МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1990

УДК 539.3

В. А. БАБЕШКО

О ВИБРАЦИИ СИСТЕМЫ ШТАМПОВ

Высокочастотный резонанс массивных штампов, колеблющихся на полуограниченных областях предполагает при своем использовании умение решать определенный класс интегральных уравнений [1].

В настоящей работе приводится построение общих представлений решений интегральных уравнений о вибрации на слоистой среде систем штампов. Полученные формулы составляют основу для расчета параметров высокочастотного резонанса массивных штампов, а также могут быть использованы для решения смешанных динамических задач о вибрации трещин и включений в полуограниченных упругих телах. Исследование в этом направлении стимулировано рядом основополагающих работ [2, 3] и др.

1. Предполагается, что система штампов и их формы в плане таковы, что с помощью некоторого разбиения вся область контакта Ω штампов со средой может быть разбита на выпуклые области, которые впредь будем обозначать D_k. Таким образом

$$\Omega=\bigcup_k D_k \quad (k=1,2,\ldots,M) \quad M<\infty \tag{1.1}$$

При этом невыпуклые области контакта отдельных штампов являются объединением областей D_k. Области D_k являются замкнутыми ограниченными, общими у них могут быть только граничные множества. Границы областей D_k будем обозначать через S_k.

Ниже будем рассматривать только такие формы штампов, для которых область Ω допускает представление (1.1), где D_k выпуклые области, пересечением которых могут быть только одномерные или нульмерные множества. Очевидно, разбиения (1.1) можно осуществить разными способами. Будем считать, что среди разбиений принято то, при котором M — минимально, хотя в дальнейшем это и не обязательно.

Система соответствующих интегральных уравнений имеет вид

$$\mathbf{K}q=\sum_{m=1}^{M}\mathbf{k}_m q_m=f_p(x,y) \quad (p=1,2,\ldots,M) \quad x,y\in D_p \tag{1.2}$$

$$\mathbf{k}_m q_m=\iint\limits_{D_m}\mathbf{k}(x-\xi,y-\eta)q_m(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta, \quad \Omega=\bigcup_s\Omega_s=\bigcup_k D_k \tag{1.3}$$

$$K(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\sigma_1}\int\limits_{\sigma_2}K(u)e^{-i(\alpha x+\beta y)}d\alpha\,d\beta, \quad u=(\alpha^2+\beta^2)^{1/2} \tag{1.4}$$

Свойства функции $K(u)$ детально описаны в [3, 4] и здесь лишь укажем, что традиционно различаются два следующие случая: случай полуограниченной среды типа слоистой, конечной толщины и случай слоистого полупространства. В первом случае функция $K(u)$ — мероморфная, имеющая в качестве особенностей полюсы $\pm\zeta_k$ в том числе и вещественные, их конечное число. Во втором случае она наряду с полюсами $\pm\zeta_k$ имеет также и точки ветвления, связанные с наличием объемных волн — продольных и поперечных. Нули этих функций будем обозначать через $\pm z_k$.

1°. Следуя [4], введем в рассмотрение функцию

$$\Pi(u,N)=E_N(u^2)Q_N^{-1}(u^2), \quad E_N(u^2)=\prod_{n=1}^{N}(u^2-z_n^2), \quad Q_N=\prod_{n=1}^{N}(u^2-\zeta_n^2) \tag{1.5}$$

Обозначим через K_0q оператор, получающийся после замены в представлении ядра (1.4) функции $K(u)$ на функцию вида

$$K_0(u)=K(u)\Pi^{-1}(u,N), \quad \mathbf{K}_0q=\iint_{\Omega}\mathbf{k}_0(x-\xi,y-\eta)q(\xi,\eta)d\xi\,d\eta$$

$$\mathbf{K}_0(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{\sigma_1}\int_{\sigma_2}K(u)\Pi^{-1}(u,N)e^{-i(\alpha x+\beta y)}d\alpha\,d\beta \tag{1.6}$$

Оператор, обратный к оператору $\mathbf{K}_0$, будем обозначать $\mathbf{K}_0^{-1}$.

2°. Обозначим через $P_{2r}(u^2)$ полином вида $P_{2r}(u^2)=a_0u^{2r}+a_1u^{2(r-1)}+\ldots$ $\ldots+a_r$. Введем в рассмотрение оператор

$$P_{2r}(-\Delta)f(x,y,\psi)=[a_0(-\Delta)^r+a_1(-\Delta)^{r-1}+\ldots+a_r]\int_0^{2\pi}f(x,y,\psi)d\psi,$$

$$\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$$

Здесь $f(x,y,\psi)$ — однозначная непрерывная на $0\leqslant\psi\leqslant2\pi$ функция. Используя этот оператор, рассмотрим обобщенную функцию вида [4]:

$$\varphi(x,y,P_{2r},R,f)\equiv\varphi(x,y)=$$
$$=P_{2r}(-\Delta)\delta[x-R(\psi)\cos\psi]\delta[y-R(\psi)\sin\psi]f(\psi)$$

Здесь $R(\psi)$, $f(\psi)$ однозначные непрерывные функции, которые уточняются ниже. Вычислим ее преобразование Фурье, обозначаемое $\mathbf{V}\varphi$ [4]:

$$\mathbf{V}\varphi(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y)e^{i(\alpha x+\beta y)}dx\,dy$$

В результате несложных вычислений получаем представление

$$\mathbf{V}\varphi=P_{2r}(u^2)\int_0^{2\pi}e^{iuR(\psi)\cos(\gamma-\psi)}f(\psi)d\psi, \quad \alpha=u\cos\gamma, \quad \beta=u\sin\gamma$$

2. Введем на плоской границе упругой среды координатную систему так, чтобы плоскость xoy совпадала с границей. Обозначим через $r=\rho_k(\varphi)$ уравнения границ S_k выпуклых областей D_k. В общем случае эти функции являются двузначными функциями параметра φ. Однако, в том случае, когда начало координат принадлежит области D_s, функция $\rho_s(\varphi)$ — однозначная.

Введем местную систему координат $x_ko_ky_k$ с центром во внутренней точке o_k к области D_k. Ее оси параллельны осям xoy. Пусть точка o_k в системе xoy имеет координаты a_kb_k. Положим $r_k=(a_k^2+b_k^2)^{1/2}$, $\theta_k=\operatorname{arctg} b_ka_k^{-1}$. Пусть уравнение границы S_k в системе $x_ko_ky_k$ имеет вид $R_k=R_k(\varphi)$. Следуя [4] введем в рассмотрение полином вида $G_k(u^2)=(u^2-\zeta_1^2)\ldots(u^2-\zeta_{k-1}^2)\cdot$ $\cdot(u^2-\zeta_{k+1}^2)\ldots(u^2-\zeta_N^2)$ и функции

$$\varphi^s(x,y)=\sum_{k=1}^{N}G_k(-\Delta)\delta[x-a_s-R_s(\psi)\cos\psi]\delta[y-$$
$$-b_s-R_s(\psi)\sin\psi]f_{ks}(\psi)\equiv\sum_{k=1}^{N}\varphi(x-a_s,y-b_s,G_k,R_s,f_{ks}) \tag{2.1}$$

Рассмотрим функцию двух переменных $p(x,y)$ с носителем в области Ω, т. е. обращающуюся в нуль вне Ω. Значения (проекции) функции $p(x,y)$ в областях D_k обозначим через $p(x,y,D_k)$.

Справедлива лемма, обобщающая лемму 14.3 [4] на случай не выпуклой Ω.

Лемма 1. Пусть функция $p(x,y)$ с носителем в Ω имеет представление вида

$$p(x,y)=p_0(x,y)+p_1(x,y),\quad p_1(x,y)\in L_p(\Omega),\quad p>1$$

$$p_0(x,y)=\sum_{s=1}^{M}\varphi(x-a_s,y-b_s,P_{2N}R_sf_s) \tag{2.2}$$

Для того, чтобы аналогичное представление имела и функция

$$\mathbf{V}^{-1}(x,y)\Pi(u,N)\mathbf{V}(\alpha,\beta)p(x,y) \tag{2.3}$$

с носителем в Ω, необходимо и достаточно, чтобы на полярном множестве функции $\Pi(u,N)$, т. е. при $\alpha^2+\beta^2=\zeta_k^2$, $(k=1,2,\ldots,N)$, имели место равенства

$$\mathbf{V}(\alpha,\beta)p(x,y,D_m)=0,\quad m=1,2,\ldots,M. \tag{2.4}$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 14.3 [4] и здесь не приводится. Заметим, что при $p_0=0$, лемма справедлива для функций из $L_p(\Omega)$, $p>1$.

В [5] сообщается, что в отличие от случая одного штампа, интегральные уравнения, описывающие колебание системы штампов, в частности, двух, уже могут не иметь единственное решение при некоторых соотношениях параметров.

Поэтому приводимые ниже построения не нуждаются в однозначности решений исходных интегральных уравнений. Однако для упрощения построений некоторые предположения, как правило, имеющие место для встречающихся в практике задач, будут приняты.

Именно, в дальнейшем будем ради простоты считать, что границы областей D_s обладают следующим свойством [4]. Интегральные уравнения

$$\int_0^{2\pi} f_{ks}(\psi)e^{\pm i\zeta_kR_s(\psi)(\psi-\gamma)}d\psi=b_{ks}(\gamma),\quad 0\leqslant\gamma<2\pi,\quad k=1,2,\ldots,N,\quad s=1,2,\ldots M \tag{2.5}$$

однозначно разрешимы для любых k, s для $b_{ks}\in C(0,2\pi)$.

Вопрос однозначной разрешимости уравнений (2.5) не является необходимым в дальнейших построениях.

Допустима и неединственность решения или разрешимость при дополнительных условиях в широком классе функций, включающем и обобщенное.

Лемма 2. Пусть функция $q(x,y)\in L_p(\Omega)$, $p>1$. Тогда существует единственная функция

$$\varphi(x,y)=\sum_{s=1}^{M}\varphi^s(x,y) \tag{2.6}$$

такая, что имеют место равенства

$$\mathbf{V}\varphi(x,y)=\mathbf{V}q(x,y),\quad \mathbf{V}\varphi^s(x,y)=\mathbf{V}q(x,y,D_s) \tag{2.7}$$

при $\alpha^2+\beta^2=\zeta_k^2$, $k=1,2,\ldots,N$, $s=1,2,\ldots,M$. Доказательство этой леммы полностью повторяет доказательство леммы 17.1 [4] в каждой области D_s и здесь не приводится.

3. Для построения решения системы (1.3) методом фиктивного поглощения представим искомую функцию $q(x,y)$ в следующем виде

$$q(x,y)=p(x,y)+\varphi(x,y) \tag{3.1}$$

Функцию $\varphi(x, y)$ в силу леммы 2 можно взять в виде (2.3), при этом будут иметь место соотношения (2.4), а для функции $p(x, y)$ — следующие: $\mathbf{V}p(x, y, D_s)=0$, $\alpha^2+\beta^2=\zeta_k^2$, $k=1, 2, \ldots, N$; $s=1, 2, \ldots, M$.

Не нарушая общности, будем считать, что все нули z_l и полюсы ζ_l функции $K(u)$, или ее аппроксимирующей являются однократными. Будем далее считать, что интегральные уравнения (1.6) с функцией $K_0(u)$ в представлении ядра — разрешимы и оператор $\mathbf{K}_0^{-1}$ построен. Вопрос построения обратных операторов к описанному и ему подобным изучался в [5—8].

Внесем соотношение (3.1) в интегральные уравнения (1.3) и воспользуемся обозначением (1.6). В результате уравнения (1.3) можно представить в виде

$$\mathbf{K}_0 t=f(x, y)-\mathbf{K}_0\mathbf{V}^{-1}\Pi(u, N)\mathbf{V}\varphi, \quad t(x, y)=\mathbf{V}^{-1}\Pi(u, N)\mathbf{V}p \tag{3.2}$$

Заметим, что носитель функции $\mathbf{V}^{-1}\Pi(u, N)\mathbf{V}\varphi$ занимает в общем случае всю плоскость. Выделим из представления этой функции составляющую, являющуюся обобщенной. Ее носитель окажется сосредоточенным в Ω. Оставшаяся составляющая будет классической функцией с носителем во всей плоскости. Произведем преобразования с учетом (2.3), (2.1), имеем

$$\mathbf{V}^{-1}\Pi(u, N)\mathbf{V}\varphi=\mathbf{V}^{-1}\Pi(u, N)\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{M} G_k(u^2) \int_0^{2\pi} f_{ks}(\psi)\, e^{iuR_s(\psi)\cos(\psi-\gamma)}d\psi e^{i(\alpha a_s+\beta b_s)} \tag{3.3}$$

Выделим у полученных рациональных функций полиноминальные составляющие $\Pi(u, N)G_k(u^2)=P_k(u^2)+R_k(u^2)$, $P_k(u^2)=[E_N(u^2)-E_N(\zeta_k^2)]\times$ $\times(u^2-\zeta_k^2)\sim u^{2N-2}$, $R_k(u^2)=E_N(\zeta_k^2)/(u^2-\zeta_k^2)$, $|u|\to\infty$.

Внося соотношения в (3.3) и осуществив несложные преобразования, будем иметь

$$\mathbf{V}^{-1}\Pi(u, N)\mathbf{V}\varphi=\varphi_0(x, y)+\varphi_2(x, y) \tag{3.4}$$

$$\varphi_0(x, y)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{M}\varphi(x-a_s, y-b_s, P_k, R_s, f_{ks}), \quad \varphi_2(x, y)=\sum_{s=1}^{M}\varphi_{1s}(x, y)$$

$$\varphi_{1s}(x, y)=\sum_{k=1}^{N}\mathbf{V}^{-1}R_k(u^2)\int_0^{2\pi} f_{ks}(\psi)e^{iuR_s(\psi)\cos(\psi-\gamma)}d\psi e^{i(\alpha a_s+\beta b_s)}$$

Преобразуем соотношение, которое понадобится ниже, получаем

$$\begin{gathered}\mathbf{V}^{-1}\Pi^{-1}(u, N)\mathbf{V}\varphi_0=\mathbf{V}^{-1}\Pi^{-1}(u, N)\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{M} P_k(u^2) \\ \int_0^{2\pi} f_{ks}(\psi)e^{iR_s(\psi)\cos(\psi-\gamma)}d\psi e^{i(\alpha a_s+\beta b_s)}=\mathbf{V}^{-1}\Pi^{-1}(u, N)\Big[\Pi(u, N)\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{M} G_k(u^2)- \\ -\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{M} R_k(u^2)\Big]\int_0^{2\pi} f_{ks}(\psi)\, e^{iuR_s(\psi)\cos(\psi-\gamma)}d\psi e^{i(\alpha a_s+\beta b_s)}= \\ =\varphi(x, y)-\varphi_3(x, y), \quad \varphi_3(x, y)=\mathbf{V}^{-1}\Pi^{-1}(u, N)\mathbf{V}\varphi_2\end{gathered} \tag{3.5}$$

Здесь $\varphi_3(x, y)\in L_p$ и имеет носитель во всей плоскости. Подействуем на систему (3.2) слева оператором $\mathbf{K}_0^{-1}$, получим $t=\mathbf{K}_0^{-1}f(x, y)-$

$-\mathbf{K}_0^{-1}P_{[\Omega]}\mathbf{K}_0\mathbf{V}^{-1}\Pi(u,N)\mathbf{V}\varphi$. Воспользовавшись соотношением (3.4), будем иметь

$$t(x,y)=\mathbf{K}_0^{-1}f-\varphi_0(x,y)-\mathbf{K}_0^{-1}P_{[\Omega]}\mathbf{K}_0\varphi_2 \qquad (3.6)$$

Заметим, что поскольку в последнем члене правой части (3.8) носитель функции φ_2 — вся плоскость, то для корректной записи этого соотношения применяется проектор $P_{[\Omega]}$ на область Ω. Используя теперь обозначения (3.2), из (3.6) находим

$$p(x,y)=\mathbf{V}^{-1}\Pi^{-1}(u,N)\mathbf{V}[\mathbf{K}_0^{-1}f-\varphi_0(x,y)-\mathbf{K}_0^{-1}P_{[\Omega]}\mathbf{K}_0\varphi_2] \qquad (3.7)$$

По построению функция $t(x,y)$, даваемая формулой (3.6) обладает свойствами функции p леммы 1.

Воспользуемся этой леммой, требуя чтобы $p(x,y)$ из (3.7) обладала этими же свойствами. Роль функции $\Pi(u,N)$ леммы 1 в случае (3.7) играет обратная — $\Pi^{-1}(u,N)$.

Тогда в силу леммы 1 должны выполняться соотношения

$$\mathbf{V}P_{[D_s]}\left[\mathbf{K}_0^{-1}f-\sum_{k=1}^{N}\varphi(x-a_s,y-b_s,P_k,R_s,f_{ks})-\mathbf{K}_0^{-1}P_{[\Omega]}\mathbf{K}_0\varphi_2\right]=0 \qquad (3.8)$$

$$\alpha^2+\beta^2=z_n^2,\quad n=1,2,\dots,N;\quad s=1,2,\dots,M$$

Последнее соотношение можно привести к следующему виду

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{N}P_k(z_n)\int_0^{2\pi}\pm z_nR_s(\psi)\cos(\psi-\gamma)f_{ks}(\psi)\,d\psi=\\ =e^{-i(\alpha a_s+\beta b_s)}\mathbf{V}P_{[D_s]}[\mathbf{K}_0^{-1}f-\mathbf{K}_0^{-1}P_{[\Omega]}\mathbf{K}_0\varphi_2]\\ \alpha^2+\beta^2=z_n^2;\quad n=1,2,\dots,N;\quad s=1,2,\dots,M\end{gathered} \qquad (3.9)$$

Левая часть системы (3.9) в силу (2.2) разрешима относительно неизвестных $f_{ks}(\psi)$. Входящая в правую часть системы функция φ_2, имеющая представление (3.4), содержит эти неизвестные. Таким образом, после обращения левой части (3.9), получается система линейных интегральных уравнений второго рода относительно функций $f_{ks}(\psi)$.

Систему (3.9) можно также решать путем дискретизации, в частности, аппроксимируя функции $f_{ks}(\psi)$ комбинацией δ-функций Дирака с носителями, распределенными на $[0, 2\pi]$. Определив функции f_{ks}, внесем их в представление (3.7). Полученное значение p внесем в соотношение (3.1) и воспользуемся представлением (3.5). В результате для искомой функции q получим представление вида

$$q(x,y)=\varphi_3(x,y)+\mathbf{V}^{-1}\Pi^{-1}(u,N)\mathbf{V}[\mathbf{K}_0^{-1}f-\mathbf{K}_0^{-1}P_{[\Omega]}\mathbf{K}_0\varphi_2]$$

Последнее соотношение можно упростить дополнительно, выделив у функции φ_2 составляющие с носителем в Ω вне этой области, положив $\varphi_{23}^+(x,y)=\varphi_2(x,y)$, $x,y\in D_s$; $\varphi_{23}^-(x,y)=\varphi_2(x,y)$, $x,y\equiv D_s$; $\varphi_2^-=\varphi_2-\sum_{s=1}^{M}\varphi_{23}^-$, $\varphi_2^+=\varphi_2-\varphi_2^-$. Тогда, как нетрудно убедиться, имеют место соотношения

$$\begin{aligned}P_{[D_s]}\mathbf{K}_0^{-1}P_{[\Omega]}\mathbf{K}_0\varphi_2&=P_{[D_s]}\mathbf{K}_0^{-1}P_{[\Omega]}\mathbf{K}_0(\varphi_2^++\varphi_2^-)=\\ &=\varphi_{23}^++P_{[D_s]}\mathbf{K}_0^{-1}P_{[\Omega]}\mathbf{K}_0\varphi_{23}^-=\\ &=\varphi_2-\varphi_{23}^-+P_{[D_s]}\mathbf{K}_0^{-1}P_{[\Omega]}\mathbf{K}_0\varphi_2^-,\quad \varphi_{2s}^+=P_{[D_s]}\varphi_2^+\end{aligned}$$

В результате $q_s(x,y)$ принимает следующий вид

$$q_s(x,y)=\mathbf{V}^{-1}\Pi^{-1}(u,N)\mathbf{V}P_{[D_s]}[\mathbf{K}_0^{-1}f-\mathbf{K}_0^{-1}P_{[\Omega]}\mathbf{K}_0\varphi_2^-+\varphi_{2s}^-] \qquad (3.10)$$

Здесь функция $\varphi_2^-(x, y)$ имеет представление

$$\varphi_2^-(x,y)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{M}E_N(\zeta_k^2)\int_0^{2\pi}f_{ks}(\psi)H_0^{(1)}\{\zeta_k[(X_s(\psi)+a_s-x]^2+$$
$$+[Y_s(\psi)+b_s-y)^2]^{1/2}\}d\psi$$
$$x, y\in\Omega,\quad X_s(\psi)=R_s(\psi)\cos\psi,\quad Y_s(\psi)=R_s(\psi)\sin\psi$$

где $H_0^{(1)}(z)$ — функция Ханкеля первого рода. Одновременно упростим уравнения (3.8), (3.9). С этой целью воспользуемся соотношением (3.10). Имеем $\mathbf{K}_0^{-1}P_{[\Omega]}\mathbf{K}_0\varphi_2=\mathbf{K}_0^{-1}P_{[\Omega]}\mathbf{K}_0(\varphi_2^++\varphi_2^-)=\varphi_2^++\mathbf{K}_0^{-1}P_{[\Omega]}\mathbf{K}_0\varphi_2^-=\varphi_2-\varphi_2^-+$ $+\mathbf{K}_0^{-1}P_{[\Omega]}\mathbf{K}_0\varphi_2^-$. Отсюда в области D_s получаем соотношения вида

$$\mathbf{V}P_{[D_s]}\left[\mathbf{K}_0^{-1}f-\sum_{k=1}^{N}\varphi(x-a_s,y-b_s,P_k,R_s,f_{ks})-\mathbf{K}_0^{-1}P_{[\Omega]}\mathbf{K}_0\varphi_2\right]=$$
$$=\mathbf{V}P_{[D_s]}\mathbf{K}_0^{-1}f-\mathbf{V}\varphi_0-\mathbf{V}\varphi_2+\mathbf{V}\varphi_2^--\mathbf{V}P_{[D_s]}\mathbf{K}_0^{-1}P_{[\Omega]}\mathbf{K}_0\varphi_2^- \tag{3.11}$$

Но в силу (3.4) $\mathbf{V}(\varphi_0+\varphi_2)=\Pi(u,N)\mathbf{V}\varphi$. Отсюда, используя (1.5), имеем $\mathbf{V}(\varphi_0+\varphi_2)=0$, $\alpha^2+\beta^2=z_n^2$. В результате уравнения (3.8), (3.9) принимают следующий вид

$$\mathbf{V}P_{[D_s]}[\mathbf{K}_0^{-1}f-\mathbf{K}_0^{-1}P_{[\Omega]}\mathbf{K}_0\varphi_2^-]+\mathbf{V}\varphi_{2s}^-=0,\quad \alpha^2+\beta^2=z_n^2 \tag{3.12}$$

Введем обозначения

$$F(\alpha,\beta,D_s)=\mathbf{V}P_{[D_s]}[\mathbf{K}_0^{-1}f-\mathbf{K}_0^{-1}P_{[\Omega]}\mathbf{K}_0\varphi_2^-]+\mathbf{V}\varphi_{2s}^- \tag{3.13}$$

Тогда, сопоставляя формулы (3.10) и (3.13), решение системы интегральных уравнений (1.3) можем записать в виде

$$q(x,y,D_s)=\mathbf{V}^{-1}\Pi^{-1}(u,N)F(\alpha,\beta,D_s),\quad F(\alpha,\beta,D_s)=0,\quad \alpha^2+\beta^2=z_n^2 \tag{3.14}$$

Замечание 1. Формула (3.14) справедлива для случая, когда в (1.3) $f_p(x,y)\in C_2(D_s)$, в этом случае $q_s(x,y)\in L_\lambda(D_s)$, $\lambda>1$.

Замечание 2. Формула (3.14), (3.12) справедлива и в том случае, когда функция $\Pi(u,N)$ — мероморфная, т. е. имеет счетное множество нулей и полюсов, обладающих свойствами, описанными в [4].

4. Рассмотрим применение формулы (3.14) к различным частным случаям системы (1.2). Рассмотрим случай, когда функция $K(u)$ — мероморфная с отмеченными в замечании свойствами. Положим $\Pi(u,N)\equiv$ $\equiv K(u)$. Тогда имеют место соотношения $K_0=K_0^{-1}=I$. В результате формула (3.13) упрощается и принимает вид

$$F(\alpha,\beta,D_s)=\mathbf{V}f+\mathbf{V}\varphi_2^-$$

Рассмотрим другой случай, когда в (1.2) область Ω — вся плоскость. В связи с этим система уравнений (1.2) вырождается в одно двумерное уравнение свертки, заданное во всей плоскости. В этом случае надобность в условиях (3.12) отпадает, т. к. функция $p(x,y)$ имеет неограниченный носитель, а потому V_p не является целой функцией. Поскольку граница области удалена на бесконечность, то $\varphi_2^-(x,y)\equiv 0$. Тогда из формул (3.13), (3.14) следует представление $q(x,y)=\mathbf{V}^{-1}\Pi^{-1}(u,N)\mathbf{V}\mathbf{K}_0^{-1}f\equiv\mathbf{V}^{-1}\mathbf{K}^{-1}(u)\mathbf{V}f$.

Решение в этой форме получается в результате непосредственного применения к уравнению (1.3), заданному во всей плоскости, преобразования Фурье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабешко В. А., Ворович И. И., Образцов И. Ф.* Явление высокочастотного резонанса в полуограниченных телах с неоднородностями. // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 3. С. 74–83.
2. *Ворович И. И.* Резонансные свойства упругой неоднородной полосы. // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 5. С. 1076–1079.

3. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
4. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости: М.: Наука, 1984. 254 с.
5. *Бабешко В. А.* О неединственности решений динамических смешанных задач для систем штампов // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. № 6. С. 1327–1330.
6. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
7. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
8. *Моссаковский В. И., Качаловская Н. Е., Голикова С. С.* Контактные задачи математической теории упругости. Киев: Наук. думка, 1985. 175 с.

Краснодар

Поступила в редакцию
5.IX.1990