких положения поверхности наращивания: $\Sigma(t)$ и $\Sigma(t+\Delta t)$. В точке P поверхности $\Sigma(t)$ построим единичный вектор нормали \mathbf{n} , направленный во внешность растущего тела, и обозначим через P' точку, в которой вектор \mathbf{n} пересекает поверхность $\Sigma(t+\Delta t)$. Пусть точка P имеет декартовы координаты $x_{(i)}$, а точка P' — координаты $x_{(i)}+\Delta x_{(i)}$. Нормальная скорость G движения поверхности Σ в направлении внешней нормали определяется [6] как предел (Δl — расстояние между точками P и P'): $G=\lim_{\Delta t \rightarrow 0}(\Delta l/\Delta t)$, $\Delta l=(\Delta x_{(i)}\Delta x_{(i)})^{1/2}$.

Вводя понятие δ -производной по времени [6], получим следующее равенство

$$\delta x_{(i)}/\delta t=Gn_{(i)} \quad (4.2)$$

Левую часть (4.2) можно представить в форме

$$\frac{\delta x_{(i)}}{\delta t}=\left[\left(\frac{\partial \chi_{(i)}}{\partial \Xi^\alpha}\right)_{\Xi^3=t}\right] \frac{\delta \Xi^\alpha}{\delta t}+\frac{\partial}{\partial t}[(\chi_{(i)})_{\Xi^3=t}] \quad (4.3)$$

Запись $\partial[(\chi_{(i)})_{\Xi^3=t}]/\partial t$ означает частную производную по t функции $f(\Xi^1, \Xi^2, t)=\chi_{(i)}(\Xi^1, \Xi^2, t, t)$. Умножая обе части равенства (4.3) на $n_{(i)}$ и суммируя по i , получим

$$n_{(i)} \frac{\delta x_{(i)}}{\delta t}=n_{(i)} \frac{\partial}{\partial t}[(\chi_{(i)})_{\Xi^3=t}]$$

и в силу (4.2) имеем

$$G=n_{(i)} \frac{\partial}{\partial t}[(\chi_{(i)})_{\Xi^3=t}] \quad (4.4)$$

Собственная скорость распространения поверхности Σ в направлении нормали определяется следующим образом [4]:

$$s=G-\mathbf{n} \cdot (\chi')_{\Xi^3=t} \quad (4.5)$$

где запись $(\chi')_{\Xi^3=t}$ означает, что сначала производится частное дифференцирование по t вектор-функции $\chi(\Xi, t)$ при фиксированной лагранжевой переменной Ξ , а затем в полученном выражении полагается $\Xi^3=t$. Собственная скорость s в точке P поверхности Σ — это скорость, с которой поверхность наращивания перемещается в направлении нормали \mathbf{n} относительно материальной точки, расположенной в момент времени t в месте P пространства. Поскольку мгновенное положение поверхности наращивания Σ кроме движения растущего тела определяется только наращиванием, то с позиций кинематики процесс наращивания можно описать единственной скалярной функцией $s(\Xi^1, \Xi^2, t)$ — собственной скоростью распространения поверхности наращивания в направлении внешней нормали, которая по существу количественно выражает неравномерность притока вещества к поверхности наращивания.

Особо следует отметить следующее обстоятельство: вектор $(\chi)_{\Xi^3=t}$ на поверхности наращивания Σ есть вектор скорости материальной точки, положение которой на поверхности наращивания в момент времени определяется гауссовыми координатами Ξ^1, Ξ^2 , после ее присоединения к растущему телу (т. е. скорость, которую приобретает материальная точка после удара о растущее тело).

Поскольку функция $s(\Xi^1, \Xi^2, t)$, определяющая неравномерность притока вещества к растущему телу, должна задаваться дополнительными соотношениями, уравнение (4.5) можно рассматривать как кинематическое граничное условие на поверхности наращивания. Если в пространстве введена криволинейная система координат $x^{(i)}$, то кинематическое граничное условие (4.5) с учетом (4.4) можно представить в форме

$$g_{(mk)}n^{(m)}\left\{\frac{\partial}{\partial t}[(\chi^{(k)})_{\Xi^3=t}]-\left[\frac{\partial\chi^{(k)}}{\partial t}\right]_{\Xi^3=t}\right\}=s(\Xi^1, \Xi^2, t)$$

После очевидного преобразования последняя формула принимает вид

$$g_{(mk)}n^{(m)}(\partial\chi^{(k)}/\partial\Xi^3)_{\Xi^3=t}=s(\Xi^1, \Xi^2, t) \quad (4.6)$$

Кинематическое граничное условие (4.6) будем называть также законом наращивания, а функцию s — скоростью наращивания. Используя выражение [4]

$$n_{(r)}=1/2\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{(rsp)}((\partial\chi^{(s)}/\partial\Xi^\alpha)(\partial\chi^{(p)}/\partial\Xi^\beta))_{\Xi^3=t} \quad (4.7)$$

для единичного вектора нормали поверхности наращивания, соотношение (4.6) можно также представить в форме

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{(rsp)}\left(\frac{\partial\chi^{(1)}}{\partial\Xi^\alpha}\frac{\partial\chi^{(p)}}{\partial\Xi^\beta}\frac{\partial\chi^{(r)}}{\partial\Xi^3}\right)_{\Xi^3=t}=2s(\Xi^1, \Xi^2, t) \quad (4.8)$$

В выражениях (4.7), (4.8) использованы ε -символы Леви-Чивита [3].

5. Тензор дисторсии растущего тела. Корректное определение любой величины, характеризующей деформацию тела, подразумевает выбор некоторого отсчетного состояния тела, по отношению к которому имеет смысл говорить об изменении этой величины в процессе деформирования. В нелинейной механике деформируемого тела в качестве отсчетного состояния используется конфигурация тела в некоторый (обычно начальный) момент времени [4, 7]. После выбора в качестве лагранжевой переменной положения частицы в отсчетной конфигурации, движение континуума постоянного состава описывается точечным отображением отсчетной конфигурации на актуальную. Основой построения мер деформации при этом является линейная аппроксимация упомянутого точечного отображения (градиент деформации).

Указанная схема, однако, не пригодна для описания деформации растущего тела, так как в этом случае невозможно описать деформацию посредством точечного отображения областей евклидова пространства. Принципиальное отличие растущего тела состоит в том, что его деформация не может быть отнесена ни к одной конфигурации тела в процессе движения. Действительно, в каждый момент времени к растущему телу присоединяются частицы, которые до этого не входили в его состав и, следовательно, не имеют прообразов в пройденных конфигурациях.

Переходя к определению тензора дисторсии растущего тела, воспользуемся общим подходом к построению тензора деформации сплошной среды как меры искажения репера конвективной системы координат в процессе деформирования тела. Тензор дисторсии трактуется при этом как линейный оператор, переводящий начальное положение конвективного репера в его актуальное положение (см., например, [8, 9]).

Рассмотрим элемент с меткой Ξ . Момент его зарождения, т. е. момент, начиная с которого имеет смысл говорить о его существовании, в абсолютной шкале времени обозначим через $\tau^\circ(\Xi)$, а момент его присоединения к растущему телу — через $\tau^*(\Xi)$ (это обозначение, по существу, уже введено в п. 2). Отметим, что $\tau^\circ(\Xi) \leq \tau^*(\Xi) \equiv \Xi^3$ ($\Xi^3 > 0$). Если в момент зарождения

дения элемента Ξ связать с этим элементом локальный репер $[\Xi; \mathbf{a}_1(\Xi, \tau^\circ(\Xi)), \mathbf{a}_2(\Xi, \tau^\circ(\Xi)), \mathbf{a}_3(\Xi, \tau^\circ(\Xi))]$, то в последующие моменты времени этот репер искажается вследствие деформации элемента. Конвективный репер элемента в момент t обозначим через $[\Xi; \mathbf{a}_1(\Xi, t), \mathbf{a}_2(\Xi, t), \mathbf{a}_3(\Xi, t)]$.

Тензор дисторсии растущего тела в момент t определим как тензорное поле второго ранга $\mathbf{G}(\Xi, t)$ соотношениями

$$\mathbf{G}(\Xi, t) \mathbf{a}_i(\Xi, \tau^\circ(\Xi)) = \mathbf{a}_i(\Xi, t) \quad (5.1)$$

$$(\Xi^1, \Xi^2) \in \Pi, -\Delta \leq \Xi^3 \leq t, t \geq \tau^\circ(\Xi)$$

Таким образом, тензор дисторсии растущего тела формально представляет собой линейный оператор, отображающий «начальный» конвективный базис на «актуальный» и характеризует аффинную деформацию элемента растущего тела относительно конфигурации этого элемента в момент $\tau^\circ(\Xi)$.

Приступим к исследованию аналитической структуры тензора дисторсии \mathbf{G} , схематизировав предварительно в общих чертах физическую картину деформации элемента растущего тела. Процесс деформации элемента растущего тела разделяется на три этапа. Первый этап начинается с момента зарождения элемента $\tau^\circ(\Xi)$ и заканчивается в момент времени непосредственно предшествующий удару элемента о поверхность растущего тела; обозначим этот момент символом $\tau^*(\Xi) - 0$. На этом этапе элемент деформируется независимо от растущего тела. То обстоятельство, что элемент материала до прирачивания может приобретать произвольную деформацию, не согласованную с деформацией поверхностных элементов тела, в излагаемой теории имеет фундаментальное значение. Второй этап не имеет протяженности во времени и состоит в неупругом ударе прирачиваемого элемента о поверхность нарачивания, происходящем в мгновение $\tau^*(\Xi)$. Предполагается, что после удара элемент «прилипает» к растущему телу. Удар сопровождается, естественно, дополнительной деформацией элемента. Третий этап начинается в момент времени, непосредственно следующий за моментом соударения, и обозначаемый $\tau^*(\Xi) + 0$. На третьем этапе элемент деформируется уже в составе растущего тела.

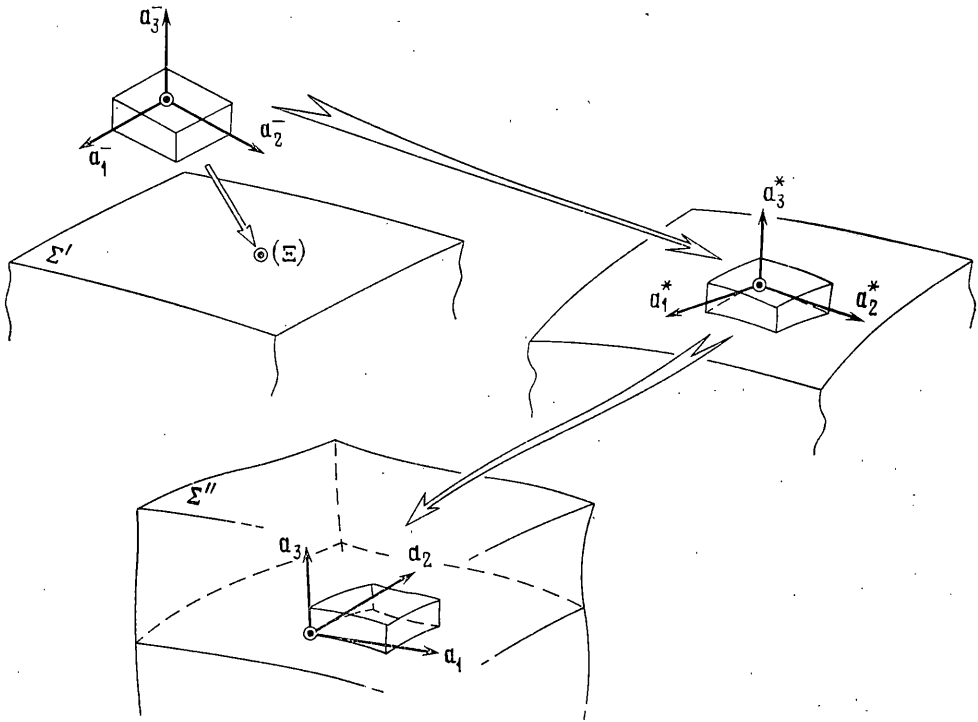
С учетом изложенных представлений обратимся к выводу мультипликативного разложения тензора дисторсии растущего тела. Зафиксируем некоторый момент времени t и рассмотрим актуальное положение поверхности нарачивания Σ . В момент времени t поверхность Σ состоит из частиц, метки которых удовлетворяют условию $\tau^*(\Xi) = t$. Конвективный репер элемента с меткой Ξ в момент $\tau^*(\Xi) - 0$ будем обозначать через $[\Xi; \mathbf{a}_1^-(\Xi), \mathbf{a}_2^-(\Xi), \mathbf{a}_3^-(\Xi)]$. Введем тензор $\mathbf{G}^-(\Xi)$:

$$\mathbf{G}^-(\Xi) \mathbf{a}_i^-(\Xi) = \mathbf{a}_i^-(\Xi) \quad (\mathbf{a}_i^-(\Xi) \equiv \mathbf{a}_i(\Xi, \tau^\circ(\Xi))) \quad (5.2)$$

характеризующий аффинную деформацию элемента непосредственно перед его присоединением к растущему телу относительно конфигурации этого элемента в момент зарождения $\tau^\circ(\Xi)$. Предполагается, что в момент зарождения элемент находится в ненапряженном и недеформированном состоянии. Тензорное поле \mathbf{G}^- явно от времени не зависит, так как базис $\mathbf{a}_i^-(\Xi)$ может быть выбран произвольно, а базис $\mathbf{a}_i^-(\Xi) \equiv \mathbf{a}_i(\Xi, \Xi^3)$, т. е. тоже явно не зависит от времени. Тем не менее, возможность реологического формоизменения элемента с меткой Ξ в промежутке времени от его зарождения до удара о растущее тело не исключается. В этом случае необходимо задавать предысторию тензора \mathbf{G}^- при $t \in [\tau^\circ(\Xi), \tau^*(\Xi)]$ (предыстория тензора понимается в смысле [1]).

При ударе элемента с меткой Ξ о растущее тело в момент времени $t = \tau^*(\Xi)$ происходит мгновенное изменение его деформированного состояния. Конвективный репер элемента с меткой Ξ в момент $\tau^*(\Xi) + 0$ обозначим через $[\Xi; \mathbf{a}_1^*(\Xi), \mathbf{a}_2^*(\Xi), \mathbf{a}_3^*(\Xi)]$. Введем тензор ударной дисторсии $\mathbf{G}^*(\Xi)$:

$$\mathbf{G}^*(\Xi) \mathbf{a}_i^-(\Xi) = \mathbf{a}_i^*(\Xi) \quad (5.3)$$



Фиг. 3

характеризующий мгновенное изменение аффинной деформации элемента с меткой Ξ в результате его удара о растущее тело. Для вычисления тензора \mathbf{G}^* , в принципе, необходимо получить точное решение задачи о неупругом ударе приращиваемого элемента о растущее тело. Наконец, определим тензор $\mathbf{G}^+(\Xi, t)$:

$$\mathbf{G}^+(\Xi, t) \mathbf{a}_i^*(\Xi) = \mathbf{a}_i(\Xi, t) \quad (5.4)$$

который будем называть тензором дисторсии элемента в составе растущего тела. Тензор \mathbf{G}^+ характеризует совместную деформацию частиц в составе растущего тела и выражается через закон движения растущего тела (2.5).

На фиг. 3 схематично показаны стадии деформирования приращиваемого элемента. Слева сверху: положение в момент времени $\tau^*(\Xi) - 0$. Точки, выделенные кружками, после соударения сливаются. Справа сверху: момент $\tau^*(\Xi) + 0$ непосредственно после удара приращиваемого элемента о растущее тело. В результате удара репер элемента мгновенно искажается. Внизу: деформация элемента в составе растущего тела при $t > \tau^*(\Xi) + 0$ (Σ' и Σ'' — поверхности наращивания в разные моменты времени).

В силу определений (5.1)–(5.4) и правила композиции деформаций [1] справедливо разложение

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^+ \mathbf{G}^* \mathbf{G}^- \quad (5.5)$$

Разложение (5.5) является основным в кинематике наращиваемого тела. В нередуцированном виде разложение (5.5) справедливо при $0 \leq \Xi^3 \leq t$. Если $-\Delta \leq \Xi^3 < 0$, то $\mathbf{G}^* = \mathbf{I}$ (\mathbf{I} — единичный тензор). Если при этом основное тело не деформировалось до начала наращивания, то, кроме того, $\mathbf{G}^- = \mathbf{I}$.

Из мультипликативного разложения (5.5) следует, что тензорное поле $\mathbf{G}(\Xi, t)$, вообще говоря, не является даже непрерывным. Действительно, элементы, имеющие достаточно близкие материальные метки Ξ и $\Xi + \delta\Xi$, могут зарождаться в разные (отнюдь не близкие) моменты времени $\tau^\circ(\Xi)$ и $\tau^\circ(\Xi + \delta\Xi)$ и иметь существенно различные предыстории деформирования от своего зарождения до присоединения к растущему телу. Поэтому тен-

зоры $G^-(\Xi)$ и $G^-(\Xi+\delta\Xi)$ могут, вообще говоря, отличаться на конечную величину, даже если приращение $\delta\Xi$ бесконечно мало. В дальнейшем, чтобы не усложнять изложение теории, тензорное поле $G(\Xi, t)$ будем считать непрерывно дифференцируемым по Ξ всюду внутри ассоциированного цилиндра (2.4) за исключением, может быть, конечного числа кусочно-гладких поверхностей.

Заметим далее, что в определяющие уравнения для растущего тела, все элементы которого состоят из изотропного материала, в силу принципа объективности [1], тензор дисторсии может входить только в формах

$$C = G^T G \quad (5.6)$$

$$B = G G^T \quad (5.7)$$

Тензоры (5.6) и (5.7), следуя терминологии [1], будем называть правым и левым тензорами деформации Коши — Грина для растущего тела, соответственно.

Введем обозначения $B^- = G^-(G^-)^T$, $B^+ = G^+(G^+)^T$, $B^* = G^*(G^*)^T$ и приведем компоненты мер деформации в конвективных координатах растущего тела. Так как тензор G^- (а, следовательно, и тензор B^-) задан, то вычисление его компонент относительно базиса $\{e^i\}$ не представляет затруднений. Тензор G^* (а также B^*) определяется кинематикой удара элемента о растущее тело. Представление тензора ударной дисторсии G^* в случае абсолютно неупругого удара будет дано ниже (п. 6). Вычисляя компоненты композиции $(G^+)^T G^+$ в конвективных координатах, получим следующие формулы:

$$(B^+)^{km} = g^{*km}, \quad ((B^+)^{-1})_{km} = g_{km}^* \quad (5.8)$$

$$g_{ij}^*(\Xi) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \Xi^3+0} g_{ij}(\Xi^1, \Xi^2, \Xi^3, t), & \Xi^3 > 0 \\ \partial\Lambda/\partial\Xi^i \cdot \partial\Lambda/\partial\Xi^j, & -\Delta < \Xi^3 \leq 0 \end{cases}$$

где $\Lambda = \Lambda(\Xi^1, \Xi^2, \Xi^3)$ — начальный диффеоморфизм, определенный в п. 2. Вычисляя компоненты композиции $(G^+)^T G^+$, можно получить формулы для компонент тензора C^+ , вполне аналогичные формулам (5.8). Указанные формулы потребуются в дальнейшем для координатного представления определяющих уравнений растущего тела.

6. Представление тензора ударной дисторсии в конвективных координатах. Рассмотрим деформацию приращиваемого элемента с меткой Ξ ($\Xi^3 \geq 0$) вследствие его удара о поверхность растущего тела. При описании удара элемента о поверхность наращивания ограничимся (во избежание усложнения теории) представлениями классической концепции абсолютно неупругого удара материальной точки о движущуюся связь [10, 11]. Эта концепция базируется на следующих основных положениях: 1) продолжительность удара бесконечно мала (в рамках математической теории строго равна нулю); 2) за время удара ни частица, ни связь (т. е. поверхность, движущаяся в пространстве, о которую ударяется частица) не успевают изменить своего положения в пространстве; 3) за время удара (исчезающе малое) импульс всякой конечной силы равен нулю, но импульс ударной реакции связи конечен; 4) в результате абсолютно неупругого удара происходит мгновенное изменение скорости частицы — она становится равной скорости связи, а скорость связи не изменяется.

Перейдем к исследованию линейного оператора G^* , характеризующего мгновенную аффинную деформацию элемента, ударяющегося о растущее тело. Зафиксируем некоторый момент времени t и рассмотрим мгновенное положение поверхности наращивания Σ . Ее положение в пространстве определяется параметрическим уравнением (4.1). Введем также неявное уравнение поверхности Σ , эквивалентное (4.1):

$$f(x, t) = 0 \quad (6.4)$$

причем пусть точки x , удовлетворяющие неравенству $f(x, t) < 0$, примыкают к поверхности Σ со стороны растущего тела. Скорости приращиваемых материальных частиц зададим эйлеровым полем $v_A(x, t)$. Следовательно, скорость материальной точки с меткой Ξ в момент, непосредствен-

но предшествующий удару о растущее тело (скорость падения), определяется равенством

$$\mathbf{v}^-(\Xi) \equiv \mathbf{v}_A(\chi(\Xi, \Xi^3), \Xi^3) \quad (6.2)$$

Связь (6.1) оказывает ударное воздействие на приращиваемую частицу только при условии [11]:

$$(\mathbf{v}^- \cdot \partial f / \partial \mathbf{x} + \partial f / \partial t)_{\mathbf{x}=\chi(\Xi, \Xi^3), t=\Xi^3} < 0 \quad (6.3)$$

согласно которому скорость падающей частицы должна быть несовместна со скоростью движущейся поверхности в месте и в момент удара частицы об эту поверхность. Заметим, что в формуле (6.3) через $\partial f / \partial t$ обозначена частная производная по t при фиксированной эйлеровой переменной \mathbf{x} .

Ударный импульс скачком изменяет скорость $\mathbf{v}^-(\Xi)$ до скорости связи

$$\mathbf{v}^*(\Xi) = [\chi^*(\Xi, t)]_{t=\Xi^3} \quad (6.4)$$

Таким образом, скачок вектора скорости приращиваемой частицы вследствие ее удара о поверхность Σ равен разности векторов \mathbf{v}^* и \mathbf{v}^- (формулы (6.4) и (6.2)). Отметим также следующее равенство

$$(\mathbf{v}^* \cdot \partial f / \partial \mathbf{x} + \partial f / \partial t)_{\mathbf{x}=\chi(\Xi, \Xi^3), t=\Xi^3} = 0 \quad (6.5)$$

Следствием формул (6.3) и (6.5) является условие

$$[\mathbf{v}^*(\Xi) - \mathbf{v}^-(\Xi)] \cdot \mathbf{n}^* > 0 \quad (6.6)$$

где $\mathbf{n}^* \equiv \mathbf{n}(\Xi^1, \Xi^2, t)_{t=\Xi^3}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности Σ при $t = \Xi^3$. Условие (6.6) будем называть условием соударения.

Рассмотрим мгновенную аффинную деформацию элемента с меткой Ξ . Введем ортонормированный репер $[\Xi; \mathbf{l}(\Xi), \mathbf{m}(\Xi), \mathbf{n}^*(\Xi)]$, «вмороженный» в элемент непосредственно перед ударом о поверхность Σ , который выбирается таким образом, чтобы орт \mathbf{l} совпадал по направлению с проекцией \mathbf{v}_T^* вектора скорости поверхности наращивания $\mathbf{v}^*(\Xi)$ на касательную плоскость T . (Если $v_T^* = 0$, то орт \mathbf{l} может быть выбран произвольно в плоскости T .) Орт \mathbf{n}^* направлен вдоль внешней нормали к Σ в точке (Ξ^1, Ξ^2) . Орт \mathbf{m} , лежащий в плоскости T , выбирается так, чтобы репер был правым. На фиг. 4 показана ситуация, непосредственно предшествующая удару элемента о поверхность Σ , когда точки M_0 и M_0' фактически сливаются.

Зафиксируем некоторый момент времени $t = \Xi^3$ и близкий момент времени $t = \Xi^3 + \Delta \Xi^3$. В течение этого промежутка времени к растущему телу подходит слой материала, имеющий толщину Δn^* вдоль нормали \mathbf{n}^* , равную

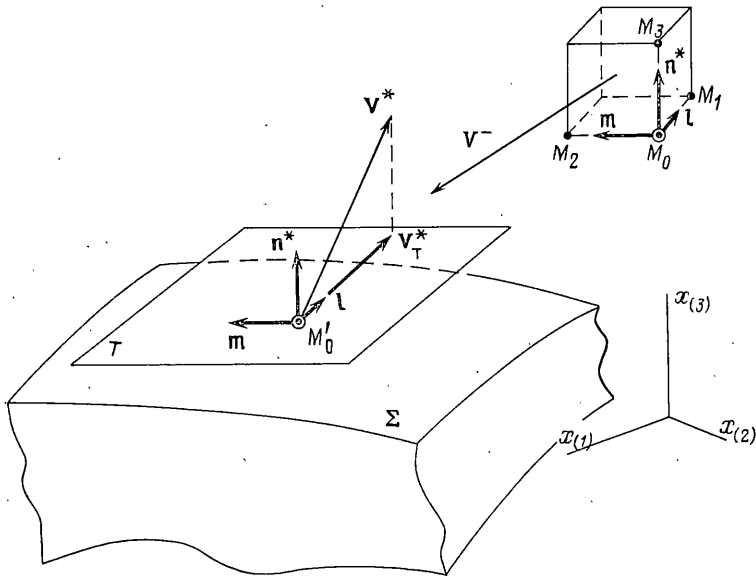
$$\Delta n^* = [s(\Xi^1, \Xi^2, t)]_{t=\Xi^3} \Delta \Xi^3 + [\mathbf{v}^*(\Xi) - \mathbf{v}^-(\Xi)] \cdot \mathbf{n}^*(\Xi) \Delta \Xi^3 + o(\Delta \Xi^3) \quad (6.7)$$

где $s(\Xi^1, \Xi^2, t)$ — скорость наращивания (см. п. 4). После удара толщина этого слоя становится равной $(s)_{t=\Xi^3} \Delta \Xi^3$. В силу условия соударения (6.6) второе слагаемое в формуле (6.7) будет положительным и, следовательно, элемент испытывает деформацию сжатия в направлении нормали к поверхности наращивания. Выделим в приращиваемом слое элемент объема в виде прямоугольного параллелепипеда с направляющими гранями \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n}^* и длинами ребер Δl , Δm , Δn^* соответственно. Определим искажение ортонормированного базиса $(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}^*)$ в результате удара выделенного элемента о растущее тело. Для этого определим мгновенное изменение положений четырех точек M_0, M_1, M_2, M_3 , задаваемых в пространстве соответственно радиус-векторами $\mathbf{x}_0 = \chi(\Xi, \Xi^3)$, $\mathbf{x}_1 = \chi(\Xi, \Xi^3) + \mathbf{l} \Delta l$, $\mathbf{x}_2 = \chi(\Xi, \Xi^3) + \mathbf{m} \Delta m$, $\mathbf{x}_3 = \chi(\Xi, \Xi^3) + \mathbf{n}^* \Delta n^*$. С точностью до малых высшего порядка относительно $\Delta \Xi^3$ мгновенные изменения положений точек M_0, M_1, M_2 соответственно равны

$$\Delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{v}^*(\Xi) \Delta \Xi^3$$

$$\Delta \mathbf{x}_1 = [\mathbf{v}^*(\Xi) + \partial \mathbf{v}^*(\Xi) / \partial \Xi^{\alpha} t^{\alpha} \Delta l + o(\Delta l)] \Delta \Xi^3 \quad (6.8)$$

$$\Delta \mathbf{x}_2 = [\mathbf{v}^*(\Xi) + \partial \mathbf{v}^*(\Xi) / \partial \Xi^{\alpha} m^{\alpha} \Delta m + o(\Delta m)] \Delta \Xi^3$$



Фиг. 4

где l^{α} , m^{α} — компоненты векторов \mathbf{l} , \mathbf{m} относительно локального базиса $\mathbf{e}_{\alpha}^*(\Xi) = (\partial \chi / \partial \Xi^{\alpha})_{t=\Xi^3}$. Мгновенное изменение положения точки M_3 определяется вектором

$$\Delta \mathbf{x}_3 = \mathbf{v}_A(\chi(\Xi, \Xi^3) + \mathbf{n}^* \Delta n^*, \Xi^3 + \Delta \Xi^3) \Delta \Xi^3 \quad (6.9)$$

Предполагается, что мгновенные перемещения (6.8), (6.9) являются кинематически возможными для приращиваемого элемента. Далее рассмотрим линейный оператор $\mathbf{Q}(\Xi, \Delta l, \Delta m, \Delta \Xi^3)$, преобразующий ортонормированный базис $(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}^*)$ в соответствии со следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}\mathbf{l} &= -\frac{\Delta \Xi^3}{\Delta l} \mathbf{v}^*(\Xi) + \mathbf{l}(\Xi) + \left[\frac{1}{\Delta l} \mathbf{v}^*(\Xi) + \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial \Xi^{\alpha}}(\Xi) l^{*\alpha} + \frac{\mathbf{o}(\Delta l)}{\Delta l} \right] \Delta \Xi^3 \\ \mathbf{Q}\mathbf{m} &= -\frac{\Delta \Xi^3}{\Delta m} \mathbf{v}^*(\Xi) + \mathbf{m}(\Xi) + \left[\frac{1}{\Delta m} \mathbf{v}^*(\Xi) + \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial \Xi^{\alpha}}(\Xi) m^{*\alpha} + \frac{\mathbf{o}(\Delta m)}{\Delta m} \right] \Delta \Xi^3 \\ \mathbf{Q}\mathbf{n}^* &= -\frac{\Delta \Xi^3}{\Delta n^*} \mathbf{v}^*(\Xi) + \mathbf{n}^*(\Xi) + \mathbf{v}_A(\chi(\Xi, \Xi^3) + \mathbf{n}^* \Delta n^*, \Xi^3 + \Delta \Xi^3) \frac{\Delta \Xi^3}{\Delta n^*} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Линейный оператор $\mathbf{Q}(\Xi, \Delta l, \Delta m, \Delta \Xi^3)$ описывает искажение кинематически предпочтительного репера, обусловленное ударом элемента с меткой Ξ о поверхность нараращения (фиг. 5) и деформацией самой поверхности Σ за время $\Delta \Xi^3$. После ряда преобразований, с учетом выражения (6.7) для Δn^* , формулы (6.10) можно представить в следующем виде:

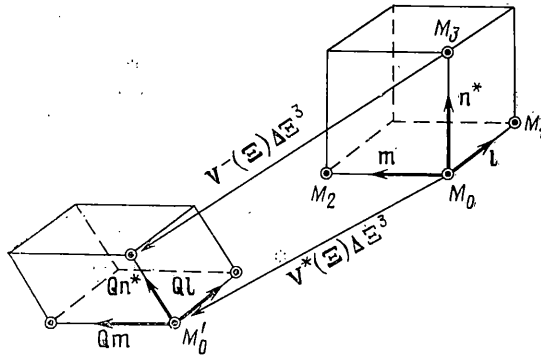
$$\begin{aligned} \mathbf{Q}\mathbf{l} &= \mathbf{l}(\Xi) + \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial \Xi^{\alpha}}(\Xi) l^{*\alpha} \Delta \Xi^3 + \frac{\mathbf{o}(\Delta l)}{\Delta l} \Delta \Xi^3 \\ \mathbf{Q}\mathbf{m} &= \mathbf{m}(\Xi) + \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial \Xi^{\alpha}}(\Xi) m^{*\alpha} \Delta \Xi^3 + \frac{\mathbf{o}(\Delta m)}{\Delta m} \Delta \Xi^3 \\ \mathbf{Q}\mathbf{n}^* &= \mathbf{n}^*(\Xi) - \{s(\Xi) + [\mathbf{v}^*(\Xi) - \mathbf{v}^-(\Xi)] \cdot \mathbf{n}^*(\Xi) + \mathbf{o}(\Delta \Xi^3) / \Delta \Xi^3\}^{-1} \times \\ &\quad \times [\mathbf{v}^*(\Xi) - \mathbf{v}_A(\chi(\Xi, \Xi^3), \Xi^3)] + \mathbf{O}([\Delta \Xi^3]^2) \end{aligned} \quad (6.11)$$

В силу определения тензора ударной дисторсии растущего тела

$$\mathbf{G}^*(\Xi) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0, \Delta m \rightarrow 0, \Delta \Xi^3 \rightarrow 0} \mathbf{Q}(\Xi, \Delta l, \Delta m, \Delta \Xi^3) \quad (6.12)$$

Предельный переход в формулах (6.11) приводит к равенствам

$$\mathbf{G}^*(\Xi) \mathbf{l}(\Xi) = \mathbf{l}(\Xi), \quad \mathbf{G}^*(\Xi) \mathbf{m}(\Xi) = \mathbf{m}(\Xi) \quad (6.13)$$



Фиг. 5

$$G^*(\Xi) n^*(\Xi) = n^*(\Xi) + \frac{v^-(\Xi) - v^*(\Xi)}{s(\Xi) + [v^*(\Xi) - v^-(\Xi)] \cdot n^*(\Xi)}$$

Все входящие в (6.13) величины определены формулами (4.4), (4.5), (6.2), (6.4) и, следовательно, выражаются через закон движения растущего тела (2.5). Из формул (6.13) следует, в частности, что орты l и m , вмороженные в элемент и лежащие в касательной плоскости к поверхности наращивания, линейным оператором G^* не искажаются. Более того, можно показать, что растущее тело не испытывает мгновенной деформации в результате удара приращиваемого элемента инфинитесимальной толщины. Элемент приращиваемого материала (имеющий толщину вдоль нормали n , пропорциональную Δt) за время Δt деформирует область растущего тела, заключенную внутри сферы радиуса $c\Delta t$, где c — конечная скорость передачи импульса в материале растущего тела. В пределе, при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем, что растущее тело не приобретает мгновенной деформации, обусловленной ударом приращиваемого бесконечно малого элемента (сделанный вывод зафиксируем как принцип ударной жесткости поверхности наращивания). Вся энергия ударной деформации, таким образом, запасается в присоединившемся элементе.

Перейдем к вычислению компонент тензора ударной дисторсии в конвективных координатах растущего тела. Введем следующее обозначение

$$w(\Xi) = \frac{v^-(\Xi) - v^*(\Xi)}{s(\Xi) + [v^*(\Xi) - v^-(\Xi)] \cdot n^*(\Xi)} \quad (6.14)$$

Для упрощения записи будем предполагать, что в пространстве зафиксирована декартова система координат $x_{(p)}$ с базисными векторами $i_{(p)}$. Вычислим сначала компоненты тензора G^* в декартовых координатах пространства.

Следствием формул (6.13) являются следующие равенства

$$(\partial \chi_{(p)} / \partial \Xi^i)_{t=\Xi^3} [G^*(\Xi) - I] i_{(p)} = 0, \quad (\partial \chi_{(p)} / \partial \Xi^2)_{t=\Xi^3} [G^*(\Xi) - I] i_{(p)} = 0 \quad (6.15)$$

$$\frac{1}{2} e_{(psq)} \frac{e^{\alpha\beta}}{\sqrt{a^*}} \left(\frac{\partial \chi_{(s)}}{\partial \Xi^\alpha} \frac{\partial \chi_{(q)}}{\partial \Xi^\beta} \right)_{t=\Xi^3} [G^*(\Xi) - I] i_{(p)} = w_{(r)} i_{(r)}$$

$$a^* = \det \| a_{\alpha\beta}^* \|, \quad a_{\alpha\beta}^* = (\partial \chi_{(k)} / \partial \Xi^\alpha \partial \chi_{(k)} / \partial \Xi^\beta)_{t=\Xi^3}$$

Здесь использованы двух- и трехиндексные кососимметричные e -символы [3].

Декартовы компоненты векторного поля w определяются равенствами

$$w_{(r)} = \frac{v_{A(r)}(\chi(\Xi, \Xi^3), \Xi^3) - [\chi_{(r)}(\Xi, t)]_{t=\Xi^3}}{s(\Xi) + n_{(k)}^* [\chi_{(k)}(\Xi, t)]_{t=\Xi^3} - n_{(k)}^* v_{A(k)}(\chi(\Xi, \Xi^3), \Xi^3)} \quad (6.16)$$

$$n_{(p)}^* = \frac{1}{2} e_{(psq)} \frac{e^{\beta\gamma}}{\sqrt{a^*}} \left(\frac{\partial \chi_{(s)}}{\partial \Xi^\beta} \frac{\partial \chi_{(q)}}{\partial \Xi^\gamma} \right)_{t=\Xi^3}$$

Из формул (6.15) следует

$$\left[\left(\frac{\partial \chi_{(p)}}{\partial \Xi^\alpha} \right)_{t=\Xi^3} G_{(mp)}^* - \frac{\partial \chi_{(m)}}{\partial \Xi^\alpha} \right] \mathbf{i}_m = 0, \quad (n_{(p)}^* G_{(mp)}^* - n_{(m)}^* - w_{(m)}) \mathbf{i}_m = 0 \quad (6.17)$$

Таким образом, для определения девяти компонент $G_{(mp)}^*$ имеем следующую систему девяти линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (\partial \chi_{(p)} / \partial \Xi^\alpha)_{t=\Xi^3} G_{(mp)}^* &= (\partial \chi_{(m)} / \partial \Xi^\alpha)_{t=\Xi^3} \\ n_{(p)}^* G_{(mp)}^* &= n_{(m)}^* + w_{(m)} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Определитель линейной системы (6.18) отличен от нуля, так как три вектора $(\partial \chi_{(p)} / \partial \Xi^\alpha)_{t=\Xi^3} \mathbf{i}_{(p)}$, $n_{(p)}^* \mathbf{i}_{(p)}$ образуют базис пространства $x_{(r)}$ и, следовательно, система имеет единственное решение.

После нахождения компонент $G_{(i)}^*$ в результате решения системы (6.18), компоненты тензора \mathbf{G}^* в конвективных координатах растущего тела вычисляются по закону $G_{mn}^* = \partial \chi_{(p)} / \partial \Xi^m \partial \chi_{(q)} / \partial \Xi^n G_{(pq)}^*$.

Заметим, что компоненты $G_{(pq)}^*$ зависят от лагранжевых переменных Ξ^1, Ξ^2, Ξ^3 , а компоненты G_{mn}^* , кроме того, зависят еще от переменной t , так как компоненты тензора $\mathbf{G}^*(\Xi)$ вычисляются относительно локального базиса, изменяющегося со временем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Truesdell C., Noll W. The non-linear field theories of mechanics // Handbuch der Physik./Ed. by S. Flügge. Vol. III/3. Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1965. 602 p.
2. Метлов В. В. О наращивании неоднородных вязкоупругих тел при конечных деформациях // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 637–647.
3. Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 374 с.
4. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ: С приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 411 с.
5. Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д., Наумов В. Э. Механика растущих вязкоупруго-пластических тел. М.: Наука, 1987. 471 с.
6. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
7. Прагер В. Введение в механику сплошных сред. Изд-во иностр. лит., 1963. 311 с.
8. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 455 с.
9. Жермен П. Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1983. 399 с.
10. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 2. Динамика системы. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
11. Суслов Г. К. Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.

Москва, Куйбышев

Поступила в редакцию
15.II.1990