МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1990

УДК 539.3

А. А. ЗОЛОТАРЕВ

ОДИН ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СЛОИСТЫХ СРЕД

В работе развивается асимптотический подход к решению начально-краевых задач со смешанными граничными условиями, основанный на методе факторизации [1–3]. Выполнены аналитические исследования пространственно-временной структуры волновых полей при больших временах в отличие от методик [4–7], реализованных для ограниченных времен.

1. Как известно, широкий класс смешанных задач в установившемся гармоническом случае для полуограниченных сред сводится к интегральному уравнению типа свертки, например [1, 3, 5], допускающему обобщение на основе интегральных преобразований Фурье и Лапласа на неустановившийся случай

$$\int_{-a}^{a} k(x-\xi, s)\, q(\xi, s)\, d\xi = w(x, s), \qquad \operatorname{Re} s>0, \quad x\in[-a, a] \tag{1.1}$$

$$\mathrm{v}(x, s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{V}(\alpha, s)\, e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad \mathrm{v}=\{q, w, k\}, \quad \mathrm{V}=\{Q, W, K\}$$

Имеет место эквивалентное (1.1) представление в пространстве образов в форме функционального уравнения

$$K(\alpha, s) Q(\alpha, s)=W(\alpha, s)+\Phi(\alpha, s)+\Psi(\alpha, s), \operatorname{Re} s>0, \alpha\in E \tag{1.2}$$

Здесь $W(\alpha, s)=F(\alpha)\cdot T(s)$ — трансформанта известной, финитной по аргументу x функции

$$w(x, t)=f(x)\theta(t), \ t>0, \ x\in[-a, a], \ \theta(0)=0 \tag{1.3}$$

Образы $Q(\alpha, s)$, $\Phi(\alpha, s)$ и $\Psi(\alpha, s)$ подлежат определению, причем два последних соответствуют продолжению $w(x, t)$ на полуоси $x>a$, $x<-a$. В (1.2) область E — общая полоса регулярности входящих в уравнение функций, содержащая всю действительную ось α.

Пусть функция Грина $K(\alpha, s)$ мероморфна и четна по каждому из аргументов, имеет на комплексной плоскости α при $s=-i\omega$, $\omega>0$ счетное множество полюсов и нулей

$$\alpha=\pm\eta_m(-i\omega), \ \alpha=\pm\alpha_m(-i\omega) \ (m=1, 2, \ldots) \tag{1.4}$$

Причем конечное число из них с начальными номерами принимают действительные значения. Остальные — комплекснозначны и в целях упорядочения пронумерованы по возрастанию модулей. Кроме этого предполагается, что $K(\alpha, s)$ убывает как $|\alpha|^{-1}$ и $|s|^{-1}$ на бесконечности.

Для определенности считаем также, что выполняются условия

$$\operatorname{Re}\eta_m(-i\omega)>0, \ \operatorname{Im}\eta_m(-i\omega)\geqslant 0, \ \omega>0 \tag{1.5}$$

и для всех действительных ω справедливо

$$\operatorname{Re}\eta_m(-i\omega)=-\operatorname{Re}\eta_m(i\omega), \ \operatorname{Im}\eta_m(-i\omega)=\operatorname{Im}\eta_m(i\omega)\geqslant 0 \tag{1.6}$$

Тогда из (1.5), (1.6), представления в окрестности мнимой оси

$$\eta_m(s)\sim\eta_m(-i\omega)+i\gamma\partial\eta_m(-i\omega)/\partial\omega$$
$$s=\gamma-i\omega,\ 0<\gamma\ll 1,\ -\infty<\omega<\infty \tag{1.7}$$
$$\mathrm{Re}[\partial\eta_m(-i\omega)/\partial\omega]=c_m^{-1}$$

и условия положительности групповых скоростей c_m следует принадлежность $\eta_m(s)$ верхней полуплоскости. Учитывая, что для нулей из (1.4) выполняются соотношения, аналогичные (1.5)—(1.7), для дисперсионного множества имеем

$$\mathrm{Im}\,\eta_m(s)>0,\ \mathrm{Im}\,\alpha_m(s)>0,\ 0<\mathrm{Re}\,s\leqslant\gamma \tag{1.8}$$

Таким образом, используя установленные в (1.8) свойства нулей и полюсов, представим $K(\alpha, s)$ в виде бесконечного произведения и в полосе E факторизуем ее

$$K(\alpha, s)=K_+(\alpha, s)\cdot K_-(\alpha, s),\ \alpha\in E,\ 0<\mathrm{Re}\,s\leqslant\gamma \tag{1.9}$$
$$K_\mp(\alpha, s)=\prod_{m=1}^{\infty}\frac{(\alpha\mp\alpha_m(s))}{(\alpha\mp\eta_m(s))}$$

Здесь и всюду ниже обозначим индексом функции, регулярные в верхней $E\cup(\alpha:\mathrm{Im}\,\alpha>0)$ либо нижней $E\cup(\alpha:\mathrm{Im}\,\alpha<0)$ полуплоскости, соответственно.

Дальнейший анализ уравнения (1.2) выполнен на основе методики факторизации [1—3], хорошо разработанной для решения установившихся задач. Используя соотношения (1.9) и $\Phi^+=e^{i\alpha a}\Phi$, $\Phi^-=e^{i\alpha a}\Psi$, $W^\pm=e^{\pm i\alpha a}W$, $Q^\pm=e^{\pm i\alpha a}Q$, $X^\pm(\alpha, s)=\Phi^\pm(\alpha, s)e^{\pm 2i\alpha a}+W^\pm(\alpha, s)$, приведем окончательный результат, интегральные представления решения

$$w(x,t)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi^-e^{-i\alpha(x+a)+st}d\alpha\, ds \tag{1.10}$$

$$w(x,t)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi^+e^{-i\alpha(x-a)+st}d\alpha\, ds\quad (x>a)$$

$$q(x,t)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}Q^-e^{-i\alpha(x-a)+st}d\alpha\, ds\quad (|x|\leqslant a)$$

В формулах (1.10) приняты следующие обозначения

$$\Phi^-(\alpha, s)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_-(\alpha, s)X^+(\alpha_n(s), s)}{[\alpha-\alpha_n(s)]K_-'(\alpha_n(s), s)} \tag{1.11}$$

$$\Phi^+(\alpha, s)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_+(\alpha, s)}{[\alpha+\alpha_n(s)]K_+'(-\alpha_n(s), s)}\left\{W^-(-\alpha_n(s), s)+\right.$$
$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{K_-(-\alpha_n(s), s)X^+(\alpha_m(s), s)e^{+2ia\alpha_n(s)}}{[\alpha_m(s)+\alpha_n(s)]K_-'(\alpha_m(s), s)}\right\}$$

$$Q^-_{(\alpha,s)}=\frac{W^-(\alpha, s)}{K(\alpha, s)}-K_+^{-1}(\alpha, s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X^+(\alpha_n(s), s)e^{-2ia\alpha}}{[\alpha-\alpha_n(s)]K_-'(\alpha_n(s), s)}-$$
$$-K_-^{-1}(\alpha, s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\alpha+\alpha_n(s)]^{-1}}{K_+'(-\alpha_n(s), s)}\left\{W^-(-\alpha_n(s), s)+\right.$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{K_-(-\alpha_n(s),s)X^+(\alpha_m(s),s)e^{2ia\alpha_n(s)}}{[\alpha_m(s)+\alpha_n(s)]K_-'(\alpha_m(s),s)}\Bigg\},\quad K_\pm'(\alpha,s)=\frac{\partial}{\partial\alpha}K_\pm(\alpha,s)$$

Функционалы $X^+(\alpha_m,s)$ в виде (1.11) определяются из бесконечной линейной системы уравнений

$$\sum_{m=1}^{\infty}(\delta_{km}+a_{km})X_m=b_k\quad(k=1,2,\ldots)$$

$$a_{km}=K_+(\alpha_k,s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_-(-\alpha_n,s)\exp[2ia(\alpha_k+\alpha_n)]}{K_-'(\alpha_m,s)K_+'(\alpha_m,s)(\alpha_m+\alpha_n)(\alpha_k+\alpha_n)}$$

$$b_k=W^+(\alpha_k,s)-e^{2ia\alpha_k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_+(\alpha_k,s)W^-(-\alpha_n,s)}{K_+'(-\alpha_n,s)(\alpha_k+\alpha_n)}$$

$$X_m=X^+(\alpha_m,s),\ \alpha_n=\alpha_n(s);\ \delta_{km}=1,\ k=m;\ \delta_{km}=0,\ k\neq m$$

Вычислим внутренние интегралы в (1.10) по вычетам, замкнув контуры интегрирования в верхнюю либо нижнюю полуплоскость в зависимости от убывания подынтегральных функций экспоненциального типа. Далее в области абсолютной сходимости преобразования Лапласа сместим контур интегрирования на мнимую ось $s=-i\omega$. Переходя к интегрированию по действительной переменной, выводим

$$w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}w_k(x,t),\qquad |x|>a \tag{1.12}$$

$$w_k(x,t)=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B_k(\omega)e^{ir\varphi_k(\omega,\beta)}\,d\omega \tag{1.13}$$

$$r=|x|-a>0,\ \beta=t/r,\ \varphi_k(\omega,\beta)=\eta_k(-i\omega)-\beta\omega$$

$$B_k(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n/\{K_-'(\alpha_n)[K_-^{-1}(\eta_k)]'(\alpha_n-\eta_k)\},\qquad x<-a$$

$$B_k(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{W^-(-\alpha_n)}{K_+'(-\alpha_n)}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{K_-(-\alpha_n)X_me^{2ia\alpha_n}}{K_+'(-\alpha_n)K_-'(\alpha_m)(\alpha_n+\alpha_m)}\right]\Big/$$

$$\Big/\{[K_+^{-1}(-\eta_k)]'(\alpha_n-\eta_n)\},\qquad x>a$$

Здесь и в дальнейшем аргумент функций $-i\omega$, если он не несет смысловой нагрузки, будем опускать.

Следует отметить, что подынтегральные функции в (1.13) имеют счетное множество точек ветвления $\pm\varkappa_n$, $\pm\rho_n$, определяемых условиями $[\partial\alpha_n(\pm i\varkappa)/\partial\omega]^{-1}=[\partial\eta_n(\pm i\rho_n)/\partial\omega]=0$ и порожденных ветвлением соответствующих дисперсионных зависимостей (1.4). Связанная с этим неоднозначность устраняется посредством выбора ветвей η_m, α_m на основании (1.5), (1.6) и знака производных $\partial\eta_n/\partial\omega$, $\partial\alpha_n/\partial\omega$, обусловленного требованием положительности групповых скоростей. Все это требует проведения полубесконечных разрезов от точек ветвления в полуплоскости $\operatorname{Re}s\leqslant0$ в (1.10) либо — в полуплоскости $\operatorname{Im}\omega>0$ в (1.13).

Из разложения амплитудной функции $B_k(\omega)$ в окрестности произвольной точки $\omega=b_n$ из множества $\pm\varkappa_n$, $\pm\rho_n$;

$$B_k(\omega)\sim B_k(b_k)+O(\omega-b_n)^{1/2}$$
$$\omega\to b_n\pm 0,\quad 0<|B_k(b_n)|\leqslant\text{const} \tag{1.14}$$

следует, что $B_k(\omega)$ не имеет сингулярных точек на действительной оси за исключением быть может полюсов $T(-i\omega)$.

Дальнейший анализ решения выполним асимптотически для больших времен $t\to\infty$, $t/|x|=\text{const}$.

2. Пусть функция возмущений (1.3) такова, что образ Лапласа $T(s)$ временно́го распределения $\theta(t)$ не имеет полюсов в полуплоскости $\operatorname{Re} s\geqslant 0$, включая мнимую ось. Этому требованию удовлетворяют например финитные функции, либо непрерывные на полуоси t и убывающие на бесконечности. Тогда на основании принципа локализации [8] асимптотика интеграла $w_k(x, t)$ в (1.12) определяется вкладами особых точек подынтегральной функции, т. е. стационарных точек фазовой функции и точек ветвления. Используем метод стационарной фазы [8] в случае изолированных особенностей. Для интегралов (1.13) с действительными $\varphi_k(\omega, \beta)$ выводим

$$W_k(x,t)=\frac{-i}{\sqrt{2\pi r}}\sum_{j=1}^{J}\frac{B_k(\omega_{kj})}{|\eta_k''(i\omega_{kj})|^{1/2}}\exp ir\varphi_k(\omega_{kj},\beta)+i\tau_{kj}\pi/4+$$
$$+\frac{i}{\sqrt{2\pi r}}\sum_{j=1}^{J}\frac{B_k(-\omega_{kj})}{|\eta_k''(i\omega_{kj})|^{1/2}}\exp -ir\varphi_k(\omega_{kj},\beta)-i\tau_{kj}\pi/4+R_w \tag{2.1}$$

$$t\to\infty,\quad \beta=t/r=\text{const},\quad 1\ll r<c_k^*t,\quad a/r\ll 1$$

$$\tau_{kj}=\operatorname{sign}\eta_k''(-i\omega_{kj}),\qquad c_k^*=\max_{\omega}[(\eta_k')^{-1}]$$
$$\eta_k'=\partial\eta_k(-i\omega)/\partial\omega=c_k^{-1}(\omega),$$
$$\eta_k'(\pm i\omega_{kj})-\beta=0,\quad \eta_k''(\pm i\omega_{kj})\neq 0 \tag{2.2}$$

Здесь c_k^* — максимальное значение групповой скорости, J — число стационарных точек k-й моды. При выводе (2.1) использована нечетность η_k и η_k''.

Можно показать, что оставшаяся часть суммы (1.1) интегралов w_k с комплексными $\varphi_k(\omega, \beta)$ вносит экспоненциально малый вклад в $w(x, t)$. Поэтому в дальнейшем считаем, что суммирование в решении (1.1) ведется лишь для конечного числа w_k с действительными фазовыми функциями.

Для сжимаемых сред дисперсионная кривая групповой скорости действительной моды $c_k(\omega)$ кроме абсолютного максимума $c_k^*=c_k(\omega_k^*)$, связанного с существованием зоны молчания, имеет и локальные экстремумы $c_{kl}^*=c_k(\omega_{kl}^*)$, положение которых на оси ω определяется из условия двухкратности стационарной точки фазовой функции $\varphi_k(\omega, \beta)$:

$$\eta_k'(\pm i\omega_{kl}^*)-\beta_{kl}^*=0,\ \eta_k''(\pm i\omega_{kl}^*)=0,\ \eta_k'''(\pm i\omega_{kl}^*)\neq 0 \tag{2.3}$$

Вычислим вклады этих точек $w_k^\delta(x, t)$ в интеграл (1.13). Для этого в окрестности $[\omega_{kl}^*-\delta, \omega_{kl}^*+\delta]$; $\delta>0$ такой, что $\varphi_k'(\omega_{kl}^*, \beta)\to 0$, $\varphi_k''(\omega_{kl}^*, \beta)\to\to 0$ при $\beta\to\beta_{kl}^*=1/c_{kl}^*$ перейдем к новой амплитудной $A_k(\omega, \varepsilon)$ и фазовой $\Phi_k(\omega, \beta)$ функциям. Имеем

$$w_k^\delta(x,t)=\frac{i}{2\pi}e^{ir\varphi_k(\omega_{kl}^*,\beta)}\int_{\omega_{kl}^*-\delta}^{\omega_{kl}^*+\delta}A_k e^{ir\Phi_k}\,d\omega \tag{2.4}$$

$$A_k(\omega,\varepsilon)=B_k(\omega)\exp\{i(\omega-\omega_{kl}^*)[\varepsilon_1+\varepsilon_2(\omega-\omega_{kl}^*)]\}$$
$$\Phi_k(\omega,\beta)=\varphi_k(\omega,\beta)-\varphi_k(\omega_{kl}^*,\beta)-\varphi_k'(\omega_{kl}^*,\beta)(\omega-\omega_{kl}^*)-$$
$$-{}^1/_2\varphi_k''(\omega_{kl}^*,\beta)(\omega-\omega_{kl}^*)^2$$

$$\varepsilon=\{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\},\ \varepsilon_j=(r/(j)!)\partial^j\varphi_k(\omega_{kl}^*,\ \beta)/\partial\omega^j\to 0$$

$$|\varepsilon|\to 0,\ r\to\infty,\ \beta=t/r=\text{const}$$

В (2.4) фаза $\Phi_k(\alpha,\ \beta)$ обладает свойствами $\Phi_k'(\omega_{kl}^*,\ \beta)=\Phi_k''(\omega_{kl}^*,\ \beta)=$

$$=0,\ \Phi_k'''(\omega_{kl}^*,\ \beta)\neq 0,\ \beta\to\beta_{kl}^*.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае появления двухкратных или слияния существующих однократных стационарных точек в двухкратные исследуемый интеграл w_k^0 приведен к каноническому виду (2.4) и вычисляется по схеме с изолированной двухкратной стационарной точкой [8]. Аналогично определяется вклад окрестности точки $\omega=-\omega_{kl}^*$. Выводим

$$w_k(x,t)=-\sum_{l=1}^{L}\frac{\Gamma(^1/_3)\tau_{kl}}{\pi 6^{2/3}[r|\eta_k'''(-i\omega_{kl}^*)|]^{1/3}}[B_k(\omega_{kl}^*)e^{ir\varphi_k(\omega_{kl}^*)}+$$

$$+B_k(-\omega_{kl}^*)e^{-ir\varphi_k(\omega_{kl}^*)}]+R_w \qquad (2.5)$$

$$t\to\infty,\ r\to c_{kl}^*t\ (\beta\to\beta_{kl}^*),\ |\varepsilon|\leqslant\text{const}$$

$$a/r\ll 1,\ R_w=O(t^{-1/2}),\ \tau_{kl}=\operatorname{sign}\varphi'''(\omega_{kl}^*)$$

где $\Gamma(y)$ — гамма-функция.

Кроме рассмотренных случаев в (1.13) при некоторых соотношениях r, t реализуются условия стремления стационарных точек $\pm\omega_{kj}$, $\pm\omega_{kl}^*$, удовлетворяющих условиям (2.2), (2.3), к точке ветвления b_n. Для вычисления $w_k(x,\ t)$ в этом случае воспользуемся представлением (1.14) и схемой сведения интегралов к каноническому виду, аналогичной изложенной выше. Выполненный асимптотический анализ (1.13) показывает, что представления для $w_k(x,\ t)$ совпадают по форме с соответствующими (2.1), (2.5), где следует заменить фигурирующие там значения стационарных точек на их предельные при $\beta\to\beta_{kn}^0$, где $\eta_k'(\pm ib_n)-\beta_{kn}^0=0$. Изменится также оценка остатка в (2.1) на $R_w=O(t^{-3/4})$.

Таким образом, получены соотношения (1.12), (2.1), (2.5), описывающие пространственно-временную структуру решения при больших временах для возмущающих факторов импульсного типа. Видно, что это решение имеет структуру волновых пакетов с амплитудами, убывающими с расстоянием как $r^{-1/2}$, $r\to\infty$. Причем граница каждого из них, распространяясь со скоростью c_{kl}^*, убывает более медленно, эквивалентно $r^{-1/3}$.

Поведение решения во фронтальных областях можно оценить из (1.12), (1.13) после замены подынтегральных функций при $|\omega|\to\infty$ на асимптотику [8]:

$$w_{kl}(x,t)\sim\text{const}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^{-\nu}e^{-i(c_k^\infty t-r)\omega}\,d\omega \qquad (2.6)$$

$$r\to c_k^\infty t,\ t\to\infty;\ c_k^\infty=c_k(\omega)|_{\omega\to\infty}$$

В (2.6) нас интересует вклад лишь бесконечно удаленной точки. Видно, что в зависимости от значения ν, связанного с гладкостью функции возмущения $\theta(t)$ при $t\to+0$ возможны степенное $|r-c_k^\infty t|^{\nu-1}$, логарифмическое $\ln|r-c_k^\infty t|$, дельтообразное $\delta(|r-c_k^\infty t|)$ поведения решения начально-краевой задачи. Устранить здесь физически неинтерпретируемые разрывы можно, требуя большей гладкости $\theta(t)$ при $t\to+0$, что приведет к увеличению ν и повышению гладкости решения во фронтальной зоне.

Из анализа дисперсионных зависимостей ([1—6] и др.) следует, что фигурирующими в (2.1), (2.6) c_k^*, c_k^∞ могут являться характерные скорости распространения возмущений в сплошных средах — скорости продольных волн или звука, поперечных, волны Стоунли и др.

3. Исследуем решение (1.12), (1.13) для гармонической функции возмущения $\theta(t)=e^{-i\omega_0 t}$, $\omega_0>0$, имеющей образ $T(s)=(s+i\omega)^{-1}$. В этом случае в подынтегральном выражении (1.13) фигурирует простой полюс $\omega=\omega_0$, лежащий на действительной оси и обходящийся контуром интегрирования по малой полуокружности L^+ сверху ($\omega\in L^+$, $\operatorname{Im}\omega>0$). В окрестности ω_0

на основании разложения $\varphi_k(\omega, \beta)$ устанавливается соотношение

$$\operatorname{Im}\varphi_k(\omega, \beta)\sim(c_k^0)^{-1}(r-c_k^0t)\operatorname{Im}(\omega-\omega_0), \quad \omega\in L_+, \; c_k^0=c_k(\omega_0) \tag{3.1}$$

Из (3.1) видно, что при $r>c_k^0t$, $r\to\infty$ экспоненциальная функция в интеграле (1.13) убывает на L^+. В этом случае $w_k(x, t)$ исследованы выше и решение совпадает с (1.1), (2.1), (2.5), где следует положить $T(-i\omega)=i(\omega-\omega_0)^{-1}$. Если $r<c_k^0t$, $r\to\infty$, экспоненциальное убывание под интегралом (1.13) наблюдается на симметричной полуокружности L^- в нижней полуплоскости ($\omega\in L^-$, $\operatorname{Im}\omega<0$). Переход от интегрирования по L^+ к L^- осуществляется с добавлением вычета в простом полюсе ω_0. Оценка интеграла $w_k(x, t)$ на оставшейся части контура, совпадающего с действительной осью, приведена в (2.1), (2.5). Суммируя все вклады, выводим

$$w_k(x, t)=-iB_k(\omega_0)H(c_k^0t-r)\exp ir\eta_k(-i\omega)-\omega_0t+R \tag{3.2}$$

$$t\to\infty,\ t/r=\text{const},\ a/r\ll1,\ R=O(t^{-\mu}),\ {}^1/_3\leqslant\mu\leqslant1$$

где $H(x)$ — функция Хэвисайда.

Таким образом, для гармонических колебаний, начинающихся с момента $t=0$, решение описывается формулами (1.12), (3.2). В последних, если учитывать затухающие составляющие, остаток R следует заменить на вклад (2.1) либо (2.5). В этом случае структурно решение (1.12) представляет собой суперпозицию прогрессивных волн (3.2) с постоянными амплитудами. Передний фронт каждой из них распространяется со своей скоростью c_k^0. На этот основной волновой процесс накладываются неустановившиеся затухающие возмущения, исследование и качественное описание которых выполнено в предыдущих параграфах.

При $t\to\infty$ соотношения (1.12), (3.2) дают решение смешанной задачи о монохроматических колебаниях в установившемся случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
2. *Митра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 327 с.
3. *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Иностр. лит., 1962. 279 с.
4. *Бабешко В. А., Зинченко Ж. Ф., Смирнова А. В.* К задаче о набегании волн нормального давления на штамп // ПМТФ. 1982. № 2. С. 143–146.
5. *Поручиков В. Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
6. *Сеймов В. М.* Динамические контактные задачи. Киев: Наук. думка, 1976. 284 с.
7. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 268 с.
8. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. Т. 1. М.: Мир, 1978. 547 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
12.IX.1990