МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1990

УДК 539.3

С. И. БОЕВ, И. Б. ПОЛЯКОВА

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ В-РЕЗОНАНСАХ В СИСТЕМЕ МАССИВНЫЙ ШТАМП — СЛОИСТОЕ ОСНОВАНИЕ

Впервые предположение о существовании бесконечного резонанса в системе массивный штамп — упругая полоса было высказано в работе [1]. В [2] приведено доказательство существования таких резонансов. Затем исследования были направлены на изучение аналогичных по своей природе резонансных явлений в системе упругая балка — упругая полоса [3]. В этих работах авторы назвали это явление В-резонансом. Будем использовать этот термин, хотя в предлагаемой работе резонансы уже не являются бесконечными вследствие того, что используются другие модели упругого основания.

1. Не ограничивая общности, будем рассматривать колебания массивного штампа на линейно-деформируемом полуограниченном основании (полоса, полуплоскость, слоистая полуплоскость). Зависимость от времени примем в виде $\exp(-i\omega t)$. Ограничимся случаем контакта без трения и будем рассматривать лишь вертикальные поступательные перемещения штампа. При таких ограничениях все рассуждения будут более очевидными. Обобщения на более общий случай можно получить, пользуясь методикой, изложенной в [2]. Колебания штампа при этих предположениях описываются уравнением

$$-m\omega^2 W = F - R(-i\omega) \tag{1.1}$$

где m — масса штампа, W — амплитуда колебаний в направлении перпендикулярном поверхности основания, F — амплитуда внешней нагрузки, $R(-i\omega)$ — реакция основания, определяемая следующим образом

$$R(-i\omega) = \int_{-a}^{a} Q(x, -i\omega)\,dx$$

Здесь a — полуширина штампа, $Q(x, -i\omega)$ — описывает распределение нормальных контактных напряжений под подошвой штампа. $Q(x, -i\omega)$ в свою очередь связана с амплитудой перемещений штампа W, а именно $Q(x, -i\omega)$ можно рассматривать как решение интегрального уравнения

$$\int_{-a}^{a} Q(\xi, -i\omega) K(x-\xi, -i\omega)\,d\xi = W, \quad |x| \leqslant a \tag{1.2}$$

Ядро $K(\tau, -i\omega)$ этого интегрального уравнения определяется свойствами основания. В силу линейности интегрального уравнения (1.2) легко показать, что

$$R(-i\omega) = Wr(-i\omega), \quad r(-i\omega) = \int_{-a}^{a} q(x, -i\omega)\,dx \tag{1.3}$$

и $q(x, -i\omega)$ — решение интегрального уравнения (1.2) при $W=1$. Естественно $r(-i\omega)$ назвать динамической жесткостью основания. Из (1.1) и

(1.3) находим

$$W = Fw(-i\omega), \quad w(-i\omega) = [r(-i\omega) - m\omega^2]^{-1} \qquad (1.4)$$

Иными словами, $w(-i\omega)$ — динамическая податливость системы массивный штамп — упругое основание.

Отметим, что в основном приведенные ниже рассуждения и выводы базируются на результатах анализа численного решения нестационарных контактных задач. Для построения нестационарных решений было использовано интегральное преобразование Лапласа по временной переменной, т. е. получены не только временные, но и частотные зависимости большинства характеристик.

2. Сначала рассмотрим случай, когда основание представляет собой упругую полосу, жестко сцепленную с недеформируемой полуплоскостью. Как показано в [4], в этом случае имеется такое значение частоты ω_0, называемое критическим, что в интервале $[0, \omega_0]$ функция $r(-i\omega)$ вещественнозначна. Нулевая частота соответствует статической задаче, причем очевидно, что $r(0) > 0$. При частотах выше критической имеет место неравенство $\operatorname{Im} r(-i\omega) < 0$. Это условие связано с энергетикой колебательного процесса.

Исходя из непрерывности $r(-i\omega)$ (это достаточно хорошо подтверждается численно), можно сделать утверждение, что при любой массе m такой, что $m > r(-i\omega_0)/\omega_0^2$ имеет место по крайней мере один бесконечный В-резонанс. Более того, численный анализ показывает, что $r(-i\omega) > 0$ на интервале $[0, \omega_0]$ и имеется лишь один полюс функции $w(-i\omega)$ на этом интервале.

Для дальнейшего анализа удобно интерпретировать эти результаты как решение соответствующей нестационарной задачи в образах интегрального преобразования Лапласа. Пусть s — параметр преобразования, тогда наличие бесконечного В-резонанса в системе соответствует наличию у функции $w(s)$ двух полюсов $\pm i\omega_*$ на мнимой оси плоскости комплексного переменного s. Рассмотрим действие нестационарной нагрузки, описываемой функцией $f(t)$, на массивный штамп. Будем полагать, что $f(t)$ отлична от нуля лишь на конечном интервале, т. е. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$ и $t > t_0 > 0$. Тогда трансформанта Лапласа этой функции, которую обозначим $F(s)$, — целая функция комплексной переменной s. Исходя из того, что $w(s)$ имеет полюсы на мнимой оси, заключаем, что при $t \to \infty$ смещение штампа описывается выражением

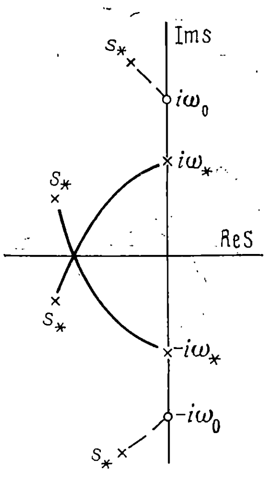
$$W(t) = 2\operatorname{Re}[F(i\omega_*) \operatorname{Re} sw(i\omega_*) \exp(i\omega_* t)] \qquad (2.1)$$

Однако, если масса штампа такова, что $w(s)$ не имеет полюсов на оси $\operatorname{Re} s = 0$, то несложно показать, используя асимптотические методы, что при $t \to \infty$:

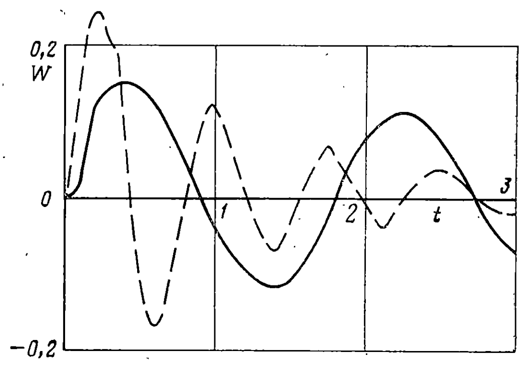
$$W(t) = O(t^{-1}) \qquad (2.2)$$

Тем не менее, между выражениями (2.1) и (2.2) имеется предельный переход. Численный анализ, проведенный для целого ряда значений масс, показывает, что для больших масс (но таких, что бесконечный В-резонанс отсутствует) после снятия нагрузки ($t > t_0$) смещение $W(t)$ хорошо описывается выражением $\exp(-\delta_* t)\cos(\omega_* t)$. Причем с увеличением m затухание $\delta_* \to 0$ и возрастает период колебаний, т. е. ω_* уменьшается. Тем самым можно сделать вывод, что при уменьшении массы штампа полюса $\pm i\omega_*$ функции $w(s)$, отвечающие за В-резонанс, сначала смещаются вдоль мнимой оси до точек $\pm i\omega_0$ соответственно. Затем при дальнейшем уменьшении массы штампа они перемещаются в левую полуплоскость комплексного переменного s. Перемещение полюса схематично показано на фиг. 1 пунктиром. При малых массах штампа характер его движения после снятия нагрузки определяется волнами, отраженными от нижней границы.

3. Перейдем теперь к рассмотрению контакта массивного штампа со слоистой полуплоскостью. Будем считать, что основание представляет собой упругую полосу постоянной толщины, сцепленную с упругой полуплоскостью. Тогда рассмотренный выше случай упругой полосы можно



Фиг. 1



Фиг. 2

трактовать как слоистое основание, у которого подстилающая полуплоскость имеет бесконечно большие упругие модули. При больших значениях упругих модулей полуплоскости по сравнению с характеристиками полосы движение штампа достаточно хорошо описывается выражением $\exp(-\delta_* t)\cos(\omega_* t)$ хотя асимптотика $W(t)$ для больших t имеет вид (2.2).

Характерная временная зависимость смещения $W(t)$ для этого случая показана на фиг. 2. Сплошная линия соответствует штампу большой массы, штриховая — штампу нулевой массы. На последней зависимости хорошо прослеживается воздействие волн, отраженных от границы раздела. Как легко заметить, учет массы приводит к сглаживанию воздействия отраженных волн. При увеличении массы штампа как и для рассмотренной выше полосы затухание δ_* уменьшается, а период колебаний возрастает.

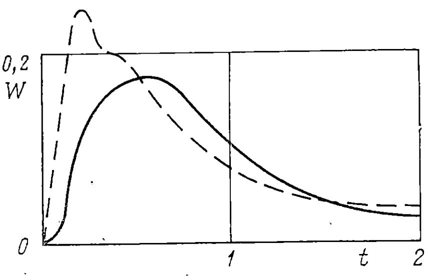
Таким образом, для структуры «мягкая полоса» на более «твердой полуплоскости» B-резонанс становится ограниченным. Такой вывод можно сделать, исходя из (1.4) и учитывая, что для слоистой полуплоскости $\operatorname{Im} r(-i\omega)<0$ при $\omega>0$. Итак, при «размягчении» подстилающей полуплоскости полюсы $\pm i\omega_*$ функции $w(s)$, отвечающие за B-резонансы, смещаются в левую полуплоскость комплексного переменного s. Как показывает численный анализ, при этом возрастает период колебаний, т. е. уменьшается мнимая часть полюса. Это перемещение полюсов схематично показано на фиг. 1 сплошной линией.

4. Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда упругие модули подстилающей полуплоскости и полосы совпадают. Характерная зависимость смещения $W(t)$ для $f(t)$ таких, что $f(t)\geqslant 0$, представлена на фиг. 3. Как легко видеть, при этом ни массивный штамп (сплошная линия), ни невесомый штамп (штриховая линия) не осциллируют относительно равновесного положения, а лишь постепенно возвращаются в исходное положение.

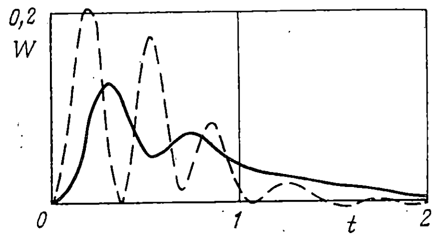
При учете массы штампа такое поведение возможно лишь в двух случаях: либо полюсы, отвечающие за B-резонансы, смещаются в бесконечность (т. е. $\delta_*\to+\infty$ и влияние B-резонанса становится ничтожно малым), либо они смещаются на вещественную полуось $s<0$ (т. е. исчезает осциллирующий сомножитель).

Однако существенная зависимость смещения массивного штампа от его массы при временах $t>t_0$ указывает на то, что реализуется именно второй случай. Полюсы, отвечающие за B-резонансы, смещаются на полуось $s<0$, при этом они сливаются, образуя двукратный полюс функции $w(t)$.

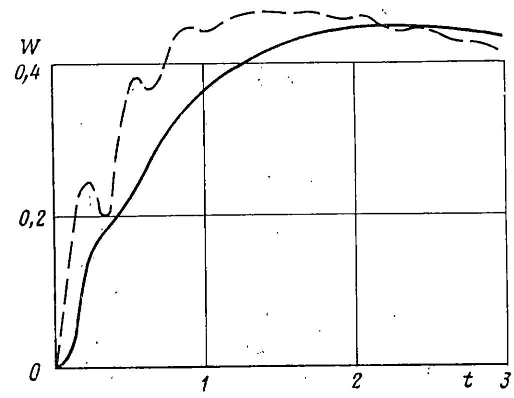
5. Остается рассмотреть последний предельный случай, а именно, упругие модули подстилающей полуплоскости стремятся к нулю, т. е. случай свободной полосы. Здесь следует иметь ввиду, что для свободной



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

полосы жесткость $r(s)$ имеет полюс в начале координат. Такое поведение $r(s)$ приводит к тому, что, если $F(0)\neq 0$ (импульс внешней нагрузке не равен нулю), то $W(t)=\mathrm{const}\neq 0$ при $t\to\infty$. (Достаточно подробно это описано в [5] для волнового уравнения.) По этой причине для того, чтобы исследовать поведение В-резонансов в этом случае использована внешняя нагрузка с нулевым импульсом.

На фиг. 4 представлены временные зависимости смещения штампа, контактирующего с «жесткой полосой», сцепленной с «мягкой полуплоскостью». Причем упругие модули полосы такие же как использованы в расчетах, представленных на фиг. 2, а отношение упругих модулей полосы и подстилающей полуплоскости, обратное тому, что бралось для построения зависимостей, изображенных на фиг. 2. Как легко видеть из фиг. 4, при «размягчении» подстилающей полуплоскости затухание колебаний массивного штампа происходит значительно быстрее, чем в случае «мягкого слоя» на «жесткой полуплоскости». Это следует и из того, что для свободной полосы нет критической частоты запирания волновода, т. е. энергия значительно быстрее излучается на бесконечность по сравнению с полосой, сцепленной с жестким основанием.

В случае нагрузок с ненулевым импульсом вклад в смещение $W(t)$, даваемый полюсами, отвечающими за В-резонансы, незначителен по сравнению с вкладом, связанным с особенностью $r(s)$ в начале координат (либо вблизи начала координат, если рассматривать «жесткий слой» на «мягкой полуплоскости»). На фиг. 5 представлены зависимости смещения при ненулевом импульсе внешнего воздействия: сплошная кривая — массивный штамп; пунктир — невесомый штамп. Здесь хорошо наблюдается зависание штампа, обусловленное особенностью $r(s)$ вблизи начала координат.

Итак, на основании зависимости, представленной на фиг. 4 заключаем, что для свободной полосы полюсы, отвечающие за В-резонансы смещаются влево (увеличивается затухание) и уходят с полуоси $s<0$ (появляется осцилляция). Это смещение полюсов схематично показано на фиг. 1.

Представленные результаты могут найти применение при разработке динамических моделей упругих оснований для расчета их взаимодействия с массивными объектами. Следует также отметить, что большая часть выводов справедлива и для пространственных контактных задач, что подтверждается численным анализом этих задач. Однако в связи с незавершенностью этих исследований здесь рассмотрены лишь плоские задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабешко В. А., Ворович И. И.* Динамические свойства полуограниченных упругих и электроупругих трехмерных тел при смешанных граничных условиях и наличии включений // Аннот. докл. 5-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Алма-Ата: Наука, КазССР. 1981. С. 39.
2. *Ворович Е. И., Пряхина О. Д.* Динамическая контактная задача для упругой системы балка – слой // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 144–148.
3. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
4. *Боев С. И., Селезнев М. Г.* Об одном подходе в нестационарных задачах теории упругости // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. 1989. № 2. С. 76–81.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию 23.VIII.1990