

УДК 539.3.01

© 1990 г.

А. Н. ЦВЕТКОВ, М. И. ЧЕБАКОВ

## ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ<sup>1</sup>

Рассматривается плоская задача о вдавлении штампа в плоскую грань упругого тела, имеющего форму симметричной криволинейной трапеции. Предполагается, что под штампом отсутствует трение, другая плоская грань упругого тела лежит без трения на жестком основании, а боковая поверхность свободна от напряжений. Предлагается метод решения задачи, основанный на использовании однородных решений для удовлетворения граничных условий на боковой поверхности упругого тела. Особенностью этого метода [1, 2] является то, что он позволяет при решении подобных контактных задач для тел конечных размеров использовать хорошо разработанную теорию контактных задач для полубесконечных тел, в данном случае — для полосы.

**1. Постановка задачи.** Пусть в прямоугольной системе координат  $(x, y)$  упругое тело занимает область  $|x| \leq f(y)$ ,  $0 \leq y \leq h$ . Предполагая, что на грани  $y=0$  заданы условия отсутствия нормальных перемещений и касательных напряжений, а штамп с плоской подошвой внедряется симметрично относительно оси  $x=0$  в грань  $y=h$  на величину  $\delta$ , соответствующую краевую задачу для уравнений Ляме можно симметрично продолжить в область  $-h \leq y < 0$ . В этом случае получаем эквивалентную задачу (фиг. 1–2) о внедрении двух штампов в грани  $y=\pm h$  упругого тела, занимающего область  $|x| \leq f(y)$ ,  $|y| \leq h$  (считаем  $f(y)$  четной функцией).

Таким образом приходим к исследованию краевой задачи для уравнений Ляме (рассматриваем случай плоской деформации) при следующих граничных условиях

$$v = \pm \delta, \tau_{xy} = 0 \quad (y = \pm h, |x| \leq a) \quad (1.1)$$

$$\sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0 \quad (y = \pm h, a < |x| \leq f(h)) \quad (1.2)$$

$$\sigma_n = 0, \tau_n = 0 \quad (x = f(y), |x| \leq h) \quad (1.3)$$

где  $\sigma_y, \tau_{xy}$  — компоненты тензора напряжений,  $\sigma_n, \tau_n$  — нормальные и касательные напряжения на боковой поверхности,  $v$  — перемещение вдоль оси  $y$ ,  $|x| \leq a$  — область контакта.

**2. Метод решения.** Используем представление решения уравнений Ляме, компонент тензора напряжений и вектора перемещений через функцию напряжений Эйри  $\Phi(x, y)$  [3]. Представим ее в виде суперпозиции

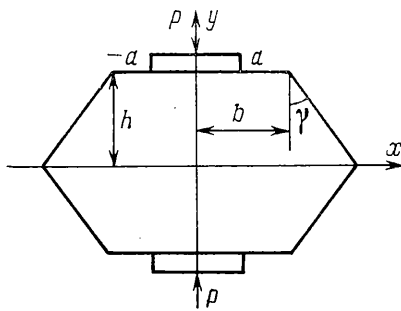
$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \Phi_k^{\circ}(x, y) + \Phi^H(x, y) \quad (2.1)$$

где  $\Phi_k^{\circ}(x, y)$  соответствует однородным решениям для полосы  $|y| \leq h$  при отсутствии напряжений на границе  $|y|=h$ , а  $\Phi^H(x, y)$  является решением бигармонического уравнения при следующих условиях на границе  $|y|=h$ :

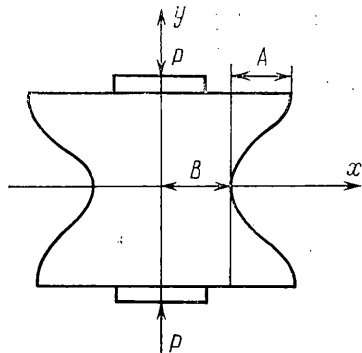
$$\sigma_y = \{q(x) (|x| \leq a); 0 (|x| > a)\}, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (2.2)$$

В этом случае граничные условия (1.2) исходной краевой задачи будут

<sup>1</sup> Основное содержание статьи было доложено на IV Всесоюзной научной конференции «Смешанные задачи механики сплошной среды». г. Одесса, 1989 г.



Фиг. 1



Фиг. 2

удовлетворены. Из граничных условий (1.1) получим интегральное уравнение относительно функции неизвестных контактных напряжений  $q(x)$  ( $q(x) \equiv \varphi(x/a)$ ):

$$K\varphi = \left[ \delta + \sum_{k=1}^{\infty} D_k v_k^\circ(ta, h) \right] \frac{G}{(1-\nu)a} \quad (|t| \leq 1) \quad (2.3)$$

$$K\varphi \equiv \frac{1}{\pi_{-1}} \int_{-1}^1 \varphi(\tau) d\tau \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos u \frac{(t-\tau)}{\lambda} du, \quad L(u) = \frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{\operatorname{sh} 2u - 2u} \quad (2.4)$$

где  $v_k^\circ(x, h)$  — вертикальные перемещения на границе  $y=h$ , соответствующие функциям  $\Phi_k^\circ(x, y)$ .

В правой части интегральное уравнение (2.3) — (2.4) содержит счетное число неизвестных коэффициентов  $D_k$ . Для их нахождения используем условие (1.3), предварительно преобразовав уравнение (2.3). Представим  $q(x)$  в виде ряда

$$q(x) = \left[ q_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} D_k q_k(x) \right] \frac{G\delta}{(1-\nu)a} \quad (2.5)$$

в котором  $q_k(x)$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) являются решениями интегральных уравнений ( $q_k(x) \equiv \varphi_k(x/a)$ ):

$$2K\varphi_k = g_k(t); \quad g_k(t) = \{1 (k=0); v_k^\circ(ta, h)/\delta (k \neq 0)\} \quad (|t| \leq 1) \quad (2.6)$$

Эти уравнения соответствуют контактным задачам для полосы, хорошо изучены и для их решения может быть использован большой арсенал эффективных методов.

Тогда, если через  $\Phi_k^H(x, y)$  обозначить функцию Эри, найденную при граничных условиях (2.2), в которых  $q(x)$  следует заменить на  $G\delta q_k(x)/[(1-\nu)a]$ , соотношение (2.1) можно преобразовать к виду

$$\Phi(x, y) = \Phi_0^H(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} D_k [\Phi_k^\circ(x, y) + \Phi_k^H(x, y)] \quad (2.7)$$

Функция Эри, представленная таким образом, при произвольных  $D_k$  позволяет удовлетворить граничным условиям (1.1) — (1.2) исходной краевой задачи.

Краевые условия (1.3) для функции Эри преобразуются к виду

$$\partial\Phi/\partial x|_\Gamma = C_1, \quad \partial\Phi/\partial y|_\Gamma = C_2 \quad (2.8)$$

где  $C_1, C_2$  — известные постоянные [3],  $\Gamma$  — боковая граница упругого тела.

Введем линейные относительно  $D_k$  функции невязки краевых условий

$$T_1(y, D_k) = \partial\Phi/\partial x|_{x=f(y)} - C_1, \quad T_2(y, D_k) = \partial\Phi/\partial y|_{x=f(y)} - C_2 \quad (2.9)$$

Тогда проблема удовлетворения граничным условиям (1.3) сводится к нахождению  $D_k$  таких, чтобы невязки  $T_1$  и  $T_2$  обратились в нуль.

В [2], где рассматривалась осесимметричная задача, для этой цели использовался метод коллокаций и метод наименьших квадратов. Можно использовать также вариационные принципы или метод Галеркина. Все эти методы позволяют свести проблему к конечной линейной системе, однако они не свободны от ряда недостатков.

Метод коллокаций требует меньшего количества вычислительных ресурсов, однако при его использовании возникает проблема выбора узлов коллокаций. При неудачном выборе можно столкнуться с расходящимся процессом при увеличении количества узлов. В целом этот метод приемлемо работает при малом количестве узлов и вертикальной боковой границе. Интегральные методы не имеют этого недостатка, но требуют дополнительного вычисления интегралов вдоль боковой границы, что связано с большими затратами времени ЭВМ, и кроме того, граничные условия выполняются в среднем и для границ, сильно отличающихся от канонических, наблюдаются острые всплески невязки.

Ниже предлагается компромиссный вариант удовлетворения граничным условиям (1.3) из условия наилучшего приближения в смысле Чебышева, используя несколько модифицированные методы Ремеза [4]. А именно,  $D_k$  находятся из условия

$$\min_{D_k (k=1,2,\dots,N)} \max_{y \in [0,h]} \max\{|T_{1N}(y, D_k)|, |T_{2N}(y, D_k)|\} \quad (2.10)$$

Здесь  $T_{1N}$  и  $T_{2N}$  получены из  $T_1$  и  $T_2$ , если положить в них  $D_k=0$  при  $k \geq N+1$ .

В результате получаем нелинейную задачу о наилучшем приближении. При этом существенно то, что достигается равномерная погрешность по всей боковой границе и требуется привлечение значительно меньшего числа однородных решений для получения результата той же точности, что и при использовании вышеперечисленных методов. Кроме того, предложенный алгоритм позволяет вести эффективный контроль точности результатов в процессе счета и не требует вычисления сложных контурных интегралов, что дает значительную экономию машинного времени и позволяет вести расчеты на маломощных персональных компьютерах.

Опуская выкладки, выпишем значения функций, входящих в соотношение (2.7):

$$\Phi_k^\circ(\tau a, ta) = hF(u_k, t) \cos(u_k \tau) / (\cos u_k \operatorname{sh}^2 u_k \lambda) \quad (2.11)$$

$$F(u_k, t) = u_k t \operatorname{sh}(u_k \lambda) \operatorname{sh}(u_k t) - [\operatorname{sh}(u_k \lambda) + u_k \lambda \operatorname{ch}(u_k \lambda)] \operatorname{ch} u_k t$$

где  $u_k$  являются корнями уравнения

$$\operatorname{sh} 2u_k + 2u_k = 0 \quad (2.12)$$

лежащими в правой комплексной полуплоскости,  $\lambda = h/a$ :

$$\Phi_k^H(\tau a, ta) = 2a \int_0^\infty Q_k(u) \frac{F(u, t) \cos u \tau}{u (\operatorname{sh} 2u \lambda + 2u \lambda)} du \quad (2.13)$$

$$Q_k(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \varphi_k(\tau) \cos u \tau d\tau$$

Здесь  $\varphi_k(\tau)$  — решения интегральных уравнений (2.6), в которых при  $k \geq 1$ :

$$v_k^\circ(ta, h) = a \cos(u_k t) / \cos u_k \quad (2.14)$$

Интегральные уравнения (2.6) соответствуют контактным задачам теории упругости для полосы. Для их решения существует большое количество эффективных методов. Отличительной особенностью полученных здесь

интегральных уравнений является наличие осциллирующих функций (2.14) в их правых частях при больших номерах  $k$ . Для преодоления этой трудности, а также с целью унификации подходов в удовлетворении граничных условий на боковой поверхности и под штампом сведем задачу нахождения решения уравнений (2.6) к задаче Чебышева о наилучшем приближении. Представим неизвестные функции  $\varphi_k(t)$  в виде

$$\varphi_k(t) = \sum_{n=0}^M x_n^k T_{2n}(t) (1-t^2)^{-1/2} \quad (2.15)$$

где  $T_{2n}(t)$  полиномы Чебышева,  $x_n^k$  — неизвестные коэффициенты, и, после подстановки (2.15) в (2.6), последнее преобразуется в соотношение

$$R_k(t) = \sum_{n=0}^M x_n^k a_n(t) - g_k(t) = 0 \quad (|t| \leq 1, k=0, 1, \dots)$$

$$a_0(t) = \ln 2\lambda - \int_0^{\infty} u^{-1} \left[ K(u) \cos \frac{ut}{\lambda} J_0\left(\frac{u}{\lambda}\right) - e^{-u} \right] du \quad (2.16)$$

$$a_n(t) = T_{2n}(t)/(2n) - (-1)^n \int_0^{\infty} u^{-1} K(u) \cos \frac{ut}{\lambda} J_{2n}\left(\frac{u}{\lambda}\right) du \quad (n \geq 1)$$

где  $K(u) = 1 - L(u)$ ,  $J_n(u)$  — функции Бесселя.

Далее неизвестные  $x_n^k$ , входящие в решение (2.15) уравнений (2.6) будем находить из условия

$$\min_{x_n^k (n=1, 2, \dots, M)} \max_{|t| \leq 1} |R_k(t)| \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (2.17)$$

используя несколько модифицированные методы Ремеза как и в случае (2.10).

Отметим, что полученное таким образом решение при  $k=0$  сравнивалось численно с известными решениями [5]. Сравнение показало высокую эффективность метода при любых  $\lambda$ . Еще раз отметим, что при реализации такого подхода всегда известна погрешность, с которой полученное решение удовлетворяет уравнению. Во всех рассмотренных случаях она не превышала 0,01%.

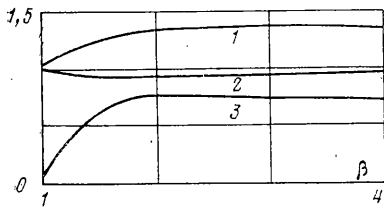
**3. Числовые примеры.** С целью определения степени влияния боковой поверхности криволинейной трапеции на распределение контактных напряжений и интегральной жесткости системы штамп — упругое тело в зависимости от ее формы и степени удаленности от штампа был проведен ряд числовых расчетов. Сразу отметим, что во всех случаях погрешность удовлетворения граничным условиям на боковой поверхности не превышала 2%. Для этого достаточно было использовать не более десяти однородных решений в соотношении (2.1).

Ниже в виде графиков приводятся результаты числовых расчетов, когда форма боковой поверхности упругого тела либо отрезок прямой (фиг. 1), либо часть волны косинусоиды (фиг. 2), а  $\lambda=2$ .

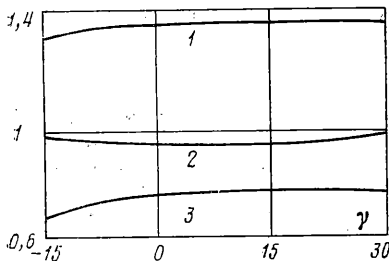
Пусть боковая поверхность есть отрезок прямой, обозначим через  $b$  полуширину верхнего основания трапеции, а через  $\gamma$  угол между вертикалью и боковой поверхностью. На фиг. 3 в зависимости от параметра  $\beta = b/a$  при  $\gamma=0$  приведены значения следующих безразмерных величин: кривая 1 — жесткость системы  $P^*$ , кривая 2 — контактные напряжения в середине штампа  $\varphi(0)$  и кривая 3 — коэффициент при особенностях напряжений на краю штампа  $\chi(1)$ . Здесь введены обозначения

$$P^* = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi(t) dt, \quad \chi(t) = \varphi(t) \sqrt{1-t^2} \quad (3.1)$$

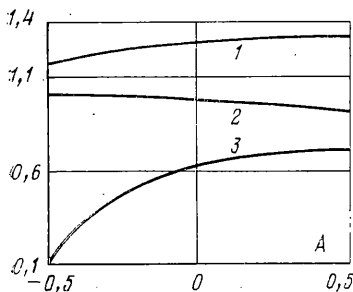
На фиг. 4 приведена зависимость функции  $\chi(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) при  $\gamma=0$  и  $\beta=1,0$  — кривая 1,  $\beta=1,1$  — кривая 2,  $\beta=1,5$  — кривая 3 и  $\beta=2,0$  — кривая 4. Анализ фиг. 3–4 показывает, что при уменьшении параметра  $\beta$  происходит перераспределение контактных напряжений от краев к центру. Так видно, что при  $\beta \rightarrow 1$  решение задачи стремится к точному, а при  $\beta \rightarrow \infty$  — стремится к известному решению для слоя.



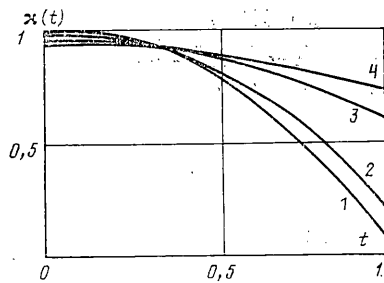
Фиг. 3



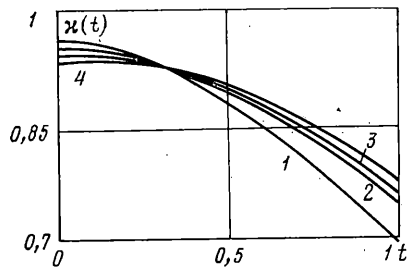
Фиг. 5



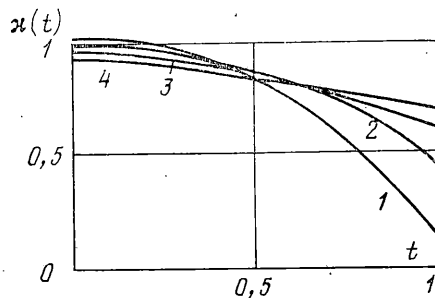
Фиг. 7



Фиг. 4



Фиг. 6



Фиг. 8

На фиг. 5 приведены значения тех же величин, что и на фиг. 4, в зависимости от угла  $\gamma$  при  $\lambda=2,0$  и  $\beta=2,0$  ( $-15^\circ < \gamma < 30^\circ$ , положительное направление угла – против часовой стрелки). На фиг. 6 приведена зависимость функции  $\kappa(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) при  $\gamma = -15^\circ$  – кривая 1,  $\gamma = 0^\circ$  – кривая 2,  $\gamma = 15^\circ$  – кривая 3 и  $\gamma = 30^\circ$  – кривая 4. Здесь с уменьшением угла  $\gamma$  наблюдается также перераспределение напряжений от краев к центру.

На фиг. 7 приведены значения величин  $P^*$ ,  $\varphi(0)$  и  $\kappa(1)$  (соответственно кривые 1, 2, 3), когда боковая поверхность трапеции описывается соотношением  $f(y) = B + A(1 - \cos y/(\pi\lambda))/2$ , при  $B=1,5$ ,  $\lambda=2,0$  в зависимости от  $|A| \leq 0,5$ . На фиг. 8 приведена зависимость  $\kappa(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) при  $A = -0,5$ ;  $-0,25$ ;  $0,0$  и  $0,5$  (соответственно кривые 1, 2, 3, 4).

Важно здесь отметить, что в случаях когда боковая граница перпендикулярна поверхностям  $y=0$  и  $y=\pm h$ , при проведении числовых расчетов достигается большая точность в удовлетворении граничным условиям на ней. Это касается ситуаций, изображенных на фиг. 1 при  $\gamma=0$  и фиг. 2.

Фиг. 3–8 позволяют судить о характере влияния формы боковой границы на распределение контактных напряжений под штампом и жесткость системы штампы-криволинейная трапеция.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М. Метод однородных решений в контактных задачах теории упругости для тел конечных размеров // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Сер. Естеств. науки. 1974. № 4. С. 12–16.
2. Цветков А. Н., Чебаков М. И. Контактная задача для конечного тела вращения со свободной боковой поверхностью // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 77–82.
3. Хан Х. Теория упругости. М.: Мир, 1988. 343 с.
4. Ремез Е. Я. Общие вычислительные методы чебышевского приближения. Киев: Изд-во АН УССР. 1957. 454 с.
5. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.