МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1990

УДК 539.3

А. М. ГОМИЛКО, В. Т. ГРИНЧЕНКО

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ЧЕТВЕРТЬПЛОСКОСТИ

Рассматривается стационарная динамическая задача о возбуждении изотропной однородной упругой четвертьплоскости под действием поверхностных нагрузок. Проведено сведение соответствующей граничной задачи теории упругости к сингулярному интегральному уравнению с ядром типа Коши на оси. Установлена асимптотика на бесконечности неизвестной плотности в исходном представлении вектора смещений в виде интегралов Фурье.

1. Введение. В работе рассматривается задача о возбуждении гармонически зависящего от времени волнового поля в упругой изотропной однородной четвертьплоскости при действии силовых поверхностных нагрузок. Такая задача является одной из модельных в линейной теории упругости, а ее анализ важен как с прикладной, так и с теоретической точек зрения. Несмотря на большое количество работ, посвященных изучению взаимодействия упругих волн в клине, данная проблема не получила еще удовлетворительного решения. Из работ фундаментального характера, вышедших в последнее время, здесь отметим [1, 2]. Сложность задачи обусловлена совместным наличием четырех факторов: существованием в упругой среде двух типов волн – продольных и поперечных, которые при рассматриваемых граничных условиях не разделяются; бесконечностью области рассмотрения упругого поля; наличием угловой точки в клине; существованием поверхностных гармонических волн Рэлея, распространяющихся вдоль граней клина.

В работах [3, 4] изучался, в том числе и численно, процесс отражения падающих из бесконечности упругих волн от свободных от напряжений граней клина. Полученные в этих работах функциональные уравнения являются довольно сложными и с теоретической точки зрения не исследовались. Не изучался также вопрос о взаимодействии отраженных волн в окрестности угловой точки клина.

В настоящей работе на начальном этапе используется метод суперпозиции [5]: четвертьплоскость представляется в виде пересечения двух полуплоскостей, в каждой из которых записывается общее решение уравнений движения Ламе в форме интегралов Фурье по одной из переменных и с неизвестными плотностями в них. Аналогичный подход в задаче об упругом клине был ранее использован в работах [6, 7], где соответствующая граничная задача сведена к системе сингулярных интегральных уравнений на оси с двумя сдвигами, не являющимися сдвигами Карлемана [8, 9], связанных с наличием двух скоростей распространения упругих волн. Как отмечалось в [7], эта система уравнений является сложной с точки зрения использования общих результатов теории сингулярных интегральных уравнений [8, 9]. Как показано в настоящей работе, дальнейшее продвижение в изучении задачи об упругом клине на основании метода суперпозиции связано с использованием интегрального преобразования Меллина. На этом пути удается, во-первых, свести исходную граничную задачу теории упругости к полному сингулярному уравнению с ядром Коши на оси с нулевым индексом [8], и, во-вторых, изучить асимптотику на бесконечности неизвестных плотностей в интегралах Фурье в исходном представлении волнового поля по методу суперпозиции, что, в свою очередь дает возможность полностью решить вопрос об описании волнового поля в окрестности угловой точки клина. Отметим, что сингулярные интегральные уравнения в другом виде в задаче об упругом клине были ранее получены в работах [10] (на основании использования интегрального преобразования Конторовича – Лебедева) и [2] (на основании использования интегралов Зоммерфельда).

Проведенные далее рассмотрения для четвертьплоскости могут быть перенесены на общий случай клина с произвольным углом раствора. Аналогично рассматривается и задача дифракции упругих волн на свободных от напряжений гранях клина, здесь усложнение связано лишь с анализом правых частей в получаемых уравнениях. Отметим, что для простоты выкладок в работе изучается случай антисимметричного относительно биссектрисы напряженного состояния четвертьплоскости.

2. Постановка задачи. Рассматривается задача о возбуждении гармонического волнового поля в упругой изотропной и однородной четвертьплоскости $x>0$, $y>0$ при действии нагрузок на гранях $x>0$, $y=0$ и $x=0$, $y>0$. Для вектора смещений частиц упругой среды $\mathbf{u}(x, y)=\{u_x, u_y\}$ (временной множитель $e^{-i\omega t}$ всюду далее опускается) имеем уравнения движения Ламе

$$(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}+\mu\Delta\mathbf{u}+\rho\omega^2\mathbf{u}=0 \tag{2.1}$$

и граничные условия

$$\begin{gathered}\sigma_y(x, 0)=2Gf(x), \quad \tau_{yx}(x, 0)=2Gg(x) \quad (x>0)\\ \sigma_x(0, y)=-2Gf(y), \quad \tau_{xy}(0, y)=-2Gg(y) \quad (y>0)\end{gathered} \tag{2.2}$$

где $\lambda>0$, $\mu>0$ — упругие постоянные Ламе, $\rho>0$ — удельная плотность материала, G — модуль сдвига, а поле напряжений, согласно закону Гука, имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{2G}\sigma_x=\frac{1}{2\mu}\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_x}{\partial x}+\lambda\frac{\partial u_y}{\partial y}\right]\\ \frac{1}{2G}\sigma_y=\frac{1}{2\mu}\left[\lambda\frac{\partial u_x}{\partial x}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_y}{\partial y}\right]\\ \frac{1}{2G}\tau_{xy}=\frac{1}{2G}\tau_{yx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\end{gathered} \tag{2.3}$$

Дополнительно к (2.1), (2.2) требуется выполнение еще двух условий, а именно, накладывается условие конечности упругой энергии в окрестности вершины четвертьплоскости [1]:

$$\int_0^{r_0}\int_0^{\pi/2} Wr\,d\varphi\,dr<\infty \qquad (0<r_0<\infty) \tag{2.4}$$

где r, φ — полярные координаты, так что $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, и условия излучения Зоммерфельда на бесконечности при $\varphi\in(0, \pi/2)$ и $r\to\infty$:

$$\begin{gathered}\mathbf{u}=r^{-1/r}\mathbf{v}_1(\varphi)e^{ik_1r}+r^{-1/r}\mathbf{v}_2(\varphi)e^{ik_2r}+Or^{-1}\\ c_1=((\lambda+2\mu)/\rho)^{1/2}, \quad c_2=(\mu/\rho)^{1/2}\end{gathered} \tag{2.5}$$

с волновыми числами $k_j=\omega/c_j$, $j=1, 2$. В связи с условием (2.4) отметим работу И. И. Воровича [11], где подробно изучен вопрос о существенности условия конечности энергии в постановке граничных задач статической теории упругости.

Для простоты изложения функции $f(x)$, $g(x)$ считаем бесконечно дифференцируемыми и финитными, с носителями на $(0, \infty)$. Для дальнейшего понадобятся преобразования Фурье этих функций

$$f_s(\xi)=\int_0^\infty f(x)\sin(\xi x)\,dx, \qquad g_c(\xi)=\int_0^\infty g(x)\cos(\xi x)\,dx$$

3. Представление решения по методу суперпозиции. Решение исходной граничной задачи (2.1), (2.2) строится исходя из принципа предельного поглощения, а именно, вначале рассматривается среда с поглощением [12], так что $\operatorname{Im} k_j=\varepsilon_j>0$, после чего решение для идеально упругой среды получается в результате предельного перехода $\varepsilon_j\to0$, $j=1, 2$. Переход к модели среды с поглощением, с одной стороны, делает законными все последующие преобразования и, с другой стороны, позволяет выполнить условия излучения (2.5). Следует однако отметить, что корректность предельного перехода при $\varepsilon_j\to0$ требует, вообще говоря, отдельного обоснования. Опуская промежуточные выкладки, представим при $\varepsilon_j>0$ вектор смещений $\mathbf{u}$ в виде следующих интегралов Фурье

$$u_x = \frac{2k_1^{-2}}{\pi}\int_0^\infty \frac{X(\xi)\xi}{\Delta(\xi)}[-2\alpha_1\alpha_2 e^{-\alpha_1 x}+(2\xi^2-k_2^2)e^{-\alpha_2 x}]\sin(\xi y)\,d\xi -$$
$$-\frac{2k_1^{-2}}{\pi}\int_0^\infty \frac{X(\xi)\alpha_2}{\Delta(\xi)}[2\xi^2 e^{-\alpha_1 y}-(2\xi^2-k_2^2)e^{-\alpha_2 y}]\cos(\xi x)\,d\xi+$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{f_s(\xi)}{\alpha_2}e^{-\alpha_2 x}\sin(\xi y)\,d\xi-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{f_s(\xi)}{\xi}e^{-\alpha_2 y}\cos(\xi x)\,d\xi \tag{3.1}$$
$$u_y = \frac{2k_1^{-2}}{\pi}\int_0^\infty \frac{X(\xi)\alpha_2}{\Delta(\xi)}[-2\xi^2 e^{-\alpha_1 x}-(2\xi^2-k_2^2)e^{-\alpha_2 x}]\cos(\xi y)\,d\xi +$$
$$+\frac{2k_1^{-2}}{\pi}\int_0^\infty \frac{X(\xi)\xi}{\Delta(\xi)}[2\alpha_1\alpha_2 e^{-\alpha_1 y}-(2\xi^2-k_2^2)e^{-\alpha_2 y}]\sin(\xi x)\,d\xi -$$
$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{f_s(\xi)}{\xi}e^{-\alpha_2 x}\cos(\xi y)\,d\xi-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{f_s(\xi)}{\alpha_2}e^{-\alpha_2 y}\sin(\xi x)\,d\xi$$

с неизвестной функцией $X(\xi)$. Здесь функция $\alpha_j(\xi)=(\xi^2-k_j^2)^{1/2}$, где $j=1, 2$, является, по определению, однозначной аналитической функцией в комплексной плоскости с разрезами вдоль полупрямых $(-k_j, -k_j-i\infty)$ и $(k_j, k_j+i\infty)$, причем $\alpha_j(0)=-ik_j$, определитель Рэлея $\Delta(\xi)=$ $=4\xi^2\alpha_1(\xi)\alpha_2(\xi)-(2\xi^2-k_2^2)^2$. Отвечающее (3.1) поле напряжений согласно (2.3) имеет вид

$$\frac{1}{2G}\sigma_x = \frac{2k_1^{-2}}{\pi}\int_0^\infty \frac{X(\xi)}{\Delta(\xi)}\xi\alpha_2(2\xi^2-k_2^2)(e^{-\alpha_1 x}-e^{-\alpha_2 x})\sin(\xi y)\,d\xi+$$
$$+\frac{2k_1^{-2}}{\pi}\int_0^\infty \frac{X(\xi)}{\Delta(\xi)}\xi\alpha_2[(2\xi^2-2k_1^2+k_2^2)e^{-\alpha_1 y}-(2\xi^2-k_2^2)e^{-\alpha_2 y}]\sin(\xi x)\,d\xi-$$
$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f_s(\xi)e^{-\alpha_2 x}\sin(\xi y)\,d\xi-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f_s(\xi)e^{-\alpha_2 y}\sin(\xi x)\,d\xi$$

$$\frac{1}{2G}\sigma_y = -\frac{2k_1^{-2}}{\pi}\int_0^\infty \frac{X(\xi)}{\Delta(\xi)}\xi\alpha_2[(2\xi^2-2k_1^2+k_2^2)e^{-\alpha_1 x}-$$
$$-(2\xi^2-k_2^2)e^{-\alpha_2 x}]\sin(\xi y)\,d\xi- \tag{3.2}$$
$$-\frac{2k_1^{-2}}{\pi}\int_0^\infty \frac{X(\xi)}{\Delta(\xi)}\xi\alpha_2(2\xi^2-k_2^2)(e^{-\alpha_1 y}-e^{-\alpha_2 y})\sin(\xi x)\,d\xi+$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f_s(\xi)e^{-\alpha_2 x}\sin(\xi y)\,d\xi+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f_s(\xi)e^{-\alpha_2 y}\sin(\xi x)\,d\xi$$

$$\frac{1}{2G}\tau_{xy} = -\frac{k_1^{-2}}{\pi}\int_0^\infty \frac{X(\xi)}{\Delta(\xi)}[4\xi^2\alpha_1\alpha_2 e^{-\alpha_1 x}-(2\xi^2-k_2^2)^8 e^{-\alpha_2 x}]\cos(\xi y)\,d\xi +$$

$$+\frac{k_1^{-2}}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{X(\xi)}{\Delta(\xi)}\left[4\xi^2\alpha_1\alpha_2 e^{-\alpha_1 y}-(2\xi^2-k_2^2)^2 e^{-\alpha_2 y}\right]\cos(\xi x)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty f_s(\xi)\,\frac{(2\xi^2-k_2^2)}{\xi\alpha_2}\,e^{-\alpha_2 x}\cos(\xi y)\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty f_s(\xi)\frac{(2\xi^2-k_2^2)}{\xi\alpha_2}\,e^{-\alpha_2 y}\cos(\xi x)\,d\xi$$

Представление (3.1) выбрано таким образом, что вектор $\mathbf{u}$ удовлетворяет уравнениям (2.1) и граничным условиям для нормальных напряжений из (2.2), и, кроме того, справедливо соотношение $\tau_{xy}(0, y)=-\tau_{xy}(x, 0)$ при $x=y$. Таким образом, для определения неизвестной функции $X(\xi)$ остается выполнить одно граничное условие $\tau_{xy}(0, y)=-2Gg(y)$, $y>0$. Выполнение этого граничного условия, согласно (3.2), приводит к соотношению

$$-\frac{k_1^{-2}}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{X(\xi)}{\Delta(\xi)}\left[4\xi^2\alpha_1\alpha_2 e^{-\alpha_1 y}-(2\xi^2-k_2^2)^2 e^{-\alpha_2 y}\right]d\xi+$$

$$+\frac{k_1^{-2}}{\pi}\int\limits_0^\infty X(\xi)\cos(\xi y)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty f_s(\xi)\frac{(2\xi^2-k_2^2)}{\xi\alpha_2}\,e^{-\alpha_2 y}\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty f_s(\xi)\frac{(2\xi^2-k_2^2)}{\xi\alpha_2}\cos(\xi y)\,d\xi=g(y),\qquad y>0$$

Применяя здесь косинус-преобразование Фурье, с учетом

$$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha y}\cos(sy)\,dy=\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2},\qquad \operatorname{Re}\alpha>0$$

получаем для $X(\xi)$ интегральное уравнение

$$X(s)-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty X(\xi)K(\xi,s)\,d\xi=H(s),\qquad s>0 \tag{3.3}$$

где ядро и правая часть имеют вид

$$K(\xi,s)=\frac{\alpha_2(\xi)}{\Delta(\xi)}\left[\frac{4\xi^2\alpha_1^2(\xi)}{s^2+\alpha_1^2(\xi)}-\frac{(2\xi^2-k_2^2)^2}{s^2+\alpha_2^2(\xi)}\right]$$

$$H(s)=2k_1^2\left\{g_c(s)+\frac{(2s^2-k_2^2)}{2s\alpha_2(s)}f_s(s)-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty f_s(\xi)\,\frac{(2\xi^2-k_2^2)}{\xi(s^2+\alpha_2^2(\xi))}\,d\xi\right\}$$

Для достаточно малых $\varepsilon_j>0$ ядро $K(\xi, s)$ является регулярным в следующем смысле: оно не имеет особенностей при $\xi>0$, $s>0$ и $K(\xi, s)\in L_p(\mathbf{R}_+^2)$ при любом $p>2$. В предельном случае $\varepsilon_j=0$ уравнение (3.3), на основании формул Сохоцкого, переходит в сингулярное уравнение со сдвигами, аналогичное полученным уравнениям в [6, 7].

Дальнейшее преобразование уравнения (3.3) связано с использованием интегрального преобразования Меллина, аналогично тому, как это было сделано в работе [13] при рассмотрении статической задачи теории упругости для полуполосы.

4. Сведение граничной задачи к сингулярному интегральному уравнению. Пусть $X(\xi)$ — ограниченное при $\xi \geqslant 0$ решение уравнения (3.3) с оценкой $X(\xi)=O(\xi^{-\beta})$, $\xi \to \infty$ при некотором $\beta \in (0, 1)$ (такая оценка обеспечивает сходимость интегралов в (3.1) вплоть до границы четвертьплоскости). Тогда существует преобразование Меллина

$$M(\gamma)=\int_0^\infty X(s)s^{\gamma-1}\,ds \qquad (0<\operatorname{Re}\gamma<\beta) \tag{4.1}$$

с формулой обращения

$$X(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} M(\eta)\xi^{-\eta}\,d\eta \qquad (\sigma\in(0,\beta),\ \xi>0) \tag{4.2}$$

Применяя преобразование Меллина к уравнению (3.3) и учитывая равенство

$$\int_0^\infty \frac{s^{\gamma-1}}{s^2+\alpha^2}\,ds=\frac{\pi}{2}\,\frac{\alpha^{\gamma-2}}{\sin\pi\gamma/2} \qquad (0<\operatorname{Re}\gamma<2,\ \operatorname{Re}\alpha>0)$$

получаем следующее соотношение

$$M(\gamma)-\int_0^\infty X(\xi)\,\frac{\alpha_2(\xi)\,[4\xi^2\alpha_1^{\gamma}(\xi)-(2\xi^2-k_2^2)\alpha_2^{\gamma-2}(\xi)]}{\Delta(\xi)\sin\pi\gamma/2}\,d\xi=L(\gamma) \tag{4.3}$$

где $L(\gamma)$ — преобразование Меллина функции $H(s)$. Подставляя выражение (4.2) в (4.3) и меняя порядки интегрирования, что возможно при выполнении условия $0<\operatorname{Re}\gamma<\sigma<\beta$, получаем

$$M(\gamma)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} M(\eta)\,\frac{R(\eta,\gamma)}{\sin\pi\gamma/2}\,d\eta=L(\gamma) \tag{4.4}$$

$$R(\eta,\gamma)=\int_0^\infty S(\xi,\gamma)\xi^{-\eta}d\pi, \qquad S(\xi,\gamma)=\frac{\alpha_2(\xi)}{\Delta(\xi)}\,4\xi^2\alpha_1^{\gamma}(\xi)-(2\xi^2-k_2^2)^2\alpha_2^{\gamma-2}(\xi)]$$

При этом справедливо асимптотическое представление

$$S(\xi,\gamma)=\xi^{\gamma-1}\left\{\gamma+\sum_{k=1}^{h} b_k(\gamma)\xi^{-2k}+O(\xi^{-2h-2})\right\}, \qquad \xi\to\infty \tag{4.5}$$

где $b_k(\gamma)$ — полиномы от γ, которые можно выписать в явном виде. Из (4.5), в частности, получаем следующее представление для ядра

$$R(\eta,\gamma)=\frac{\gamma d^{\gamma-\eta}}{\eta-\gamma}+\sum_{k=1}^{h}\frac{b_k(\gamma)\,d^{\gamma-\eta-2k}}{\eta-\gamma+2k}+\int_0^d S(\xi,\gamma)\xi^{-\eta}d\xi+\int_d^\infty Q_h(\xi,\gamma)\xi^{\gamma-\eta-1}\,d\xi \tag{4.6}$$

где $d>0$ и целое число $h>0$, а функция $Q_h(\xi,\gamma)=O(\xi^{-2h-2})$, $\xi\to\infty$ и $Q_h(\xi,\gamma)$ аналитична по γ при $\operatorname{Re}\gamma>0$. Из представления (4.6) получаем, что ядро $R(\eta,\gamma)$ при фиксированном η с $\operatorname{Re}\eta\in(0,\beta)$ продолжается мероморфным образом в полуплоскость $\operatorname{Re}\gamma>0$ с простыми полюсами в точках $\eta+2k$, где $k=0, 1, \ldots$. В частности, сдвигая в (4.4) $\operatorname{Re}\gamma$ к $\operatorname{Re}\eta=\sigma$, получаем на основании (4.6) и формулы Сохоцкого уравнение относительно $M(\gamma)$:

$$\left(1-\frac{\gamma}{2\sin\pi\gamma/2}\right)M(\gamma)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}M(\eta)\frac{R(\eta,\gamma)}{\sin\pi\gamma/2}d\eta=L(\gamma). \tag{4.7}$$

Таким образом, получили на прямой $\operatorname{Re}\gamma=\sigma$ полное особое интегральное уравнение с ядром типа ядра Коши относительно преобразования Меллина $M(\gamma)$ функции $X(\xi)$.

Выясним вопрос об индексе $\varkappa$ сингулярного интегрального уравнения (4.7). Согласно [8] его индекс равен индексу функции $T(\gamma)=1-\gamma/\sin\pi\gamma/2$ по прямой $\operatorname{Re}\gamma=\sigma$. При этом, так как функция $T(\gamma)$ не имеет нулей в полосе $|\operatorname{Re}\gamma|<1$, а $T(is)$ вещественна при вещественных s, то, используя теорему Коши, имеем

$$\varkappa=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{T'(\gamma)}{T(\gamma)}d\gamma=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{T'(\gamma)}{T(\gamma)}d\gamma=0$$

Таким образом, индекс сингулярного интегрального уравнения (4.7) равен нулю. Этот факт открывает принципиальную возможность использования теории Фредгольма при исследовании уравнения (4.7) в классе убывающих на бесконечности функций в том или ином функциональном пространстве. Выбор приемлемого пространства связан с анализом поведения ядра $R(\eta,\gamma)$ при $|\operatorname{Im}\eta|\to\infty$, $|\operatorname{Im}\gamma|\to\infty$. В предельном случае $\operatorname{Im}k_j=0$ уравнение (4.7) сохраняет свой вид с тем лишь изменением, что теперь

$$R(\eta,\gamma)=\int\limits_0^\infty S(\xi,\gamma)\xi^{-\eta}d\xi+\pi i\operatorname*{Res}_{\xi=k_0}S(\xi,\gamma)\xi^{-\eta}$$

где $S(\xi,\gamma)$ определяется (4.4), а k_0 — единственный положительный корень определителя Рэлея $\Delta(\xi)$.

5. **Асимптотика функции $X(\xi)$ при $\xi\to\infty$.** В рассматриваемой задаче существенную роль играют волновые явления, происходящие в окрестности угловой точки четвертьплоскости. Структура формул (3.1), (3.2) показывает, что ближнее волновое поле в этой окрестности определяется асимптотикой функции $X(\xi)$ при $\xi\to\infty$. Кроме того, априорное знание асимптотики неизвестной функции является важным моментом при численном анализе (см., например, [5]). Согласно формуле обращения (4.2) асимптотика $X(\xi)$ при $\xi\to\infty$ определяется аналитическими свойствами функции $M(\gamma)$ в полуплоскости $\operatorname{Re}\gamma>0$. Из (4.4) и (4.6) следует, после сдвига контура интегрирования $\operatorname{Re}\eta=\sigma$ к контуру $\operatorname{Re}\eta=\sigma_1$ с $\sigma_1<\operatorname{Re}\gamma$, соотношение

$$\left(1-\frac{\gamma}{\sin\pi\gamma/2}\right)M(\gamma)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}M(\eta)\frac{R(\eta,\gamma)}{\sin\pi\gamma/2}d\eta=L(\gamma)$$

откуда получаем

$$M(\gamma)=\frac{1}{D(\gamma)}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}M(\eta)R(\eta,\gamma)d\eta+\sin\pi\gamma/2L(\gamma)\right\} \tag{5.1}$$

$$D(\gamma)=\sin\pi\gamma/2-\gamma\quad(0<\sigma_1<\operatorname{Re}\gamma<\beta)$$

Представление (5.1) вместе с (4.6) позволяет осуществить мероморфное продолжение функции $M(\gamma)$, являющейся аналитической в полосе $0<\operatorname{Re}\gamma<\beta$, в полуплоскость $\operatorname{Re}\gamma>0$ и определить ее полюса. А именно, используя (4.6) в (5.1) при движении $\operatorname{Re}\gamma$ вправо, получаем (в предположении аналитичности функции $L(\gamma)$) для любых $\sigma_1\in(0,\beta)$ и целого $h\geqslant0$

$$M(\gamma)=\frac{1}{D(\gamma)}\left\{\sum_{k=1}^{h}b_k(\gamma)M(\gamma-2k)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}M(\eta)R(\eta,\gamma)\,d\eta+\right.$$

$$\left.+\sin\pi\gamma/2L(\gamma)\right\}\qquad(0<\operatorname{Re}\gamma-2h-\sigma_1<2)\tag{5.2}$$

Отметим, что функция $D(\gamma)$, корни которой, как видно из (5.2), определяет полюсы $M(\gamma)$, возникает также при исследовании статической задачи теории упругости для четвертьплоскости [14]. Пусть $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ — корни $D(\gamma)$ с $\operatorname{Re}\gamma_k>0$ и занумерованные в порядке возрастания их реальных частей. Тогда, в частности, $\gamma_0=1$, $\operatorname{Re}\gamma_1=\operatorname{Re}\gamma_2\approx15{,}1/\pi$ [14] и все эти корни являются простыми. Тогда из (5.1), (5.2) имеем, что в полосе $0<\operatorname{Re}\gamma<\nu$ для $M(\gamma)$ справедливо представление

$$M(\gamma)=M_\nu(\gamma)+\sum_{k=0}^{n_\nu}a_k\left\{\frac{1}{\gamma-\gamma_k}+\sum_{l=1}^{l_{k,\nu}}\frac{b_l(\gamma_k+2l)}{(\gamma-\gamma_k-2l)D(\gamma_k+2l)}\right\}\tag{5.3}$$

где $M_\nu(\gamma)$ — аналитическая в этой полосе функция, а a_k — некоторые постоянные, линейным образом зависящие от заданной пары нагрузок $f(x)$, $g(x)$. При этом индексы n_ν и $l_{k,\nu}$ в (5.3) определяются из неравенств $\operatorname{Re}\gamma_{n_\nu}<\nu, \operatorname{Re}\gamma_{n_\nu+1}\geqslant\nu$, и $\nu-2\leqslant\operatorname{Re}\gamma_k+2l_{k,\nu}<\nu$. Кроме того, $D(\gamma_k+2l)=-2l$ при четном l и $D(\gamma_k+2l)=-2\gamma_k-2l$ при нечетном l. Таким образом, согласно (5.3) и (4.2), асимптотика $X(\xi)$ имеет вид

$$X(\xi)=-\sum_{k=0}^{n_\nu}a_k\xi^{-\gamma_k}\left\{1+\sum_{l=1}^{l_{k,\nu}}\frac{b_l(\gamma_k+2l)}{D(\gamma_k+2l)}\xi^{-2l}\right\}+O(\xi^{-\nu_1}),\ \nu_1<\nu,\ \xi\to\infty\tag{5.4}$$

Как уже отмечалось, асимптотическая формула (5.4) дает возможность, на основании формул (3.1), (3.2), полностью исследовать напряженно-деформированное состояние четвертьплоскости в окрестности ее вершины. Отметим, что в случае статической задачи асимптотика $X(\xi)$ также имеет вид (5.4), но с $b_k(\gamma)\equiv0$ для всех k. В общем случае $\operatorname{Im}k_j\geqslant0$, $j=1, 2$ функции $b_k(\gamma)$ зависят от k_j.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Добрушкин В. А.* Краевые задачи динамической теории упругости для клиновидных областей. Минск: Наука и техника, 1988. 416 с.
2. *Будаев Б. В.* Дифракция упругих волн от свободного клина: Редукция к сингулярному интегральному уравнению // Математические вопросы теории распространения волн. 19: Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1989. Т. 179. С. 37–45.
3. *Gautesen A. K.* Scattering of a plane longitudinal wave by an elastic quarter space // Wave Motion. 1985. V. 7. № 6. P. 557–568.
4. *Gautesen A. K.* Scattering of a Rayleigh wave by an elastic wedge // Wave Motion. 1987. V. 9. № 1. P. 51–59.
5. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
6. *Bogy D. B., Wang K. C.* Plane steady vibration of an orthogonal elastic wedge // J. Elasticity. 1974. V. 4. № 1. P. 1–16.
7. *Wang K. C., Bogy D. B.* Plane steady vibration of an elastic wedge // J. Elasticity. 1975. V. 5. № 1. P. 15–30.
8. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
9. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. 448 с.
10. *Forristall G. Z., Ingram J. D.* Elastodynamics of a wedge // Bull. Seismol. Soc. Amer. 1971. V. 61. № 2. P. 275–287.
11. *Ворович И. И.* Постановка краевых задач теории упругости при бесконечном интеграле энергии и базисные свойства однородных решений // Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975. С. 112–128.
12. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
13. *Гомилко А. М., Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Асимптотика неизвестных при решении методом суперпозиции плоской задачи о продольной деформации упругой полуполосы // Прикл. механика. 1988. Т. 24. № 7. С. 77–83.
14. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.

Киев

Поступила в редакцию 7.VI.1990