

УДК 539.3

© 1990 г.

И. И. ВОРОВИЧ, М. А. СУМБАТЯН

## ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОБРАЗА ДЕФЕКТА ПО РАССЕЯННОМУ ВОЛНОВОМУ ПОЛЮ В АКУСТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассматривается задача восстановления формы границы неизвестной полости в упругой среде по рассеянному на этой полости волновому полю. Предполагается, что в среде могут распространяться волны лишь одного типа — либо продольные, либо поперечные. В этом случае проблема сводится к обратной задаче дифракции для скалярного волнового уравнения. Предлагается численный алгоритм для решения такой обратной задачи. Метод апробирован на двумерной задаче для акустически мягкого тела.

Как известно [1], ультразвуковые преобразователи, используемые для обнаружения дефектов в твердых телах, работают либо на продольных волнах (нормальные искатели), либо на поперечных волнах (наклонные искатели). По этой причине при исследовании дифракции упругих волн на полостях в простейшем случае считается, что волновое поле является скалярным и описывается одним уравнением Гельмгольца относительно давления в среде. Следовательно, в первом приближении исследуемая проблема сводится к обратной задаче дифракции акустических волн.

Обратные задачи математической физики рассмотрены в [2–4] и других работах. Обзор работ представлен в [5]. Некоторые аналитические результаты получены в [6–8]. В [9, 10] развит метод, основанный на разложении в ряд решения во внешности круга, содержащего неизвестный контур. Эффективность такого метода остается неясной, ибо вычисление суммы ряда на границе области его сходимости представляет большие трудности. В [11] к решению рассматриваемой задачи применяется метод Ньютона и отмечается, что существуют диапазоны изменения длины волны, в которых предложенный метод теряет устойчивость. В [12] применяется подход, основанный на методе штрафных функций при минимизации функционала невязки. Для каждого значения штрафного параметра минимизация осуществляется квазиньютоновским методом. В [13] доказывается некорректность рассматриваемой проблемы. Для ее исследования предлагается метод квазирешения, при котором решение разыскивается на некотором компактном множестве. В результате задача сводится к задаче условной минимизации функционала невязки. Следует отметить, что методы решения, предложенные в большинстве из перечисленных выше работ, не являются универсальными в смысле их эффективности. Они теряют устойчивость либо при изменении длины волны, либо при изменении характера исходных данных, либо при увеличении вытянутости тела, либо при переходе от выпуклых тел к невыпуклым и т. д. Цель настоящей работы — построение алгоритма, достаточно универсального в указанном смысле.

**1. Постановка задачи.** Пусть на тело, расположенное в акустической среде, падает некоторая заданная волна  $p_0$ . Для простоты ограничимся двумерным случаем. Обычно падающая волна бывает плоской, следовательно,  $p_0 = e^{ikx}$  ( $k$  — волновое число). Ограничимся классом звездных областей. Тогда для контура  $l$ , ограничивающего рассматриваемое тело, возможно параметрическое представление в полярных координатах  $\rho = \rho(\varphi)$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Для определенности будем считать контур  $l$  акустически мягким. В этом случае граничное условие имеет вид  $p|_l = 0$ . Задача ставится следующим образом. Известно рассеянное от тела поле при всех углах  $\varphi$ , т. е. известна функция [14]  $F(\varphi) = \int_l \exp[-ik\rho(\theta)\times \times \cos(\varphi - \theta)] \partial p / \partial n|_l dl$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

Требуется определить функцию  $\rho(\varphi)$ . Будем считать контур  $l$  гладким. Тогда с учетом равенства  $dl = (\rho^2 + \rho'^2)^{1/2} d\theta$  можно ввести функцию  $g(\theta) = [\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)]^{1/2} \partial p(\theta) / \partial n|_l$ , через которую рассеянное поле выра-

жается в виде

$$F(\varphi) = \int_0^{2\pi} \exp[-ik\rho(\theta)\cos(\varphi-\theta)]g(\theta)d\theta \quad (1.1)$$

Очевидно, что в данной задаче — две неизвестные функции:  $g(\theta)$  и  $\rho(\theta)$ . Поэтому к соотношению (1.1) необходимо добавить еще одно. Им может быть, например, граничное интегральное уравнение на контуре  $l$  [6]:

$$\int_0^{2\pi} g(\theta)H_0[kr(\varphi, \theta)]d\theta = p_0|_l = \exp[ik\rho(\varphi)\cos\varphi]$$

$$r(\varphi, \theta) = [\rho^2(\varphi) + \rho^2(\theta) - 2\rho(\varphi)\rho(\theta)\cos(\varphi-\theta)]^{1/2} \quad (1.2)$$

Таким образом, рассматриваемую задачу удается свести к системе двух нелинейных интегральных уравнений (1.1), (1.2) относительно двух неизвестных функций  $g(\theta)$  и  $\rho(\theta)$ .

*Замечание 1.1.* Граничное интегральное уравнение (1.2) разрешимо не всегда [6]. На некотором счетном множестве контуров  $\rho_n(\varphi)$  ( $n=1, 2, \dots$ ), соответствующих резонансам внутренней задачи, интегральный оператор в (1.2) не является обратимым. Однако при малых и средних значениях  $k$  «вероятность» совпадения  $\rho(\varphi)$  с одним из  $\rho_n(\varphi)$  ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ) ничтожно мала. Ситуация качественно меняется при  $k \rightarrow \infty$ , ибо в высокочастотной области резонансные контуры  $\rho_n$  «встречаются» все чаще и чаще.

*Замечание 1.2.* В случае акустически жесткого контура, когда граничное условие имеет вид  $\partial p/\partial n|_l=0$ , задача сводится к системе двух нелинейных интегродифференциальных уравнений. Это, однако, не препятствует применению рассматриваемого ниже метода и в таких задачах.

*Замечание 1.3.* Сформулированная задача является простейшей из обратных задач дифракции. В более сложных случаях возможно задание не функции  $F(\varphi)$ , а лишь ее модуля  $|F(\varphi)|$ , причем не при всех  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Кроме того, направление падающего поля может быть не зафиксировано.

*Замечание 1.4.* В [1–4] имеются некоторые результаты относительно существования и единственности решения рассматриваемой проблемы. В целом же эта сторона исследований далека от своего полного разрешения. Для целей данной работы достаточно того, что физические соображения зачастую предопределяют существование решения. В дальнейшем ограничимся только теми задачами, у которых решение существует.

**2. Итерационный метод решения.** Известно, что рассматриваемая задача некорректна по Тихонову (см., например, [13]). Это вызвано тем, что оператор прямой задачи  $D: \rho(\varphi) \rightarrow F(\varphi)$  является вполне непрерывным в пространствах, естественным образом связанных с данной задачей. Тогда, очевидно, обратный оператор  $D^{-1}: F(\varphi) \rightarrow \rho(\varphi)$  не может быть непрерывным. Кроме того, задача нелинейна. Все это усложняет ее решение, ибо наиболее эффективные численные методы решения некорректных задач в основном апробированы на линейных задачах.

Один из наиболее универсальных методов — метод градиентного спуска. В [15] доказано, что в линейном случае (т. е. когда функционал невязки является квадратичным) этот метод осуществляет регуляризирующий алгоритм. Хотя строгое доказательство в общем случае отсутствует, по-видимому, это свойство метода переносится и на нелинейные задачи. Это следует из того, что любой гладкий функционал в окрестности локального минимума является квадратичным.

Алгоритм численного решения строится следующим образом. Сначала уравнения (1.1), (1.2) записываются в конечномерном виде на узлах  $\varphi_i, \theta_j$  ( $\varphi_i = \theta_i$ ) с использованием квадратурной формулы прямоугольников. Узлы коллокации образуют равномерную сетку на отрезке  $(0, 2\pi)$ .

При этом диагональный член в (1.2) (при  $i=j$ ) должен быть вычислен как интеграл по малому отрезку от особенности ядра (особенность является логарифмической). Полученная таким образом нелинейная конечномерная система

$$f_i(g_1, \dots, g_J, \rho_1, \dots, \rho_J) = 0, \quad i=1, \dots, 2J \quad (2.1)$$

при достаточно густой сетке узлов имеет операторные свойства, близкие к свойствам исходного вполне непрерывного оператора. В частности, среди собственных чисел якобиана системы имеются очень близкие к нулю. Поэтому при построении численного алгоритма необходимо иметь в виду, что задача обращения системы (2.1) практически некорректна.

Составим функционал невязки

$$\psi(g, \rho) = \sum_{i=1}^J |f_i|^2$$

На нулевом шаге отыскивается  $\min \psi(g, \rho)$  на всевозможных кругах. Пусть найденному таким образом кругу соответствуют значения  $g^0, \rho^0$ . Далее применяется итерационный метод градиентного спуска. При этом [16]:

$$\text{grad } \psi = A^* f \quad (2.2)$$

где  $A$  — якобиан системы (2.1),  $f$  — вектор левых частей, звездочка — знак сопряжения. Якобиан  $A$  в рассматриваемой задаче может быть вычислен в явном виде. Таким образом, направление спуска дается равенством

$$q = -A^* f, \quad q = (\Delta g, \Delta \rho)^T \quad (2.3)$$

Оказывается, что такой метод позволяет решить некоторые простые задачи. В частности, удается получить из круга эллипс с небольшим эксцентриситетом. В то же время на более сложных задачах метод обладает очень медленной сходимостью, поэтому возникает проблема ускорения — метод градиентного спуска.

Заметим, что любое направление  $q = -B \text{ grad } \psi$  будет направлением спуска, если  $B$  — положительно определенная матрица. Для ускорения метода следует подобрать подходящую матрицу  $B$ . С этой целью произведем квадратичную аппроксимацию функционала  $\psi$  в точке  $z = (g, \rho)$  [16]:  $\psi(z+q) \approx \psi(z) + (A^* f, q) + 1/2 (q, Gq)$ . Очевидно, что минимизация  $\psi(z+q)$  при линейной аппроксимации порождает направление (2.3). Минимизация  $\psi(z+q)$  при квадратичной аппроксимации приводит к соотношению  $Gq = -A^* f$ . В [16] доказывается, что в окрестности минимума гессиян  $G \approx A^* A$ , следовательно,  $A^* A q = -A^* f$ . В качестве матрицы  $B$  с учетом (2.2) можно было бы взять  $(A^* A)^{-1}$ . Однако в силу некорректности задачи у оператора  $A^* A$  не существует обратного (в указанном выше смысле), поэтому используем прием, родственной подходу, применяемому при регуляризации Тихонова. Добавим к оператору  $A^* A$  малый положительный оператор, например  $\alpha I$ ,  $\alpha > 0$ . Тогда получим

$$(A^* A + \alpha I) q = -A^* f \quad (2.4)$$

В итоге, из уравнения (2.4) и определяется направление спуска. При этом  $B = (A^* A + \alpha I)^{-1}$  корректно определена. Очевидно, что при  $\alpha \gg 1$  (2.4) переходит в (2.3).

Оказалось, что основной сложностью при реализации описанного алгоритма является подбор универсального критерия выбора параметра  $\alpha$  одинаково пригодного для различных классов контуров  $l$ . В итоге был выбран следующий подход. В диапазоне  $\alpha_{\min} = 10^{-4} < \alpha < 10^1$  выбирается несколько значений  $\alpha_m$  ( $m=1, \dots, M$ ), образующих геометрическую прогрессию (обычно  $M=5-8$ ), и среди них отыскивается то  $\alpha_{opt}$ , для которого на соответствующем направлении  $q_{opt}$  функционал  $\psi$  уменьшается сильнее всего. Естественно, что на различных шагах итерационного процесса определенное таким образом оптимальное  $\alpha_{opt}$  будет раз-

личным. Оказывается, что на первых шагах  $\alpha_{opt}$  принимает большие значения, а затем имеет тенденцию к постоянному уменьшению. Существующее при этом ограничение  $\alpha > \alpha_{min}$  сохраняет корректность вычисления матрицы  $(A^*A + \alpha I)^{-1}$ . Во всех приведенных ниже примерах восстановления контура  $l$  использовался этот универсальный метод выбора параметра  $\alpha$ .

*Замечание 2.1.* В [11–13] приводятся примеры восстановления границы области. При этом полученные результаты сильно зависят от удачного выбора параметра регуляризации. Универсальный критерий выбора в этих работах отсутствует.

*Замечание 2.2.* Предложенный метод не совпадает с другими известными методами — методом Гаусса — Ньютона, методом Левенберга — Маркардта [16], методом сглаживающего функционала [17] и т. д. Например, в методе Левенберга — Маркардта шаг вдоль направления спуска всегда полагается единичным. А в методе сглаживающего функционала  $\alpha$  не может зависеть от номера итерации (если минимизацию сглаживающего функционала осуществлять итерационным методом). Кроме того, предложенный способ выбора параметра  $\alpha$  не требует никакой априорной информации.

*Замечание 2.3.* Следует отметить, что система (2.1) является переопределенной. В самом деле, в ней  $3J$  вещественных неизвестных: по  $J$  значений  $\text{Re } g_j$ ,  $\text{Im } g_j$ ,  $\rho_j$ . В то же время в этой системе  $4J$  вещественных уравнений. Предлагаемый подход позволяет получать решение переопределенных систем. Число неизвестных и уравнений совпадало бы, например, если бы была известна только амплитуда рассеянной волны  $|F(\varphi)|$ .

На фиг. 1 и 2 приведены примеры восстановления контура  $l$  методом, описанным в этом параграфе. Значение волнового числа во всех примерах равно  $k=1$ , при этом длина волны  $\lambda=2\pi/k=2\pi$ . Сплошными кривыми показан истинный контур, штриховыми — восстановленный контур. Значение  $J=18$ . Среднее время счета на ЭВМ ЕС-1055 М — 8 мин.

**3. Случай более сложных исходных данных.** Пусть тело с неизвестной границей  $l$  последовательно облучается плоскими волнами под различными углами  $\gamma_n$ : ( $n=1, \dots, N$ ):  $p_0^n = \exp[-ik\rho(\varphi)\cos(\varphi-\gamma_n)]$ . Пусть для каждой падающей волны, имеющей номер  $n$ , известна амплитуда рассеянной волны под несколькими углами  $\varphi_i^n$ ,  $i=1, \dots, I$ . Тогда рассматриваемая задача в конечномерном виде сводится к следующей нелинейной системе:

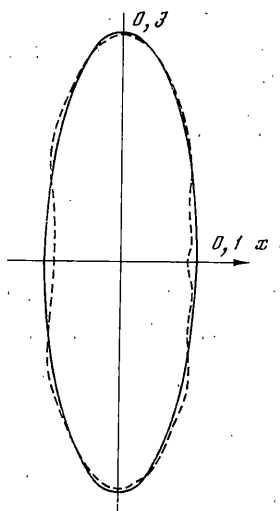
$$f_i^n = \left| h \sum_{j=1}^J \exp[-ik\rho_j \cos(\varphi_i^n - \theta_j)] g_j^n \right|^2 - F_i^n = 0 \quad (3.1)$$

$$h \sum_{j=1}^J H_0[kr(\rho_i, \rho_j)] g_j^n = \exp[-ik\rho_i \cos(\varphi_i - \gamma_n)] \quad (h=2\pi/J) \quad (3.2)$$

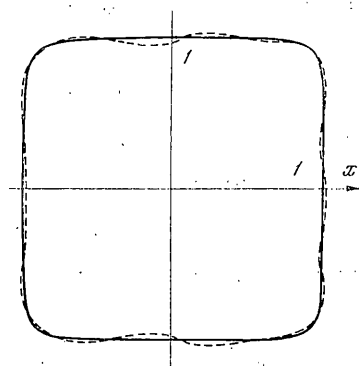
Система (3.1)–(3.2) может быть решена методом, изложенным в п. 2. Однако при этом линейная система (2.4) для определения направления спуска является системой  $(2N+1)J$  вещественных уравнений относительно такого же числа вещественных неизвестных  $\text{Re } g_j^n$ ,  $\text{Im } g_j^n$ ,  $\rho_j$ . При больших  $J$  и  $N$  такой подход требует много машинного времени. Для сокращения размерности используем два свойства системы (3.2), рассматриваемой как системы относительно  $g_j^n$ : она является линейной относительно  $g_j^n$ ; при изменении  $n$  в этой системе меняется лишь правая часть. Поэтому задачу предлагается свести к минимизации функционала

$$\psi = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I |f_i^n|^2 \quad (3.3)$$

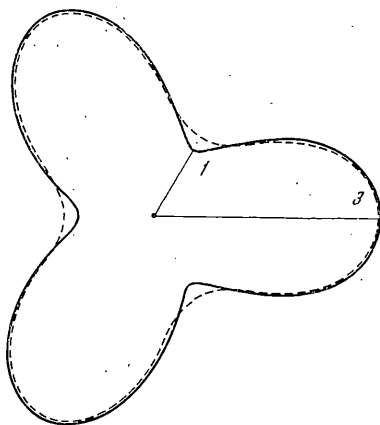
при условии (3.2), т. е. к проблеме условной оптимизации с ограничениями в виде равенств [16]. Для решения этой проблемы, как и в п. 2,



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

используется квадратичная аппроксимация функционала (3.3) относительно вектора приращения  $q = (\Delta g_j^n, \Delta \rho_j)^T = (x_v, x_U)^T$ . Дифференцирование (3.2) дает следующую связь [16]:

$$Vx_V + Ux_U = 0, \quad V = \begin{bmatrix} v & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & v \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

При этом матрица  $V$  состоит из  $N$  одинаковых матриц  $v = (v_{ij})$ ,  $v_{ij} = = hH_0[kr(\rho_i, \rho_j)]$ , стоящих на диагонали матрицы  $V$ .

Заметим, что матрица  $v$  соответствует прямой задаче дифракции, имеет в силу логарифмической особенности ядра преобладающую диагональ и, следовательно, корректно обратима.

Условная минимизация квадратичного функционала с ограничениями в виде (3.4) приводит к следующему уравнению [16]:

$$(Z^*A^*AZ + \alpha I)q^- = -Z^*A^*f \quad (3.5)$$

причем направление спуска при этом определяется по формуле  $q = Zq^-$ . Здесь матрица  $Z$  имеет вид

$$Z = \begin{bmatrix} -V^{-1}U \\ I \end{bmatrix}$$

вектор  $f=(f_i^n)$ ,  $A$  — якобиан системы (3.1). Выбор оптимального значения параметра  $\alpha$  на каждом шаге осуществляется так же, как и в случае безусловной минимизации. Размерность системы (3.5) равна  $J$ .

На фиг. 3 приведен пример восстановления границы невыпуклой области, когда известны амплитуда обратного рассеяния для  $N=24$  направлений облучения, равномерно распределенных по углу  $(0, 2\pi)$ . При этом  $I=1$ ,  $\varphi^n=\gamma_n$ ,  $J=24$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ермолов И. Н. Теория и практика ультразвукового контроля. М.: Машиностроение, 1981. 240 с.
2. Гласко В. Б. Обратные задачи математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1984. 411 с.
3. Бухгейм А. Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука, 1983. 207 с.
4. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1988. 267 с.
5. Буров В. А., Горюнов А. А., Сасковец А. В., Тихонова Т. А. Обратные задачи рассеяния в акустике (обзор) // Акуст. журн. 1986. Т. 32. Вып. 4. С. 433–449.
6. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
7. Каценеленбаум Б. З., Коршунова Е. Н., Пангонис Л. И., Сивов А. Н. Определенные формы антенны и токов на ней по заданной диаграмме направленности // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260. № 6. С. 1357–1361.
8. Кюркчан А. Г. Об обратной задаче рассеяния для уравнения Гельмгольца // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 1. С. 48–51.
9. Imbriale W. A., Mittra R. The two-dimensional inverse scattering problem // IEEE Trans. Antennas and Prop. 1970. V. AP-18. № 5. P. 633–642.
10. Свешников А. Г., Ильинский А. С., Еремин Ю. А., Чивилев А. В. Некоторые аспекты исследования задачи восстановления формы идеального рассеивателя // Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1982. № 36. С. 126–134.
11. Roger A. Newton-Kantorovich algorithm applied to an electromagnetic inverse problem // IEEE Trans. Antennas and Prop. 1981. V. AP-29. № 2. P. 232–238.
12. Kristensson G., Vogel C. R. Inverse problems for acoustic waves using the penalised likelihood method // Inverse Problems. 1986. V. 2. № 4. P. 461–479.
13. Colton D. The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves // SIAM Review. 1984. V. 26. № 3. P. 323–350.
14. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 348 С.
15. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. М.: Наука, 1988. 286 С.
16. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: 1985. 509 С.
17. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 287 с.

Ростов-н/Д

Поступила в редакцию  
15.XII.1989