МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1990

УДК 531.383
© 1990 г.

В. В. РУМЯНЦЕВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ НЕСИММЕТРИЧНОГО ГИРОСКОПА С ЖИДКИМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

Исследуются перманентные вращения тяжелого несимметричного гироскопа с жидким заполнением, представляющего собою некоторое твердое тело с неподвижной точкой и полостью произвольной формы, целиком заполненное вязкой жидкостью, с центром тяжести на одной из главных осей инерции системы. Найдено геометрическое место всех перманентных осей вращения, получены достаточные условия устойчивости и неустойчивости перманентных вращений, даны бифуркационные диаграммы и указаны два возможных типа катастроф, приводящих к опрокидыванию гироскопа. Как частные случаи рассмотрены движения гироскопа по инерции, а также динамически симметричного тяжелого гироскопа.

Рассмотрим некоторое твердое тело с неподвижной точкой O, имеющее полость произвольной формы, целиком заполненную однородной вязкой жидкостью. Тело и жидкость в его полости будем рассматривать как одну механическую систему, движущуюся в однородном поле сил тяжести и представляющую собой в общем случае несимметричный гироскоп с жидким заполнением.

Пусть $O\xi\eta\zeta$ — неподвижная система осей координат, ось ζ которой направлена вертикально вверх, $Oxyz$ — жестко связанная с телом система координат с осями, направленными по главным осям инерции гироскопа для точки O. Моменты инерции гироскопа относительно осей x, y, z обозначим через A, B, C и пусть центр тяжести находится на оси z и имеет координату $z_0=a>0$, Mg — вес гироскопа. Ориентацию гироскопа в системе координат $O\xi\eta\zeta$ будем определять обычными углами Эйлера: нутации θ, прецессии ψ, собственного вращения φ.

Очевидно, момент силы тяжести относительно вертикали ζ равен нулю, вследствие чего проекция k момента количеств движения гироскопа на вертикаль остается постоянной во все время движения, $k=\mathrm{const}$. При этом среди действительных движений гироскопа имеются стационарные движения, представляющие собою равномерные вращения всей системы как одного твердого тела вокруг вертикали ζ, называемые перманентными вращениями. Для таких вращений углы нутации θ и собственного вращения φ остаются постоянными, как и угловая скорость прецессии $\dot\psi$.

При каждом фиксированном значении $k=k_0$ постоянной интеграла площадей перманентные вращения определяются из условия [1] $\delta W=0$ стационарности измененной потенциальной энергии системы

$$W={}^1/_2k_0^2/J+\Pi \qquad (1)$$

где Π — потенциальная энергия, J — момент инерции относительно оси ζ, не зависящие от угла прецессии ψ.

Отметим, что функция W для твердого тела с полостью, целиком заполненной жидкостью, имеет точно такой же вид, как и для одного твердого тела с такими же моментом инерции J относительно оси ζ и потенциальной энергией Π активных сил.

Условие $\delta W=0$ позволяет найти в системе координат $Oxyz$ все перманентные оси и их геометрическое место. Угловая скорость вращения вокруг любой из таких осей, совмещенной с вертикалью ζ, определяется равенством

$$\omega=k_0/J_0 \qquad (2)$$

где J_0 — величина момента инерции J относительно рассматриваемой оси.

Потенциальную энергию и момент инерции относительно оси ζ, фигурирующие в выражении (1), для нашей системы удобно представить в виде

$$\Pi=Mga\gamma_3,\quad J=A\gamma_1^2+B\gamma_2^2+C\gamma_3^2 \qquad (3)$$

где γ_i ($i=1, 2, 3$) — косинусы углов между осями x, y, z и вертикальной осью ζ, причем $\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1$. В углах Эйлера

$$\gamma_1=\sin\theta\sin\varphi,\quad \gamma_2=\sin\theta\cos\varphi,\quad \gamma_3=\cos\theta$$

Условие стационарности функции $W(\gamma_1, \gamma_2)$ эквивалентно двум нелинейным уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial\gamma_1}&=\left[\frac{k_0^2}{J^2}(C-A)-Mga\frac{1}{\gamma_3}\right]\gamma_1=0\\ \frac{\partial W}{\partial\gamma_2}&=\left[\frac{k_0^2}{J^2}(C-B)-Mga\frac{1}{\gamma_3}\right]\gamma_2=0\end{aligned} \qquad (4)$$

в которых квадрат постоянной интеграла площадей k_0^2 играет роль управляющего параметра, могущего изменяться в пределах от 0 до ∞.

Уравнения (4) имеют многообразия решений (инвариантные многообразия):

$$\gamma_1=\gamma_2=0\quad (\gamma_3=\pm1) \qquad (5)$$

при любой величине параметра k_0^2, описывающие перманентные вращения системы вокруг вертикально расположенной оси z с постоянной угловой скоростью $\omega=k_0/C$, и, в частности, равновесия при $k_0=0$, а также

$$\gamma_1=0,\quad \gamma_2\neq0,\quad \frac{k_0^2}{J_1^2}(C-B)-Mga\frac{1}{\gamma_3}=0 \qquad (6)$$

$$\gamma_2=0,\quad \gamma_1\neq0,\quad \frac{k_0^2}{J_2^2}(C-A)-Mga\frac{1}{\gamma_3}=0 \qquad (7)$$

при k_0^2 не меньших некоторых значений k_{01}^2 и k_{02}^2, указанных ниже, описывающие перманентные вращения гироскопа вокруг осей, расположенных в плоскостях Oyz и Oxz, соответственно, и совмещенных с вертикалью ζ, причем $J_1=B-(B-C)\gamma_3^2$, $J_2=A-(A-C)\gamma_3^2$.

Эти две плоскости представляют собою геометрическое место перманентных осей в системе координат $Oxyz$, в которые вырождается в случае $x_0=y_0=0$, $z_0\neq0$ конус Штауде [2]. Величины произвольных по направлению угловых скоростей вращений вокруг перманентных осей определяются равенствами (6) и (7), в которых согласно (2) следует положить, соответственно, $k_0^2/J_1^2=\omega^2$ и $k_0^2/J_2^2=\omega^2$.

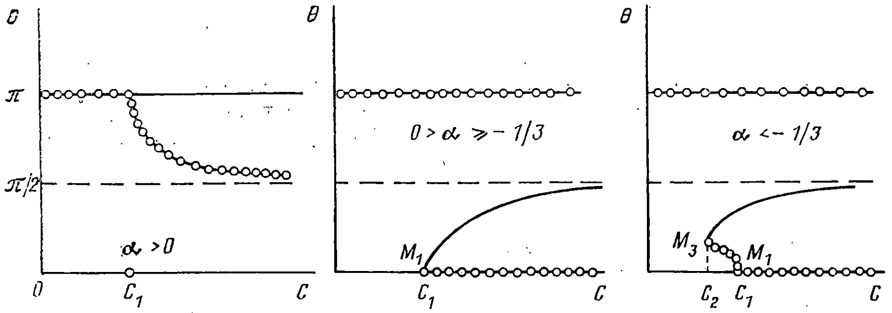
Так как для действительного перманентного вращения $\omega^2>0$, то допускаемыми [2] осями в указанных плоскостях будут полупрямые из начала координат 0, для которых $\gamma_3=\cos\theta>0$ в случаях $C>B$ и $C>A$, или $\gamma_3=\cos\theta<0$ в случаях $B>C$ и $A>C$. Таким образом, допускаемыми осями являются все прямые, расположенные в полуплоскостях $(y, z, -y)$ и $(x, z, -x)$ в случае $\cos\theta>0$, или в полуплоскостях $(y, -z, -y)$ и $(x, -z, -x)$ в случае $\cos\theta<0$, за исключением главных осей инерции x и y.

Рассмотрим уравнение (6), которое удобно представить в виде

$$f(\theta, c)=1+c\alpha\cos\theta/(1-\alpha\cos^2\theta)^2=0 \qquad (8)$$

$$c=k_0^2/(MgaB);\quad \alpha=(B-C)/B \qquad (9)$$

Так как $c>0$, то очевидно, что угол θ заключен в пределах $0\leqslant\theta<\pi/2$



при $\alpha<0$, $\pi/2<\theta\leqslant\pi$ при $\alpha>0$, причем $\theta=0$, π при $c=c_1=(1-\alpha)^2|\alpha|^{-1}$, $\theta\to\pi/2$ при $c\to\infty$.

Уравнение (8) при замене переменной θ на $\pi-\theta$ и обозначения постоянной c на β принимает вид уравнения (4.5), исследованного в [3]. Воспользуемся полученными в [3] результатами и представим вид бифуркационных диаграмм (см. фигуру) для вращений вокруг перманентных осей в плоскости Oyz в зависимости от величины постоянной α, характеризующей гироскоп при данных значениях моментов инерции B и C. Кривая стационарных движений (перманентных вращений) гироскопа вокруг вертикально направленных осей, расположенных в главной плоскости инерции Oyz, изображается на плоскости (θ, c) тремя ветвями C_s ($s=1, 2, 3$), первые две из которых суть прямые $\theta=0$ и $\theta=\pi$, соответствующие многообразию решений (5), а третья — кривая $\theta=\theta(c)$, заданная в виде неявной функции уравнением (8) и соответствующая многообразию решений (6). На диаграмме точки

$$M_1(\theta=0,\ c=c_1),\quad M_2(\theta=\pi,\ c=c_1)\quad \text{и}\quad M_3\left(\theta=\arccos\left(\frac{1}{3|\alpha|}\right)^{1/2},\ c=c_2\right)$$

изображают точки бифуркации, причем

$$c_1=(1-\alpha)^2|\alpha|^{-1}=\frac{C^2}{B|B-C|}>c_2=\frac{16}{9}\left(\frac{3}{|\alpha|}\right)^{1/2}=\frac{16}{27^{1/2}}\left(\frac{B}{C-B}\right)^{1/2}$$

Упомянутые выше величины k_{01}^2 и k_{02}^2 определяются для плоскости Oyz равенствами $k_{0s}^2=MgaBc_s$ ($s=1, 2$). Касательные к ветви C_3 в точках M_s параллельны оси $c=0$.

Бифуркационные диаграммы для вращений вокруг перманентных осей, расположенных в плоскости Oxz, будут подобны диаграммам на фигуре, так как уравнение (7) также можно представить в виде (8), если вместо (9) ввести обозначения

$$c=k_0^2/(MgaA),\quad \alpha=(A-C)/A \tag{10}$$

и учесть, что абсциссами точек бифуркации будут величины

$$c_1=\frac{C^2}{A|A-C|}>c_2=\frac{16}{27^{1/2}}\left(\frac{A}{C-A}\right)^{1/2}$$

причем величины k_{01}^2 и k_{02}^2 определяются равенствами $k_{0s}^2=MgaAc_s$ ($s=1, 2$). Обозначения (9) и (10) совпадают при $A=B$, как и последние из равенств (6) и (7).

Перейдем к исследованию устойчивости перманентных вращений гироскопа. Под устойчивостью движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью, будем понимать устойчивость в смысле Ляпунова по отношению к переменным γ_1, γ_2, от которых явно зависят выражения (3) для Π и J (следовательно, в случае невырожденности при $\theta\neq 0$, π, и по отношению к переменным θ, φ), обобщенным скоростям $\dot\theta$, $\dot\varphi$, $\dot\psi$ гироскопа и кинетической энергии жидкости T_r в полости в ее относительном движении. Согласно теоремам VI и VII монографии [I, гл. IV] перманентное вращение твердого тела с полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, устойчиво в указанном смысле, если для него функция W имеет изолированный минимум, причем всякое достаточно близкое к нему возмущенное движение стремится в пределе при $t\to\infty$ к перманентному вращению всей системы как одного твердого тела (соответствующему возмущенной величине параметра $k=k_0+\Delta k$). Если же в сколь угодно малой окрестности изолированного (при $k=k_0$) стационарного значения функции W выражение $W-W_0$, где W_0 — значение W для невозмущенного движения, может принимать отрицательные значения, то перманентное вращение твердого тела с вязкой жидкостью в его полости неустойчиво [1].

Асимптотическое стремление возмущенного движения к перманентному вращению, отвечающему возмущенной величине параметра $k=k_0+\Delta k$, означает асимптотическую устойчивость невозмущенного движения по отношению к части переменных, а именно к $\theta^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot}$, T_r, а для ветвей C_1 и C_2, за исключением окрестностей точек бифуркации M_1 и M_2, и по отношению к γ_1, γ_2. Асимптотическая устойчивость изолированного перманентного вращения по всем переменным возможна лишь при условии, что для возмущенных движений параметр $k=k_0$.

В случаях, представляющих практический интерес, задача поиска минимума функции W решается исследованием ее второй вариации $\delta^2 W$. Вторые частные производные функции $W(\gamma_1, \gamma_2)$ равны

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\gamma_1^2}=\frac{k_0^2}{J^2}(C-A)-Mga\frac{1}{\gamma_3}+\gamma_1^2\left[4(A-C)^2\frac{k_0^2}{J^3}-Mga\frac{1}{\gamma_3^3}\right]$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\gamma_2^2}=\frac{k_0^2}{J^2}(C-B)-Mga\frac{1}{\gamma_3}+\gamma_2^2\left[4(B-C)^2\frac{k_0^2}{J^3}-Mga\frac{1}{\gamma_3^3}\right] \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\gamma_1\,\partial\gamma_2}=\left[4(A-C)(B-C)\frac{k_0^2}{J^3}-Mga\frac{1}{\gamma_3^3}\right]\gamma_1\gamma_2$$

Очевидно, для всех решений (5)—(7) производная $\partial^2W/\partial\gamma_1\partial\gamma_2=0$. С учетом выражений (11), а также равенств (6) и (7) заключаем, что необходимые и достаточные условия определенной положительности δ^2W, а, значит, и достаточные условия устойчивости перманентных вращений, описываемых многообразиями решений (5)—(7), имеют вид следующих неравенств:

для многообразий решений (5):

$$(C-A)\frac{k_0^2}{C^2}>\pm Mga,\quad (C-B)\frac{k_0^2}{C^2}>\pm Mga \tag{12}$$

причем знак плюс для случая $\gamma_3=1$, знак минус — для $\gamma_3=-1$:

для многообразия решений (6):

$$B>A,\ B>C \text{ или } A<B<C,\ \cos^2\theta>{}^1/_3 B/(C-B) \tag{13}$$

для многообразия решений (7):

$$A>B,\ A>C \text{ или } B<A<C,\ \cos^2\theta>{}^1/_3 A/(C-A) \tag{14}$$

При изменении знака на противоположный хотя бы одного из неравенств групп условий (12)—(14) соответствующее перманентное вращение твердого тела с вязкой жидкостью в полости будет неустойчивым.

Таким образом доказано, что перманентные вращения вокруг осей, расположенных в плоскости Oyz (Oxz), устойчивы, если ось Oz, несущая центр тяжести гироскопа, является большой или средней осью эллипсоида инерции гироскопа для точки O, а ось Oy (Ox) — малой осью, или если ось Oz — малой осью, а ось Oy (Ox) — средней осью и при этом

[1] В формулировке теоремы VII говорится об изолированном установившемся движении, но фактически имеется в виду изолированность по отношению к переменным q_j ($j=1,\ldots,n-1$) стационарного значения W, о чем определенно сказано в самом начале доказательства теоремы [1, с. 185].

$\gamma_3=\cos\theta$ удовлетворяет последнему из неравенств (13), (14); в остальных случаях — неустойчивы.

На бифуркационных диаграммах кружочками отмечены области устойчивости перманентных вращений вокруг осей, расположенных в плоскости Oyz при условии $B>A$ и в плоскости Oxz при условии $A>B$; остальные точки ветвей C_s отвечают неустойчивым перманентным вращениям. Смена устойчивости на ветвях C_s происходит в точках бифуркации.

Отметим, что согласно результатам п. 4 [3] фигура при обозначениях (9) представляет также бифуркационные диаграммы для гироскопического маятника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, и горизонтальной осью подвеса, могущей вращаться вокруг вертикали (фигура получается из фиг. на стр. 932 [3] зеркальным отражением ветвей C_s относительно прямой $\theta=\pi/2$ согласно замене θ на $\pi-\theta$).

Бифуркационные диаграммы позволяют сделать важный вывод о возможности явлений катастроф для твердого тела с жидким наполнением в случаях $C>B$ и $C>A$ $(\alpha<0)$. В самом деле, если проследить за движением изображающей точки по устойчивой части ветви C_1 из какого-либо начального положения правее точки бифуркации M_1, то при постепенном уменьшении величины параметра c изображающая точка будет непрерывно двигаться влево до тех пор, пока c не станет равной значению c_1. В случае $0>\alpha\geqslant-1/3$ в этот момент произойдет катастрофа: изображающая точка перескакивает на устойчивую ветвь C_2, т. е. гироскоп опрокинется, и далее изображающая точка будет двигаться влево по ветви C_2. В случае $\alpha<-1/3$ изображающая точка при $c=c_1$ переходит на устойчивую часть ветви C_3 и, достигнув точки бифуркации M_3, перескакивает на устойчивую ветвь C_2, т. е. происходит катастрофа, гироскоп опрокидывается, и далее точка будет двигаться по ветви C_2.

Постепенное уменьшение параметра k_0^2 может происходить под действием момента неизбежных незначительных внешних сил трения, когда вместо установившегося движения можно говорить о квазиустановившемся движении системы [4].

В заключение рассмотрим два частных случая нашей задачи. Предположим сначала, что центр тяжести гироскопа совпадает с неподвижной точкой O, $a=0$. В этом случае перманентными осями могут быть лишь главные центральные оси инерции, занимающие произвольные положения в пространстве $O\xi\eta\zeta$. Если принять за перманентную ось z, то, как следует из (12), достаточные условия устойчивости при $k_0\neq0$ сводятся к неравенствам $C>A\geqslant B$, означающим, что ось z должна быть малой осью эллипсоида инерции твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью. В случаях, когда ось z является большой или средней осью эллипсоида инерции, движение неустойчиво.

Наконец, предположим, что эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения вокруг оси z, несущей центр тяжести системы, т. е. $A=B$. В этом случае выражения (3) принимают вид $\Pi=Mga\cos\theta$, $J=A-(A-C)\cos^2\theta$ и измененная потенциальная энергия (1) становится функцией одной только переменной $W(\theta)=\frac{1}{2}k_0^2/[A-(A-C)\cos^2\theta]+Mga\cos\theta$.

Условие стационарности этой функции эквивалентно уравнению

$$\frac{dW}{d\theta}=-\sin\theta\left(\frac{k_0^2(A-C)\cos\theta}{[A-(A-C)\cos^2\theta]^2}+Mga\right)=0 \tag{15}$$

Уравнение (15) имеет инвариантные многообразия $\theta=0$, $\theta=\pi$ при любом значении параметра k_0, описывающие перманентные вращения вокруг вертикально направленной оси z, а также многообразие

$$k_0^2(C-A)\cos\theta/[A-(A-C)\cos^2\theta]^2=Mga \tag{16}$$

описывающее перманентные вращения вокруг бесконечного множества направленных вертикально вверх в пространство $O\xi\eta\zeta$ осей, заполняющих в системе координат $Oxyz$ полупространство, образованное плоскостью Oxy и полуосью z, если $C>A$, или полуосью $-z$, если $A>C$, за исключением плоскости Oxy. Для любой полупрямой из такого полупространства с углом нутации $\theta\neq0$, π угловая скорость вращения определяется уравнением $\omega^2=Mga/(C-A)\cos\theta$, тогда как для $\theta=0$, π угловая скорость произвольна. Как известно [2], в рассматриваемом случае конус Штауде перестает существовать. Вторая производная функции $W(\theta)$ равна

$$\frac{d^2W}{d\theta^2}=-\cos\theta\left(\frac{k_0^2(A-C)\cos\theta}{[A-(A-C)\cos^2\theta]^2}+Mga\right)+$$
$$+\sin^2\theta\frac{k_0^2(A-C)[A+3(A-C)\cos^2\theta]}{[A-(A-C)\cos^2\theta]^3}$$

На основании теорем VI и VII [1] заключаем, что достаточные условия устойчивости перманентных вращений динамически симметричного гироскопа с полостью, заполненной вязкой жидкостью, по отношению к переменным θ, $\theta^\cdot$, $\varphi^\cdot$, $\psi^\cdot$, T_r имеют вид неравенств:

для многообразия решений $\theta=0$, $\theta=\pi$:

$$k_0^2(C-A)/C^2>\pm Mga \tag{17}$$

причем знак плюс для решения $\theta=0$, знак минус — для $\theta=\pi$,

для многообразия решений (16) при $\sin^2\theta\neq0$:

$$A>C \text{ или } C>A,\ \cos^2\theta>{}^1/_3A/(C-A) \tag{18}$$

При изменении знака на противоположный в неравенствах (17) или в последнем из неравенств (18) соответствующее перманентное вращение будет неустойчивым.

Таким образом, любое перманентное вращение, принадлежащее инвариантному многообразию (16), устойчиво в случае $A>C$; в случае же $C>A$ устойчивы лишь те из них, для которых выполняется последнее из неравенств (18). Геометрически это означает, что устойчивые перманентные оси расположены в случае $C>A$ внутри кругового конуса с вершиной в неподвижной точке O, осью z и углом полураствора, определяемым равенством $\cos^2\theta={}^1/_3A/(C-A)$; оси вне этого конуса неустойчивы.

Уравнение (16) совпадает с уравнением (8) при обозначениях (10), вследствие чего бифуркационные диаграммы для динамически симметричного гироскопа с вязкой жидкостью в полости имеют вид, изображенный на фигуре в зависимости от значений величины $\alpha=(A-C)/A$, включая распределение областей устойчивости и неустойчивости.

Отметим, что такие же диаграммы приведены в [4] (однако без доказательства и без ссылки на [3]) для симметричного гироскопа с полостью, заполненной вязкой жидкостью. При этом в [4] содержится неправильное утверждение, что теоремы VI и VII [1] приложимы только для несимметричного гироскопа, на самом же деле они приложимы, как следует из изложенного, и к симметричному гироскопу, являющемуся частным случаем несимметричного.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
2. *Румянцев В. В.* Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 1. С. 51–66.
3. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 5. С. 922–933.
4. *Zhu Ruzeng.* Inertial manifolds and their stability, bifurcations and catastrophe for symmetric heavy gyroscope with viscous – liquid – filled cavity // Proc. Intern. conf. on dynamics, vibration and control. Beijing, China, Peking: Univ. Press, 1990. P. 481–488.

Москва

Поступила в редакцию 7.IX.1990