МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1990

УДК 539.62


В. М. АЛЕКСАНДРОВ

# ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ОБ ИЗНОСЕ ОПЛАВЛЕНИЕМ

Предлагается модель износа, связанного с локальным оплавлением поверхности одного из взаимодействующих и движущихся друг относительно друга упругих тел. Изучается осесимметричная задача, плоская задача в несколько отличной постановке рассмотрена в [1].

1. Пусть в упругое полупространство вдавливается кольцевой штамп силой $P$, приложенной по его оси симметрии (фигура). Штамп вращается с постоянной угловой скоростью $\omega$. Допустим, что область контакта его с полупространством определяется неравенством $a\leqslant r\leqslant b$ и она не изменяется в течение времени $t(a^{\cdot}=b^{\cdot}=0)$. В области контакта кроме давления $q(r, t)=-\sigma_z(r, 0, t)$ действует касательное усилие $\tau(r, t)=\tau_{\varphi z}(r, 0, t)$, связанное с $q(r, t)$ законом Кулона

$$\tau(r, t)=kq(r, t) \tag{1.1}$$

где $k$ — коэффициент трения. Касательными усилиями $\tau_{rz}(r, 0, t)$ пренебрегаем. Под действием усилий $q(r, t)$ и $\tau(r, t)$ полупространство находится в состоянии осесимметричной деформации и деформации кручения; эти напряженно-деформированные состояния не взаимосвязаны.

Касательные усилия $\tau(r, t)$ приводят к тепловыделению в области контакта, причем общее количество тепла в единицу времени пропорционально мощности работы сил трения, а количество тепла, выделяемое в точке окружности радиуса $r$, следующее [2]:

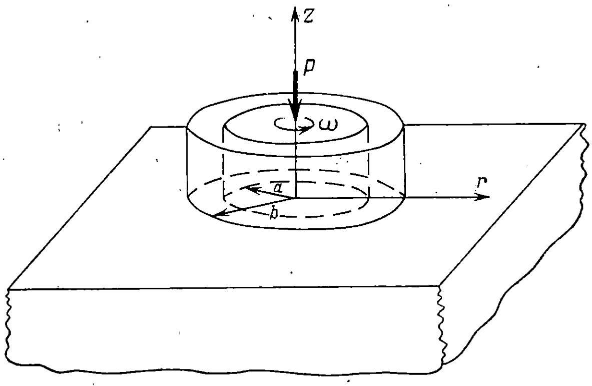
$$Q(r, t)=\omega r\tau(r, t) \tag{1.2}$$

Предположим, что угловая скорость $\omega$ превосходит некоторое критическое значение $\omega_*$, при котором температура в каждой точке области контакта достигнет температуры плавления $T_*$ материала полупространства (температура плавления материала штампа выше $T_*$). Количество тепла (1.2) разделим на три части: $Q_*$ — среднее по области контакта значение потока тепла в полупространство, обеспечивающее равенство температуры в этой области температуре $T_*$; $Q^*$ — аналогичное значение потока тепла в штамп; $Q_0(r, t)$ — тепло, затрагиваемое на локальное плавление материала полупространства.

Расплавленный материал полупространства выжимается из-под штампа силой $P$ и, следовательно, со временем штамп будет оседать. С учетом этого условие его контакта с полупространством запишем в виде

$$w_y+w_u=-[\delta(t)-f(r)] \quad (a\leqslant r\leqslant b) \tag{1.3}$$

где $\delta(t)$ — поступательное по оси $z$ перемещение штампа, $f(r)$ — функция, описывающая форму основания штампа. Слагаемое $w_y$ отражает термоуп-




ругие перемещения точек поверхности полупространства. На основании формулы (1.12) работы [3] имеем

$$w_y=\frac{2}{\pi}\int_a^b\left[-\frac{1}{\theta}q(\rho,t)+(1-\nu)\alpha T_*\right]\frac{\rho}{r+\rho}K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right)d\rho+$$

$$+\frac{2(1+\nu)\alpha}{\pi}\int_0^a T_+(\rho)\frac{\rho}{r}K\left(\frac{\rho}{r}\right)d\rho+\frac{2(1+\nu)\alpha}{\pi}\int_b^\infty T_-(\rho)K\left(\frac{r}{\rho}\right)d\rho \qquad (1.4)$$

где $\theta=G(1-\nu)^{-1}$, $G$ и $\nu$ — упругие постоянные материала полупространства, а $\alpha$ — его коэффициент теплового расширения, $K(e)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $T_+(r)$ — температура поверхности полупространства при $0\leqslant r<a$, $T_-(r)$ — аналогичная температура при $b<r<\infty$. Здесь важно отметить, что $T_-(\infty)=0$, т. е. совпадает с температурой окружающей среды, которая принимается равной нулю. Слагаемое $w_u$ описывает перемещения, возникающие в результате оплавления поверхности полупространства. Заметим, что по порядку величины $w_y$ и $w_u$ должны совпадать, поэтому данная постановка верна лишь для ограниченного интервала времени $0\leqslant t\leqslant t_*$.

2. Чтобы построить выражение для $w_u$, найдем значение $Q_*$. С этой целью решим следующую стационарную задачу теплопроводности для полупространства ($T(r,z)$ — температура):

$$\begin{aligned}&\Delta T=0,\ T=T_*\ (a\leqslant r\leqslant b,\ z=0)\\&T_z'=0\ (0\leqslant r<a,\ b<r<\infty,\ z=0)\end{aligned} \qquad (2.1)$$

Кроме того, $T(r,z)\to 0$ при $(r,z)\to\infty$. Последнее условие (2.1) предполагает, что поверхность полупространства вне штампа теплоизолирована.

Используя интегральное преобразование Ханкеля по переменной $r$, сведем смешанную задачу (2.1) к интегральному уравнению

$$\int_a^b T_z'(\rho,0)\frac{\rho}{r+\rho}K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right)d\rho=\frac{\pi}{2}T_* \qquad (a\leqslant r\leqslant b) \qquad (2.2)$$

Заметим, что уравнение (2.2) совпадает с интегральным уравнением контактной задачи о действии плоского кольцевого штампа на упругое полупространство. Асимптотическое решение этой задачи при малых и больших значениях параметра $\mu=2[\ln(b/a)]^{-1}$ получено в [4]. Согласно результатам этой работы для величины

$$Q_*=\frac{\lambda}{b^2-a^2}\int_a^b T_z'(\rho,0)\rho\,d\rho=\frac{\lambda T_* a}{b^2-a^2}n \qquad (2.3)$$

где $\lambda$ — коэффициент теплопроводности материала полупространства, имеем

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ | $\infty$ | 4 | 2 | 1 | 0 |
| $n$ | 0 | 1,013 | 1,722 | 4,704 | $\infty$ |

Предполагая тепловой контакт между штампом и полупространством идеальным, для среднего по области контакта значения потока тепла $Q^*$, отводимого в штамп, примем по аналогии с (2.3) приближенное выражение

$$Q^*=\lambda^* T_* a(b^2-a^2)^{-1}n \tag{2.4}$$

где $\lambda^*$ — коэффициент теплопроводности материала штампа. Формула (2.4) будет тем точнее, чем массивнее штамп (чем более он напоминает полупространство).

На основании (2.2) для определения температур поверхности полупространства вне области контакта $T_+(r)$ и $T_-(r)$ будем иметь следующие представления

$$\begin{gathered}\frac{2}{\pi}\int_a^b T_z'(\rho,0)K\left(\frac{r}{\rho}\right)=T_+(r) \qquad (0\leqslant r<a),\\ \frac{2}{\pi}\int_a^b T_z'(\rho,0)\frac{\rho}{r}K\left(\frac{\rho}{r}\right)d\rho=T_-(r) \qquad (b<r<\infty)\end{gathered} \tag{2.5}$$

Подставляя в (2.5) вместо $T_z'(\rho,0)$ среднее значение $\lambda^{-1}Q_*$ и вычисляя интегралы, найдем для $T_+(r)$ и $T_-(r)$ приближенные выражения

$$\begin{gathered}T_+(r)=\frac{2T_*n}{\pi(\varkappa^2-1)}\left[\frac{b}{a}E\left(\frac{r}{b}\right)-E\left(\frac{r}{b}\right)\right] \qquad \left(\varkappa=\frac{b}{a}\right)\\ T_-(r)=\frac{2T_*nr}{\pi(\varkappa^2-1)a}\left[E\left(\frac{b}{r}\right)-\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)K\left(\frac{b}{r}\right)-\right.\\ \left.-E\left(\frac{a}{r}\right)+\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)K\left(\frac{a}{r}\right)\right]\end{gathered} \tag{2.6}$$

где $E(e)$ — полный эллиптический интеграл второго рода. Нетрудно убедиться, что $T_+(r)$ ограничено при $r=0$ и $r=a$, $T_-(r)$ ограничено при $r=b$ и убывает на бесконечности, как $r^{-1}$.

3. Приравняем среднее по области контакта количество тепла, выделяемого при сухом трении, к сумме средних значений потоков тепла в полупространство и штамп, необходимых для начала плавления материала полупространства в области контакта. Получим условие для определения критического значения угловой скорости $\omega_*$. Отправляясь от формул (1.1), (1.2), (2.3) и (2.4), найдем

$$\omega_*\leqslant 2\pi T_* n(\lambda+\lambda_*)(kP)^{-1} \tag{3.1}$$

где учтено, что

$$P=2\pi\int_a^b q(\rho,t)\rho\, d\rho \tag{3.2}$$

При $\omega>\omega_*$ для избыточного количества тепла, идущего на плавление, получим выражение

$$Q_0(r,t)=\omega krq(r,t)-T_* an(b^2-a^2)^{-1}(\lambda+\lambda_*) \tag{3.3}$$

Теперь, очевидно, нужно принять во внимание, что [1]:

$$-g\rho_* w_u^{\boldsymbol{\cdot}}=Q_0(r,t) \tag{3.4}$$

где $g$ — удельная теплота плавления материала полупространства, $\rho_*$ — его плотность. На основании соотношений (3.3) и (3.4) имеем

$$w_u = -\frac{\omega kr}{g\rho_*}\int_0^t q(r,\tau)\,d\tau + mt, \qquad m = T_* an(\lambda+\lambda^*)\left[g\rho_*(b^2-a^2)\right]^{-1} \tag{3.5}$$

Подставив выражения (1.4) и (3.5) в условие (1.3), получим относительно контактного давления $q(r, t)$ следующее интегральное уравнение

$$\frac{2}{\pi\theta}\int_a^b q(\rho,t)\frac{\rho}{r+\rho}K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right)d\rho + \frac{\omega kr}{g\rho_*}\int_0^t q(r,\tau)\,d\tau = \delta(t) - f_*(r) + mt$$

$$f_*(r) = f(r) - \frac{2}{\pi}(1+\nu)\alpha\left[T^*\int_a^b \frac{\rho}{r+\rho}K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right)d\rho + \right.$$

$$\left. + \int_0^a T_+(\rho)\frac{\rho}{r}K\left(\frac{\rho}{r}\right)d\rho + \int_b^\infty T_-(\rho)K\left(\frac{r}{\rho}\right)d\rho\right] \qquad (a\leqslant r\leqslant b,\ 0\leqslant t\leqslant t_*) \tag{3.6}$$

К интегральному уравнению (3.6) нужно еще добавить условие (3.2), а также выражения (2.6). Пусть функция $f(r)$ такова, что ее производная удовлетворяет при $a<r<b$ условию Гельдера, в точках $r=a$ и $r=b$ производная имеет логарифмические особенности. Тогда нетрудно показать, что такими же свойствами будет обладать и функция $f_*(r)$.

При $t\to\infty$ (большом относительном времени, но таком, что $t\leqslant t_*$) очевидна справедливость формулы

$$q(r,t) = q_\infty(r) + O(e^{-\beta t}) \quad (\beta>0) \tag{3.7}$$

Подставляя представление (3.7) в уравнение (3.6) и дифференцируя один раз полученное соотношение по времени $t$, найдем

$$r\vartheta^{-1}q_\infty(r) = \delta^\bullet(t) + m \quad (a\leqslant r\leqslant b,\ \vartheta = g\rho_*(\omega k)^{-1}) \tag{3.8}$$

Отсюда следует, что при большом относительном времени функция $\delta(t)$ линейна по $t$. Обозначив $\delta^\bullet(t)=\delta_\infty$, на основании формул (3.2) и (3.8) имеем

$$q_\infty(r) = \vartheta r^{-1}(\delta_\infty + m), \quad P = 2\pi\vartheta(\delta_\infty+m)(b-a) \tag{3.9}$$

Заметим еще, что при $a=0$ интегральное уравнение (3.6) может быть решено точно для всего диапазона изменения $t$. Его нужно подвергнуть интегральному преобразованию Лапласа по $t$ и интегральному преобразованию Меллина по $r$, а затем в квадратурах решить получающееся функциональное уравнение Винера — Хопфа. Это показал в одном из своих докладов Г. Я. Попов (текст доклада не опубликован).

4. Сделаем в уравнении (3.6) замены переменных

$$r = a\exp((1+x)/\mu, \quad t^\vee = t/t_0, \quad \mu = 2(\ln b/a)^{-1}, \quad t_0 = \vartheta/\theta \tag{4.1}$$

и введем обозначения

$$r^{3/2}q(r,t)/\theta a^{3/2} = \varphi(x, t^\vee), \quad \sqrt{r}f_*(r)/a^{3/2} = f_*^\vee(x) \tag{4.2}$$

$$\delta(t)a^{-1} = \delta^\vee(t^\vee), \quad mt_0a^{-1} = m^\vee$$

(галочки далее опускаем). В результате придем к интегральному уравнению вида

$$\frac{1}{\pi\mu}\int_{-1}^1 \varphi(\xi,t)M\left(\frac{\xi-x}{\mu}\right)d\xi + \int_0^t \varphi(x,\tau)\,d\tau = \delta(x,t)$$

$$(|x|\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant t_*), \quad M(y) = \operatorname{sch}(^1/_2y)K[\operatorname{sch}(^1/_2y)] \tag{4.3}$$

$$\delta(x,t)=[\delta(t)+mt]\exp((1+x)/2\mu)-f_*(x)$$

при дополнительном условии (3.2), которое с учетом (4.1) и (4.2) запишется следующим образом

$$Q=\frac{2\pi}{\mu}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi,t)\exp\left(\frac{1+\xi}{2\mu}\right)d\xi,\qquad Q=\frac{P}{\theta a^2} \tag{4.4}$$

Построим приближенное решение уравнения (4.3) с условием (4.4) при малом $t$ методом сращиваемых асимптотических разложений [5]. Для этого подвергнем эти формулы преобразованию Лапласа, в результате получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi^{\wedge}(\xi,p)M\left(\frac{\xi-x}{\mu}\right)d\xi+\frac{\mu}{p}\varphi^{\wedge}(x,p)=\mu\delta^{\wedge}(x,p)\qquad(|x|\leqslant1)$$

$$\frac{Q}{p}=\frac{2\pi}{\mu}\int_{-1}^{1}\varphi^{\wedge}(\xi,p)\exp\left(\frac{1+\xi}{2\mu}\right)d\xi \tag{4.5}$$

$$\delta^{\wedge}(x,\ p)=[\delta^{\wedge}(p)+m/p^2]\exp((1+x)/2\mu)-f_*(x)/p$$

Трансформанта Лапласа $\delta^{\wedge}(p)$ при большом $p$ (малом $t$) может быть представлена так

$$\delta^{\wedge}(p)=\delta_0/p+O(1/p^2) \tag{4.6}$$

Трансформанта $\varphi^{\wedge}(x,\ p)$ вдали от точек $x=\pm1$ может быть представлена аналогичным образом

$$\varphi^{\wedge}(x,\ p)=\varphi_0(x)/p+O(1/p^2) \tag{4.7}$$

Подставляя (4.6), (4.7) в уравнение и дополнительное условие (4.5), а затем устремляя $p$ к бесконечности, получим для внешнего решения $\varphi_0(x)$ интегральное уравнение и дополнительное условие

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_0(\xi)M\left(\frac{\xi-x}{\mu}\right)d\xi=\mu\delta_0(x)\qquad(|x|\leqslant1)$$

$$Q=2\pi\int_{-1}^{1}\varphi_0(\xi)\exp\left(\frac{1+\xi}{2\mu}\right)d\xi,\qquad \delta_0(x)=\delta_0\exp\left(\frac{1+x}{2\mu}\right)-f_*(x) \tag{4.8}$$

Очевидно формулы (4.8) соответствуют уравнению (3.6) и дополнительному условию (3.2) при $t=0$, т. е. описывают задачу о действии на упругое полупространство кольцевого штампа, нагретого до температуры $T_*$ (вне штампа поверхность полупространства теплоизолирована). Асимптотические при больших и малых значениях параметра $\mu$ решения интегрального уравнения (4.8) могут быть получены по методике, изложенной в [4, 6]. После решения уравнения (4.8) нужно по дополнительному условию выразить $\delta_0$ через $Q$. Решение $\varphi_0(x)$ при всех значениях $\mu\in(0,\infty)$ представимо в форме [7]:

$$\varphi_0(x)=\omega(x)(1-x^2)^{-1/2} \tag{4.9}$$

где $\omega(x)$, по крайней мере непрерывная функция. Внешнее решение (4.7), (4.9) может использоваться вне $\varepsilon$-окрестностей точек $x=\pm1$.

5. Для построения решения типа погранслоя в $\varepsilon$-окрестности точки $x=-1$ введем новую переменную $u=(1-x)\varepsilon^{-1}$. Будем считать, что $p\gg\mu$, и положим $\varepsilon=\mu p^{-1}$. Из формул (4.7), (4.9) видно, что на границе с погранслоем вырожденное решение ведет себя следующим образом:

$$\varphi^{\wedge}(x,\ p)\sim\omega(1)(p\sqrt{2\varepsilon u})^{-1} \tag{5.1}$$

В соответствии с (5.1) в окрестности погранслоя функцию $\varphi^{\wedge}(x, p)$ будем искать в виде

$$\varphi^{\wedge}(x, p) \sim \psi_{+}(u)/(p\sqrt{2\varepsilon}), \quad \psi_{+}(0) \sim 1 \tag{5.2}$$

Заметим еще, что в окрестности погранслоя функцию $\delta^{\wedge}(x, p)$, определяемую выражением (4.5), можно представить в форме

$$\delta^{\wedge}(x, p) = p^{-1}[\delta_{+} + O(\varepsilon \ln \varepsilon)], \quad \delta_{+} = \delta_0 e^{1/\mu} - f_*(1) \tag{5.3}$$

причем асимптотическая оценка в (5.3) равномерна по $u$ при $u \sim 1$, а при $u=0$ нужно $O(\varepsilon \ln\varepsilon)$ заменить на $O(p^{-1})$.

Подставляя (5.2) и (5.3) в интегральное уравнение (4.5), имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2/\varepsilon} \psi_{+}(v) M\left(\frac{v-u}{p}\right) dv + \psi_{+}(u) = p\sqrt{2\varepsilon}[\delta_{+} + O(\varepsilon \ln \varepsilon)] \quad \left(0 \leqslant u \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\right) \tag{5.4}$$

Введем функцию $q(u) = \psi_{+}(u)\psi_{+}^{-1}(0)$ и преобразуем (5.4) следующим образом:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2/\varepsilon} q(v)\left[M\left(\frac{v-u}{p}\right) - M\left(\frac{v}{p}\right)\right] dv + q(u) = 1 + O(\varepsilon \ln \varepsilon) \quad \left(0 \leqslant u \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\right) \tag{5.5}$$

Учитывая, что при $y \to 0$ согласно [4]:

$$M(y) \to -\ln|y| + a_0, \quad a_0 = 2{,}079 \tag{5.6}$$

и устремляя в (5.5) (при фиксированном $u$) $p$ к бесконечности ($\varepsilon \to 0$), найдем уравнение для определения погранслоя

$$q(u) - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} q(v) \ln\left|1 - \frac{u}{v}\right| dv = 1 \qquad (0 \leqslant u < \infty) \tag{5.7}$$

Интегральное уравнение (5.7) с помощью преобразования Меллина сводится к разностному функциональному уравнению и решается точно [8]. К решению такого же уравнения сводится проблема построения погранслоя в $\varepsilon$-окрестности точки $x=-1$, при этом

$$\begin{gathered} u = (1+x)/\varepsilon, \quad q(u) = \psi_{-}(u)/\psi_{-}(0), \quad \varphi^{\wedge}(x, p) \sim \psi_{-}(u)/(p\sqrt{2\varepsilon}) \\ \delta^{\wedge}(x, p) = p^{-1}[\delta_{-} + O(\varepsilon \ln \varepsilon)], \quad \delta_{-} = \delta_0 - f_*(-1) \end{gathered} \tag{5.8}$$

Из свойств функции $q(u)$ важны следующие:

$$q(0) = 1, \quad q(u) \to u^{-1/2} \quad (u \to \infty) \tag{5.9}$$

Для сращивания решений типа погранслоя с внешним решением (4.9) нужно принять

$$\psi_{+}(0) = \omega(1), \quad \psi_{-}(0) = \omega(-1) \tag{5.10}$$

С учетом (4.7), (4.9), (5.2), (5.8)—(5.10) главный член равномерно пригодного асимптотического при $p \to \infty$ решения интегрального уравнения (4.5) можно записать в форме

$$\begin{gathered} \varphi^{\wedge}(x, p) = \frac{1}{p}\left\{\frac{\omega(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \omega(1)\left[\frac{1}{\sqrt{2(1-x)}} - \frac{1}{\sqrt{2(1-x+\varepsilon)}}\right] - \right. \\ \left. -\omega(-1)\left[\frac{1}{\sqrt{2(1+x)}} - \frac{1}{\sqrt{2(1+x+\varepsilon)}}\right]\right\} \quad (|x| \leqslant 1) \end{gathered} \tag{5.11}$$

если аппроксимировать функцию $q(u)$ согласно (5.9) выражением

$$q(u) \approx (u+1)^{-1/2} \tag{5.12}$$

Возвращаясь в (5.11) к оригиналам с помощью [9], найдем следующее асимптотическое при малом $t$ решение уравнения (4.3):

$$\varphi_0(x,t)=\frac{\omega(x)}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{\omega(1)}{\sqrt{2(1-x)}}[1-e^{-t_+}I_0(t_+)]-$$
$$-\frac{\omega(-1)}{\sqrt{2(1+x)}}[1-e^{-t_-}I_0(t_-)]\quad(|x|\leqslant 1)\tag{5.13}$$
$$t_+={}^1/_2\mu t/(1-x),\quad t_-={}^1/_2\mu t/(1+x)$$

Здесь $I_0(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента.

Отметим, что решение (5.13) есть погранслой по времени $t$, осуществляющий перевод функции $\varphi(x, t)$ из класса $L_p(-1, 1)$ $(1<p<2)$ при $t=0$ в классе $C(-1, 1)$ при $t>0$. Если от функции (5.13) вычислить интеграл (4.4), то убедимся, что равенство (4.4) выполняется с точностью до членов $O(t)$. В этом случае у функции $\delta(x, t)$, определяемой последней формулой (4.3), согласно (4.6):

$$\delta(t)=\delta_0+O(t)\tag{5.14}$$

причем величина $\delta_0$ выражается через $Q$ по второй формуле (4.8).

Отталкиваясь от формул (3.9), (5.13) и (5.14), можно далее построить решение интегрального уравнения (4.3) с условием (4.4) при любых значениях $t>0$, если воспользоваться методом, изложенным в [7] (см. дополнение) и [10].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Александров В. М.* Контактная задача с учетом износа, вызванного локальным оплавлением // Физико-хим. механика материалов. 1986. № 1. С. 116–124.
2. *Александров В. М., Бабешко В. А., Белоконь А. В. и др.* Расчет термоупругих контактных давлений в подшипниках с полимерным покрытием // Контактные задачи и их инженерные приложения. М.: НИИмаш, 1969. С. 214–226.
3. *Бородачев Н. М.* О решении контактной задачи термоупругости в случае осевой симметрии // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. Механика и машиностроение. 1962. № 5. С. 86–90.
4. *Александров В. М.* Осесимметричная задача о действии кольцевого штампа на упругое полупространство // Инж. ж. МТТ. 1967. № 4. С. 108–116.
5. *Найфе А. Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
6. *Александров В. М., Ромалис Б. Л.* Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 174 с.
7. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 329 с.
8. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* О контактном взаимодействии тел с покрытиями при наличии износа // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 4. С. 827–830.
9. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Справочник по операционному исчислению. М.: Высш. шк., 1965. 486 с.
10. *Александров В. М., Манжиров А. В.* О двумерных интегральных уравнениях в прикладной механике деформируемых твердых тел // ПМТФ. 1987. № 5. С. 146–152.


Москва


Поступила в редакцию
3.VI.1990