МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1990

УДК 539.3

В. А. БУРЯЧЕНКО, В. З. ПАРТОН

ЭФФЕКТИВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ СТАТИСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ МАТРИЧНЫХ КОМПОЗИТОВ

В работе [1] указывалось на необходимость учета реальной структуры композитного материала в задачах микромеханики и возможную неправомерность исходного допущения подавляющего числа работ о статистической однородности композитной среды, в частности инвариантность функции распределения включений относительно трансляций [2, 3]. Например в случае технологических несовершенств смешения, концентрация включений может быть функцией координат. Рост повреждаемости также происходит локализованно в области концентрации напряжений, например, в вершине макротрещины [4]. Наконец в армированных пластиках положение центров волокон в пределах периодических слоев случайно и уравнения микромеханики являются уравнениями с почти периодическими коэффициентами [5]. В частных случаях отмеченных задач возможно применение метода возмущения для слабо неоднородных материалов [3] и статистическое моделирование [6] с последующим решением серии детерминированных задач. В работе дано обобщение метода эффективного поля (МЭП) [7, 8] для статистически неоднородных матричных композитов с произвольным отличием в модулях компонентов.

1. Общие соотношения. Рассматривается макрообласть w с характеристической функцией W, содержащая статистически неоднородное множество $X=(V_k,\ x_k,\ \omega_k)$ эллипсоидов v_k с характеристическими функциями V_k, центрами x_k, полуосями a_k^i $(a_k^1\geqslant a_k^2\geqslant a_k^3)$, совокупностью Эйлеровых углов ω_k и тензорами модулей упругости $L(x)\equiv L_0+L_1(x)=L_0+L_1^{(k)}$, где $x\in v_k$ и L_0 — однородный модуль упругости матрицы. Подставляя локальное уравнение состояния $\sigma(x)=L(x)\varepsilon(x)$ в уравнение равновесия $\nabla\sigma=0$, где ∇ — оператор симметрированного градиента, получим дифференциальное уравнение относительно смещений u, $\varepsilon=\nabla u$. Сводя последнее уравнение к интегральному и преобразовывая его по предложенной ранее схеме [7], получим

$$\varepsilon(x)=\langle\varepsilon\rangle(x)+\int U(x-y)\,[L_1(y)\varepsilon(y)-\langle L_1\varepsilon\rangle(y)]dy \tag{1.1}$$

$$\sigma(x)=\langle\sigma\rangle(x)+\int\Gamma(x-y)[M_1(y)\sigma(y)-\langle M_1\sigma\rangle(y)]dy \tag{1.2}$$

где $U=\nabla\nabla G$ — тензор Грина уравнения Ламе для однородной среды с модулем L_0; $\Gamma(x-y)=(I\delta(x-y)+U(x-y)L_0)$, δ — дельта функция, $M_1(y)\equiv\equiv M(y)-M^{(0)}$, $M^{(0)}=L_0^{-1}$, $M(y)=M^{(k)}-L^{-1}(y)$ при $y\in v_k$; граничные условия задавались в смещениях $\varepsilon(x)=\varepsilon_0 x$, $\varepsilon_0=\mathrm{const}$, $x\in w$. В (1.1) и ниже $\langle\cdot\rangle(x)$, $\langle\cdot|x_1,\ldots,x_n;\ x_{n+1},\ldots,x_m\rangle(x)$ обозначают среднее и условное среднее по ансамблю статистически неоднородного поля X при условии, что в точках $x_1,\ldots,x_m$ находятся включения и $x_1,\ldots,x_n\neq x_{n+1},\ldots,x_m$; $\langle\cdot\rangle_k$ — среднее по объему эллипсоида v_k. Уравнения (1.1) имеют место в области w, содержащей статистически большое число включений, за исключением погранслоя с характерным размером, пропорциональным a^1.

Для статистически однородных композитов уравнение (1.2) эквивалентно полученному в [7] и отличается от используемого в [9]:

$$\sigma(x)=\langle\sigma\rangle+\int\Gamma(x-y)M_1(y)\sigma(y)dy \tag{1.3}$$

наличием члена $\langle M_1\sigma\rangle$ под знаком интеграла. Соотношение (1.3), верное только для конечного числа включений, приводит к корректным результатам лишь при дополнительном допущении

$$\int \Gamma(x-y)dy=0 \tag{1.4}$$

которое равносильно введению в теорию обобщенных функций на физическом уровне строгости новой операции — действия однородной обобщенной функции $\Gamma(x)$ степени (-3) на постоянную. Допущение (1.4), приводящее к незначительному формальному упрощению уравнений при исследовании статистически однородных композитов, оказывается бесперспективным при анализе статистически неоднородных сред; когда возникает необходимость определения свертки $\Gamma(x)$ с, вообще говоря, произвольной кусочно непрерывной функцией $\langle M_1\sigma\rangle(x)$. Указанного затруднения можно легко избежать, если использовать вместо (1.3) соотношения (1.1), (1.2).

Локальный эффективный модуль $L^*(x)$ (в отличие от глобального [7]) в уравнении $\langle\sigma\rangle(x)=L^*(x)\langle\varepsilon\rangle(x)$ найдем из осреднения по ансамблю локального уравнения состояния

$$L^*(x)=L_0+A^*,\quad \langle L_1\varepsilon\rangle(x)\equiv A^*\langle\varepsilon\rangle(x) \tag{1.5}$$

Для оценки среднего $\langle L_1\varepsilon\rangle(x)$ введем $\varphi(v_m|x_1,\dots x_n)$ — условные плотности распределения m-го включения в области v_m при фиксированных включениях $v_1,\dots v_n$ в центрах $x_1,\dots x_n$. В общем случае $\varphi(v_m|x_1,\dots,x_n)\neq\varphi(v_m|x_1+x,\dots,x_n+x)$ и $\varphi(v_m|x_1,\dots,x_n)=0$ при $x_m\in \overset{\circ}{v}_{m1,\dots,n}\equiv U v_j^\circ$ (объединение по $j=1,\dots,n$), где области $v_j^\circ\supset v_j$ имеют характеристические функции V_j°; $\varphi(v_m|x_1,\dots,x_n)\to\varphi(v_m)$ при $|x_i-x_m|\to\infty$, $i=1,\dots,n$. Усредним (1.1) на множествах $X(\cdot|v_1)$, $X(\cdot|v_1,v_2)\dots$ при фиксированных включениях v_1; v_1, v_n; $\dots$ с помощью различных плотностей распределения $\varphi(v_m|x_1,\dots,x_n)$:

$$\varepsilon(x)-\sum_{j=1}^{n}\int U(x-y)\langle V_j(y)L_1(y)\varepsilon(y)\,|x_1,\dots,x_n\rangle(y)dy=\langle\varepsilon\rangle(x)+$$
$$+\int U(x-y)[\langle L_1(y)\varepsilon(y)\,|y;x_1,\dots,x_n\rangle(y)-\langle L_1\varepsilon\rangle(y)]dy \tag{1.6}$$

где $n=1,2,\dots$ и в каждой n-й строке системы (1.6) x может пробегать значения во включениях $v_1,\dots,v_n$, т. е. n-я строка (1.6) содержит n уравнений. Обозначим правую часть (1.6) через $\varepsilon^\wedge(x)_{1,\dots,n}$ и определим

$$\varepsilon_i^-(x)=\varepsilon^\wedge(x)_{1,\dots,n}+\sum_{j\neq i}\int U(x-y)\langle V_j(y)L_1(y)\varepsilon(y)\,|x_1,\dots,x_n\rangle(y)dy \tag{1.7}$$

т. е. введены в рассмотрение эффективные поля $\varepsilon^\wedge(x)_{1,\dots,n}$ и $\varepsilon_i^-(x)$ $(i=1,\dots,n)$ в которых находятся n включений и i-е включение соответственно.

2. Эффективное поле. Для замыкания и последующего приближенного решения (1.6) примем гипотезы МЭП: H_1). Каждое включение v_i имеет эллипсоидальную форму и точечное приближение размеров при анализе полей деформаций вне рассматриваемого включения, и находится в однородном поле $\varepsilon_i^-(x)$ H_2). При достаточно большом n имеет место замыкание $\varepsilon^\wedge(x)_{1,\dots,j,\dots,n+1}=\varepsilon^\wedge(x)_{1,\dots,n}$, где правая часть равенства не содержит некоторый индекс $j\neq i$, $1\leqslant j\leqslant n$ и $x\in v_i$.

Из (1.6) и гипотезы H_1) найдем однородный тензор деформаций внутри эллипсоидального включения v_i [1—3]:

$$\varepsilon(x)=A_i\langle\varepsilon_i^-(x)\rangle,\quad A_i=(I+P_iL_1^{(i)})^{-1},\quad P_i=-\int U(x-y)V_i(y)dy \tag{2.1}$$

Под точечным приближением размеров включения гипотезы H_1) будем понимать выполнение равенства

$$\int U(x-y)V_i(y)L_1(y)\varepsilon(y)\,dy=\langle U(x-y)\rangle_i\langle L_1(y)\varepsilon(y)\rangle_i v_i^- \tag{2.2}$$

при $x\notin v_i$, $v_i^-\equiv\mathrm{mes}\,v_i$, $\langle f(x-y)\rangle_i\equiv(v_i^-)^{-1}\int f(x-y)V_i(y)\,dy$.

3. Оценка взаимодействия конечного числа включений. При допущениях гипотезы H_1) система (1.6) при фиксированных значениях $\langle\varepsilon^\wedge(x)_{1,\ldots n}\rangle_i$ $(x\in v_i)$ правых частей становится алгебраической и с помощью (2.1), (2.2) найдем (суммирование по $j=1,\ldots,n$; $j\neq i$):

$$\langle\varepsilon^-(x_i)\,|\,x_1,\ldots x_n\rangle-\Sigma S(x_i-x_j)R_j\langle\varepsilon^-(x_j)\,|\,x_1,\ldots x_n\rangle=\langle\varepsilon^\wedge(x_i)_{1,\ldots n}\rangle \tag{3.1}$$

где $R_j=L_1^{(i)}A_iv_i^-$, $S(x_i-x_j)=(v_i^-v_j^-)^{-1}\iint U(x-y)V_i(x)V_j(y)\,dxdy$. Система (3.1) является алгебраической относительно $\langle\varepsilon^-(x_i)\,|\,x_1,\ldots x_n\rangle$ и имеет решение (суммирование по $j=1,\ldots,n$):

$$R_i\langle\varepsilon^-(x_i)\,|\,x_1,\ldots x_n\rangle=\Sigma Z_{ij}R_j\langle\varepsilon^\wedge(x_j)_{1,\ldots,n}\rangle \tag{3.2}$$

где матрица Z имеет обратную Z^{-1} с элементами Z_{mk}^{-1} $(m,k=1,\ldots,n)$ в виде подматриц

$$Z_{mk}^{-1}=I\delta_{mk}-(1-\delta_{mk})S(x_m-x_k)R_k \tag{3.3}$$

Для бесконечно удаленных включений можно принять [7]:

$$Z_{mk}^{-1}=I\delta_{mk}-(1-\delta_{mk})U(x_m-x_k)R_k \tag{3.4}$$

Решение (3.2) может быть построено также методом последовательных приближений [7], тогда с учетом первых двух итераций

$$Z_{ij}=I\delta_{ij}+(1-\delta_{ij})S(x_i-x_j)R_j \tag{3.5}$$

Различные примеры построения матрицы Z с оценкой погрешности метода рассмотрены в [7, 10, 11].

4. Оценка эффективных параметров. Проводя условное усреднение (1.6) по ансамблям $X(\cdot|v_1)$, $X(\cdot|v_1,v_2),\ldots$ в рамках гипотез H_1), H_2) МЭП с помощью соотношений (2.1), (2.2), (3.2), получим замкнутую систему интегральных уравнений относительно $\langle\varepsilon^\wedge(x)_{1,\ldots,j}\rangle_i$ $(j=1,\ldots,n,\ i=1,\ldots$ $\ldots,j$, суммирование по $l=1,\ldots,j+1)$:

$$\begin{gathered}\langle\varepsilon^\wedge(x_i)_{1,\ldots,j}\rangle=\langle\varepsilon\rangle(x)+\int S(x_i-x_q)\{\varphi(v_q|x_1,\ldots,x_j)\Sigma Z_{ql}R_l\langle\varepsilon^\wedge(x_l)_{1,\ldots,j+1}\rangle-\\ -\langle U(x_i-x_q)\rangle_i\langle R\varepsilon_1^\wedge\rangle(x_q)\}dx_q;\quad\langle\varepsilon^\wedge(x_i)_{1,\ldots,n}\rangle=\\ =\langle\varepsilon\rangle+\int S(x_i-x_q)\{\varphi(v_q|x_1,\ldots,x_{n-1})\Sigma Z_{ql}\langle\varepsilon^\wedge(x_l)_{1,\ldots,n}\rangle-\\ -\langle U(x_i-x_q)\rangle_i\langle R\varepsilon_1^\wedge\rangle(x_q)\}dx_q\end{gathered} \tag{4.1}$$

В правой части последнего уравнения тензор $\varepsilon^\wedge(x)_{1,\ldots,n}$ и образован из тензора $\varepsilon^\wedge(x)_{1,\ldots,n}$ левой части заменой одного из индексов на q. Значение $\langle\varepsilon^\wedge(x_i)_{1,\ldots,n}\rangle$ $(i=1,\ldots,n)$ оцениваем из последней строки (4.1) методом последовательных приближений при всех возможных включениях $v_1,\ldots,v_n$. Найденное значение $\langle\varepsilon^\wedge(x_i)_{1,\ldots,n}\rangle$ подставляем в правую часть $(n-1)$ строки (4.1), определяем $\langle\varepsilon^\wedge(x_i)_{1,\ldots,n-1}\rangle$ $(i=1,\ldots,n-1)$ и так далее.

В частности, для $n=2$, N компонент включений и допущении

$$\langle\varepsilon^\wedge(x_i)_{12}\rangle=\langle\varepsilon^-(x_i)\rangle=\mathrm{const} \tag{4.2}$$

система (4.1) преобразовывается к виду

$$\begin{gathered}\langle\varepsilon^-(x_i)\rangle=\langle\varepsilon\rangle(x_i)+\sum_{q\neq i}^{N}\int S(x_i-x_q)Z_{qi}R_i\langle\varepsilon^-(x_i)\rangle\varphi(v_q|x_q;x_i)+\\ +\sum_{q=1}^{N}\int\{S(x_i-x_q)Z_{qq}\varphi(v_q|x_q;x_i)-\langle U(x_i-x_q)\rangle_i\}R_q\langle\varepsilon^-(x_q)\rangle dx_q\end{gathered} \tag{4.3}$$

Система (4.3) для статистически неоднородных сред также является системой интегральных уравнений, но при аппроксимации матрицы соотношением (3.5), (4.3) становится алгебраической системой (суммирование по $m=1,\ldots,N$):

$$\sum Y_{km}{}^{-1}R_m\langle\varepsilon^-(x_m)\rangle=R_k\langle\varepsilon\rangle(x) \tag{4.4}$$

где подматрицы $Y_{km}{}^{-1}$ матрицы $Y^{-1}=(Y^{-1})_{km}$ $(k,\ m=1,\ldots,N)$ равны

$$(Y^{-1})_{km}(x)=\delta_{km}\Big(I-R_k\sum_{q\neq m}^{N}\int S(x_k-x_q)R_qS(x_q-x_k)\varphi(v_q|x_q;\ x_q)\,dx_q\Big)-$$
$$-R_kP(v_{km}{}^{\circ})\langle\varphi(v_m|x_m)\rangle(x) \tag{4.5}$$

В (4.4) пренебрегли нелокальными эффектами и приняли, что вне области $v_{km}{}^{\circ}$ $\varphi(v_m|x_m;\ x_q)=\varphi(v_m|x_m)$. Из (1.5), (2.1) и (4.4) определим локальный эффективный модуль

$$L^*(x)=L_0+\sum_{i=1}^{N}R_in_iD_i(x),\quad D_i(x)=R_i^{-1}\sum_{j=1}^{N}Y_{ij}R_j \tag{4.6}$$

Средние напряжения внутри включений $\langle\sigma(x_i)\rangle_i$ и в матрице $\langle\sigma\rangle_0(x)$ найдем из соотношений $\langle\sigma(x_i)\rangle_i=L(x_i)A_iD_i(x_i)M^*(x_i)\langle\sigma\rangle(x)$, $\langle\sigma\rangle_0(x)=(1-\langle V\rangle(x))^{-1}(\langle\sigma\rangle(x)-\langle\sigma(x)V(x)\rangle(x))$, где $M^*(x)=(L^*(x))^{-1}$. Для статистически однородных композитов ранее [8] получено точное выражение для среднего по компоненту α $(\alpha=0,\ 1,\ldots)$ одноточечного второго момента поля напряжений

$$\langle\sigma_{ij}\sigma_{kl}\rangle_\alpha(x)=(v_\alpha{}^-)^{-1}\partial M^*_{mnpq}(x)/\partial M^{(\alpha)}_{ijkl}\langle\sigma_{mn}\rangle(x)\langle\sigma_{pq}\rangle(x) \tag{4.7}$$

Используя обобщение условия Хилла на статистически неоднородные композиты [12], можно показать, что равенство (4.7) имеет место и в этом случае.

Соотношение (4.6) лишь внешне эквивалентно аналогичному выражению для глобального модуля L^*, полученного в [7], из которой следуют результаты [9] и более поздней [10] (См. также *Канаун С. К., Кудрявцева Л. Т.* Согласованные схемы осреднения в механике матричных композитов: Препринт № 17. ЛФИМаш, 1989). Отличие состоит в зависимости $L^*(x)$ от параметров распределения включений не только в самой точке x, но и в некоторой ее окрестности; диаметр этой области согласно проведенным оценкам в пять раз превышает характерный размер включений. Тем самым микронеоднородная среда ведет себя как макроскопически неоднородная с эффективным модулем $L^*(x)$, определяемым нелокальным распределением включений. Соотношения (1.5), (4.6) позволяют найти для заданных граничных условий распределение $\langle\sigma\rangle(x)$, $\langle\varepsilon\rangle(x)$ в макрообласти w, а с помощью (4.4), (2.1) — средние поля деформаций внутри включений.

Частным случаем статистически неоднородного поля включений является представление его в виде стационарного, периодического в широком смысле, случайного процесса. Уравнение (1.1) будет уравнением с почти периодическими функциями [5] и осредненные по ансамблю полевые и материальные тензоры становятся периодическими детерминированными тензорами. Поскольку $\varphi(v_k|x_k)$, $\varphi(v_q|x_q;\ x_k)$ периодически функции x_k, x_q, то из (4.4), (4.5) следует, что локальный эффективный модуль $L^*(x)$ будет детерминированной периодической функцией координат; при этом в случае, если характерный размер включений соизмерим с размером ячейки периодичности, то область интегрирования в (4.5) содержит несколько соседних ячеек. Тем самым последующая оценка $\langle\varepsilon\rangle(x)$ может быть проведена стандартными методами анализа регулярных структур.

5. Примеры. Проанализируем соотношения (4.4), (4.5) на модельном примере. Пусть $\varphi(v_q|x_q)=\mathrm{const}$ при $x\in v^w$ и $\varphi(v_q|x_q)=0$ при $x\notin v^w$ $(q=1,\ 2,\ldots)$, т. е. рассмотрим конечное эллипсоидальное облако включений v^w с полуосями $a_w{}^i$ с однородным

Таблица 1

h	[16]	$n=\infty$ [11]	$n=\infty$ [9]	$n=3$	$n=2$
2	1,13	1,13	1,11	1,12	1,12
1,5	1,29	1,29	1,22	1,26	1,26
1,25	1,56	1,57	1,35	1,52	1,47
1,1	2,21	2,27	1,50	2,20	1,86
1,05	3,00	3,19	1,58	3,44	2,21
1,025	4,13	4,67	1,68	7,80	2,57

Таблица 2

h	$k_1'(-0{,}5)$ [17]	$k_1'(+0{,}5)$ [17]	$k_1'(-0{,}5)$	$k_1'(+0{,}5)$
1,3	0,776	0,882	0,773	0,873
1,2	0,705	0,857	0,703	0,833
1,1	0,578	0,813	0,554	0,748

распределением включений внутри облака. При $a_w^3 \gg a_q^1$ локальный эффективный модуль облака (4.6) совпадает с эффективным модулем L^* соответствующей статистически однородной композитной среды за исключением некоторого погранслоя (суммирование по $i=1, 2, 3$) $\Sigma(x_i/a_w^i)^2 \approx 1$. Тогда средние деформации внутри облака определяются соотношением (2.1) $\langle\varepsilon\rangle(x)=A(v^w)\varepsilon_0$, где при определении тензора $A(v^w)$ по формулам (2.1) нужно вместо L_1 использовать L^*-L_0. Тогда из (4.4) найдем среднее значение тензора поляризации $\tau \equiv L_1^{(i)}\varepsilon$ на включении v_i внутри облака (суммирование по $j=1,\ldots,N$) $R_i\langle\varepsilon^-(x_i)\rangle=\Sigma Y_{iq}R_qA(v^w)\varepsilon_0$, что отличается от выражения для среднего значения тензора поляризации на включениях статистически однородной композитной среды [7] в конечное число раз $A(v^w)L_0^{-1}L^* \neq I$, причем это отличие зависит от формы, но не размеров, облака v^w. В частности, для несжимаемой матрицы и шарового облака v^w с однородным распределением жестких шаровых включений одного размера при допущениях и обозначениях работы [7] найдем компоненты изотропного тензора $A(v^w)L_0^{-1}L^* = (1{,}1+2c(1-23c/16)^{-1})$, $c \equiv \langle V\rangle$. Таким образом, использование так же сколь угодно большого, но конечного числа включений для оценки среднего концентратора напряжений на включениях, в общем случае неправомощно. Но согласно (4.6) конечное число включений может быть использовано для оценки локального эффективного модуля $L^*(x)$, который в глубине достаточно большого облака включений будет равен эффективному модулю статистически однородной композитной среды в классическом понимании [1–3].

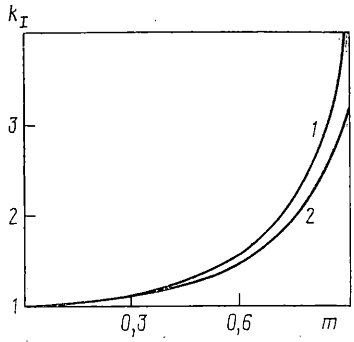
Проведем оценку погрешностей, связанных с использованием гипотез H_1, H_2 на примере плоской задачи для системы прямолинейных разрезов (трещин) единичной длины, случайная реализация которых расположена на прямой $l(y=0)$ в узлах регулярной решетки $\varphi(v_k|x_k)=\delta(kh+\xi)$, $k=\ldots,-1, 0, 1,\ldots$, $h>1$, случайная величина ξ равномерно распределена на $[0, h]$. Внешнее поле ε_0 представляет собой одноосное растяжение в направлении нормали $n \perp l$ и имеет вид $\varepsilon_0^{\alpha\beta}=\varepsilon_0^\circ n^\alpha n^\beta$, ε° – скаляр; $\alpha, \beta=1, 2$. Тогда состояние каждого дефекта определяется полем ε^- и $\varepsilon^{-\alpha\beta}n_\beta=\varepsilon_0^{-\circ}n^\alpha$, где $\varepsilon_0^{-\circ}$ – скаляр. Необходимо оценить относительное изменение коэффициента интенсивности напряжений (КИН) $k_I \equiv K_I/K_I^\circ \sim h$, где K_I° – КИН для изолированной трещины в неограниченной плоскости. Примем приближенную оценку $k_I=\varepsilon_0^{-\circ}/\varepsilon_0^\circ$; более точное выражение для k_I может быть построено с учетом того, что поле $\varepsilon_0^{-\circ}$ в окрестности рассматриваемого дефекта неоднородно и равно суперпозиции полей, индуцированных окружающими разрезами [11]. В таблице [1] приведено сравнение точного решения $k_I^T=2\sin(\pi h/2)(\pi \sin(\pi/h)/h)^{-1/2}$ [16] с различными приближенными оценками.

Оценку коэффициента взаимодействия дефектов Λ_{ij} в матрицах Z (3.2) и Z^{-1}: $(Z_{ij}^{-1})^{\alpha\beta}=(\delta_{ij}-(1-\delta_{ij})\Lambda_{ij})n^\alpha n^\beta$; α, $\beta=1, 2$ проведем по соотношениям (3.3) и (3.4) соответственно

$$\Lambda_{ij}=-1+[(|i-j|h+1)^{1/2}-(|i-j|h-1)^{1/2}](|i-j|h)^{-1/2} \quad (5.1)$$

$$\Lambda_{ij}=(|i-j|h)^{-2}/2 \quad (5.2)$$

Уравнение (5.1) получено в предположении однородности эффективного поля $\varepsilon_0^{-\circ}$ в окрестности дефекта (гипотеза H_1), формула (5.1) для бесконечно удаленных дефектов переходит в (5.2) (такое приближение использовалось в работе [9]). Для бесконечной системы регулярно расположенных трещин ($n=\infty$) из уравнения (3.2) определим значения $k_I=(1-2\Sigma\Lambda_{0i})^{-1}$, ($i=1,\ldots,\infty$), приведенные в столбцах 3 и 4 таблицы 1 для соотношений (5.1) и (5.2) соответственно. Из таблицы видно, что применение гипотезы H_1 обеспечивает достаточно высокую точность решения; использование в оценке коэффициента взаимодействия предположения о бесконечной удаленности дефектов (5.2), что делалось в работе [9], приводит к значительным погрешностям. Приведенные расчеты являются лишь оценкой точности приближения коэффициента взаимодействия различными способами и не могут служить оценкой погрешности одночастичного варианта МЭП [9] в силу использования в нем гипотезы «квазикристаллического» приближения $Z_{ij}=I\delta_{ij}$. Перейдем к обоснованию правомерности принятия гипотезы H_2. Проведя усреднение по случайному ансамблю реализаций дефектов получим, что член $\langle R\varepsilon_1{}^{\wedge}\rangle$ в системе (4.1) исчезнет. Рассчитанные по уравнениям (4.1), (5.1) значения концентратора напряжений k_I для трех ($n=3$) и двух ($n=2$) частичным приближениям МЭП, приведены в таблице в 5 и 6 столбцах. Эти оценки следует сравнить с данными третьего столбца таблицы ($n=\infty$, [11]), поскольку при их получении использовался приближенный коэффициент взаимодействия (5.1). Погрешность приближения убывает с увеличением h и числа учитываемых взаимодействующих дефектов и, например, при $n=3$, $h=2$, 1, 0,5 равна 7,5%. Таким образом погрешность, обусловленная конечным числом учитываемых взаимодействующих включений существенно меньше погрешности, связанной с учетом взаимодействия бесконечного числа включений по формуле (5.2).



Рассмотрим полубесконечную регулярную решетку трещин на прямой l ($y=0$): $\varphi(v_k|x_k)=\delta(kh+\xi)$, $k=0, 1,\ldots, h>1$, случайная величина ξ равномерно распределена на $[0, h]$. В этом случае поле $\varepsilon_0{}^{-\circ}(x_k)$ будет функцией координаты узла x_k. Найдем постоянные значения эффективных полей $\varepsilon_0{}^{-\circ}(x_k)$ ($k=1, 2,\ldots$) с помощью трехчастичного приближения МЭП. Поле $\varepsilon_0{}^{-\circ}(x)$, $-0{,}5<x<0{,}5$ на крайней левой трещине определим как суперпозицию полей $\varepsilon_0{}^{\circ}$ и $\varepsilon_0{}^{-\circ}(x_k)$ по схеме [11]. Тогда можно определить относительное изменение КИН $k_I'(\pm0{,}5)=K_I(\pm0{,}5)/K_I{}^{\infty}$, где $K_I{}^{\infty}$ – рассчитанное значение КИН для бесконечной регулярной решетки трещины. В таблице 2 во 2 и 3 столбцах приведены точные значения $k_I'(-0{,}5)$ и $k_I'(0{,}5)$, полученные в [17] методом теории функций комплексного переменного; видно удовлетворительное совпадение с приведенными в 4 и 5 столбцах значениями $k_I'(-0{,}5)$ и $k_I'(+0{,}5)$, рассчитанных по формулам (4.1), (5.1) МЭП.

В качестве примера статистически неоднородного поля включений рассмотрим аналогичную плоскую задачу для полубесконечного случайного поля коллинеарных трещин единичной длины, расположенных на полупрямой $l(y=0, x\geqslant0)$: $\varphi(v_k|x_k)=$ $=H(x_k)\cdot m$, m – счетная концентрация дефектов на полупрямой, H – функция Хевисайда. Тогда эффективное поле, в котором находится исследуемое включение, будет функцией координат $\varepsilon_0{}^{-\circ}=\varepsilon_0{}^{-\circ}(x)$. На фиг. представлены зависимости коэффициента концентратора k_I от m, рассчитанные по трехчастичному приближению МЭП с использованием формул (4.1), (5.1) для $x=\infty$ и $x=0$ (кривые *1* и *2* соответственно). Изменение k_I при приближении к границе множества дефектов $x=0$ согласуется с результатами аналитического решения задачи о полубесконечном регулярном множестве коллинеарных трещин на полупрямой [17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mechanics of composites./Eds. by *I. F. Obraztsov, V. V. Vasil'ev.* M.: Mir, 1982. 280 p.
2. *Mura T.* Micromechanics of defects in solid. Martinus Nijhoff Publ.: Dorderecht, 1987. 587 p.
3. *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
4. *Кауш Г.* Разрушение полимеров. М.: Мир, 1981. 440 с.
5. *Козлов С. М.* Осреднение дифференциальных операторов с почти периодическими быстро осциллирующими коэффициентами // Мат. сб. 1978. Т. 107. № 2. С. 199–217.
6. *Ромалис Н. Б., Тамуж В. П.* Взаимодействие дисковидной макротрещины с полем распределенных микротрещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 5. С. 79–88.
7. *Буряченко В. А.* Корреляционная функция полей напряжений в матричных композитах // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 69–76.
8. *Партон В. З., Буряченко В. А.* Флуктуации напряжений в упругих композитах // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. № 5. С. 1075–1078.
9. *Канаун С. К.* Метод эффективного поля в линейных задачах статики композитной среды // ПММ. 1982. Т. 4. Вып. 4. С. 655–665.
10. *Berveiller M., Fassi-Fenry O., Hihi A.* The problem of two plastic and heterogeneous inclusions in an anisotropic medium // Intern. J. Eng. Sci. 1987. V. 25. № 6. P. 691–709.
11. *Kachanov M.* Elastic solids with many cracks: a simple method of analysis // Intern. J. Solid Struct. 1987. V. 23. № 1. P. 23–43.
12. *Kreher W.* Internal stresses and relations between effective thermoelastic properties of stochastic solids-some exect solutions // Z. Angew. Math. Mech. 1988. V. 68. № 3. P. 147–154.
13. *Tada H., Paris P. C., Irwin G. R.* The stress analysis of cracks handbook. Hellertown. Del Research Corp.: Pensylvania, 1973. 403 p.
14. *Rubinstein A.* Semi-infinite array of cracks in a uniform stress field // Eng. Fracture Mech. 1987. V. 26. № 1. P. 15–21.

Москва

Поступила в редакцию
5.I.1990