

**ИЗГИБ МНОГОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ
С ЦЕНТРАЛЬНЫМ КРУГЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ
И ДВУМЯ ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ РАЗРЕЗАМИ РАЗЛИЧНОЙ ДЛИНЫ**

В работе рассматривается упругое равновесие однородной изотропной пластинки, находящейся под действием различных нагрузок. Толщина пластинки постоянна и равна h . Срединная плоскость пластинки представляет собой двухсвязную область S , ограниченную снаружи правильным многоугольником L_2 , а изнутри — окружностью радиуса r с двумя прямолинейными разрезами различной длины L_1 (фигура).

Решение задачи для двухсвязной области можно осуществить отображением на концентрическое кольцо, но построение такого отображения в общем случае затруднено. Поэтому предлагается иной способ, когда требуется построение отображения для внешности внутреннего контура и внешности наружного контура.

Как известно, упругое равновесие однородной изотропной пластинки сводится, вообще говоря, к определению области S , соответствующей сечению пластинки двух аналитических функций $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$, удовлетворяющих краевым условиям [1, 8, 9]:

$$\kappa\varphi_1(t) + t\varphi_1'(t) + \psi_1(t) = f_{1j}^{(0)} + if_{2j}^{(0)} \quad (1)$$

Нагружение пластинки осуществляется поперечной распределенной нагрузкой q и краевыми моментами и изгибающими усилиями $p(S)$. Будем считать построение частного решения уравнения $\Delta\Delta w = q/D$ осуществленным, обозначим его w_1 .

Правая часть равенства (1) в общем случае нагружения пластинки имеет вид

$$f_{1j}^{(0)} + if_{2j}^{(0)} = \frac{1}{D(1-\nu)} \int_0^s m(s) dz + \frac{1}{D(1-\nu)} \int_0^s \left[i \int_0^s p(s) ds \right] dz -$$

$$- 2 \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{8}{1-\nu} \left[z \int_0^s \frac{\partial^3 w_1}{\partial \bar{z} \partial z^2} dz - \int_0^s z \frac{\partial^3 w_1}{\partial \bar{z} \partial z^2} dz \right] + iC_1 z + C_2 - A_1' z (1 + \kappa \ln z + \ln \bar{z}) -$$

$$- B_1' (\kappa \ln z + \ln \bar{z}) - B_1' z / \bar{z} \quad \text{на } L_j \quad (2)$$

$$A_1' = \frac{P - P'}{8\pi D}, \quad B_1' = \frac{M - M'}{8\pi i D}, \quad \kappa = -\frac{3 + \nu}{1 - \nu}$$

$$D = \frac{1}{12} E h^3 (1 - \nu^2) \quad (3)$$

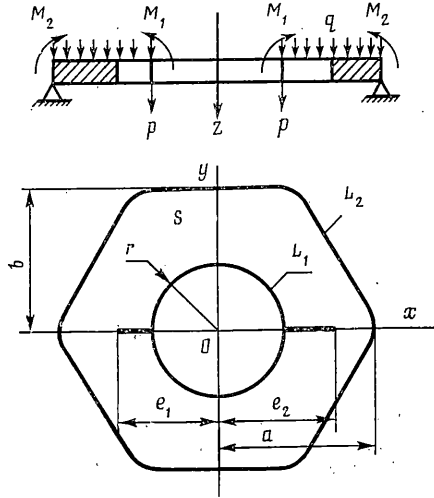
где D — цилиндрическая жесткость, ν — коэффициент Пуассона, P — главный вектор нагрузок, приложенных к границе L_j , P' — главный вектор распределенной нагрузки $q(x, y)$, которая могла быть приложена к области S' (отверстия), ограниченной кривой L_1 , если бы не было сделано выреза. Причем

$$P' = -8iD \int_{L_1} \frac{\partial^3 w_1}{\partial \bar{z} \partial z^2} dz = \iint_{S_1} q(x, y) dx dy \quad (4)$$

Здесь M — главный момент нагрузок, приложенных к границе L_1 , M' — главный момент распределенной нагрузки $q(x, y)$ относительно осей x и y , который имел бы место в том случае, когда указанная нагрузка была бы приложена к области S' , ограниченной кривой L_1 , если бы вырез отсутствовал. Причем

$$M' = -8D \int_{L_1} z \frac{\partial^3 w_1}{\partial \bar{z} \partial z^2} dz = \iint_{S'} q(x, y) (y - ix) dx dy$$

Здесь $m_j(s)$ — изгибающие моменты, действующие по контуру L_j (или по дуге контура), $p(s)$ — изгибающие усилия, действующие по контуру L_j ; C_1 и C_2 — вещественная и комплексная постоянные соответственно. В случае многосвязной области



на различных контурах они принимают различные значения. Постоянная C_1 выбирается таким образом, чтобы удовлетворялось условие однозначности прогиба, т. е. при обходе по любому замкнутому контуру L' , окружающему отверстие, величина w , являясь однозначной функцией не должна получать приращений.

Следуя [1, 9], постоянную C_2 можно принять равной нулю, а C_1 — определяется в дальнейшем.

Функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$, регулярные в области S занятой пластинки, ищем в виде двух функций, одна из которых регулярна вне внутреннего контура, другая — внутри наружного [5, 6, 10]:

$$\begin{aligned}\varphi_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{r}{z}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \left(\frac{z}{A}\right)^k \\ \psi_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} h_k \left(\frac{r}{z}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(\frac{z}{A}\right)^k \\ \alpha_k &= \sum_{n=k-2E(\frac{1}{2}k)}^k a_n l_{1/2}^{(k)}(k-n), \quad \beta_k = \sum_{n=k}^{\infty} b_n \delta_{(n-k)/N}^{**} \\ l_n^{(k)} + \frac{1}{\varepsilon_0^{(k)}} \sum_{n_1=1}^n l_{n-n_1}^{(k)} \varepsilon_{n_1}^{(k)} &= 0 \\ h_k &= \sum_{n=k-2E(\frac{1}{2}k)}^k A_n l_{1/2}^{(k)}(k-n), \quad \lambda_k = \sum_{n=k}^{\infty} B_n \delta_{(n-k)/N}^{**}\end{aligned}\tag{5}$$

Коэффициенты a_n, b_n, A_n, B_n считаются вещественными (в силу геометрической и силовой симметрий).

Подставляя (5) в (1), граничные условия на контурах L_j приводятся в виде

$$\begin{aligned}\kappa \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{r}{t}\right)^k + \chi \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \left(\frac{t}{A}\right)^k + t \left[- \sum_{k=1}^{\infty} k \alpha_k \frac{r^{(k)}}{(t)^{k+1}} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} k \beta_k \frac{(t)^{k-1}}{A^k} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} h_k \left(\frac{r}{t}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(\frac{t}{A}\right)^k = \\ = f_{1j}^{(0)} + i f_{2j}^{(0)} \quad \text{на } L_j \quad (j=1, 2)\end{aligned}\tag{6}$$

Внешность наружного контура L_2 (правильного многоугольника) отображается на внешность единичной окружности в плоскости ζ_2 функцией [6, 10]:

$$z = A \left(\zeta_2 + \frac{m}{\zeta_2^{N-1}} \right), \quad A = \frac{a+b}{2}, \quad m = \left| \frac{a-b}{a+b} \right|\tag{7}$$

где a — радиус окружности, описанной вокруг многоугольника L_2 , b — радиус окружности, вписанной в многоугольник L_2 .

Внешность внутреннего контура L_1 (окружность радиуса r с двумя прямолинейными разрезами различной длины) отображается (приближенно) следующей функцией

$$\begin{aligned}z = r \zeta_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \zeta_1^{-n}, \quad \varepsilon_n = \sum_{k=n-2E(\frac{1}{2}n)}^n \delta_k \gamma_{n-k} \\ \gamma_k = \sum_{n=k-2E(\frac{1}{2}k)}^{k/2} \varepsilon' (-1)^n C_{1/2}^n \left(\frac{b'-a'}{4}\right)^{-2n+1} C_{-2n+1}^{1/2(k-2n)} \\ \delta_k = \sum_{n_1=k-2E(\frac{1}{2}k)}^k C_{-2n_1+1}^{n_1} \left[2 \frac{b'+a'}{b'-a'} \right]^{n_1} C_{-k}^{1/2(k-n_1)} \\ a' = \frac{e_1^2 + r^2}{2e_1 r}, \quad b' = \frac{e_2^2 + r^2}{2e_2 r}, \quad \varepsilon' = \begin{cases} 2, & n=0 \\ 1, & n \neq 0 \end{cases}\end{aligned}\tag{8}$$

где e_1 и e_2 — координаты концевых точек разреза (см. фигуру). В частности, при $e_1 = -r$ (или же при $e_2 = r$) внутренний контур будет иметь один разрез.

При $e_1 = e_2 = e$ получим $a' = -\alpha$, $b' = \alpha$, тогда внутренний контур L_1 будет иметь два симметрично расположенных разреза. В этом случае формула (8) совпадает с известной формулой [5, 7].

Учитывая отображающую функцию (7) в (6), граничное условие на L_2 после некоторых простых выкладок приводится к виду (переходя к переменной τ):

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{-n} \Pi_1(n) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \Pi_2(n) + \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{-n} \Pi_3(n) - \left(\tau + \frac{m}{\tau^{N-1}} \right) \sum_{n=2}^{\infty} \tau^n \Pi_4(n) + \\ & + \left(\tau + \frac{m}{\tau^{N-1}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{-n} \Pi_5(n) + \left(\tau + \frac{m}{\tau^{N-1}} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n \Pi_6(n) + \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n \Pi_7(n) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{-n} \Pi_8(n) + \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n \Pi_9(n) = f_{12}^{(0)} + if_{22}^{(0)} \quad \text{на } L_2 \end{aligned} \quad (9)$$

Значения введенных величин $\Pi_1(n) \div \Pi_9(n)$ из-за громоздкости здесь не приводятся.

Теперь, учитывая отображающую функцию (8) в (6), граничное условие на внутреннем контуре L_1 приводится к виду (учитывая, что на единичной окружности $\tau\bar{\tau} = 1$):

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{-n} V_1(n) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n V_2(n) + \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{-n} V_3(n) - \tau \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n V_4(n) - \tau \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{-n} V_5(n) - \\ & - \tau \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n V_6(n) + \tau \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{-n} V_7(n) + \tau \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n V_8(n) + \tau \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{-n} V_9(n) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n V_{10}(n) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{-n} V_{11}(n) + \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n V_{12}(n) = f_{11}^{(0)} + if_{21}^{(0)} \quad \text{на } L_1 \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, граничные условия на внутреннем и внешнем контурах пластинки приводятся к двум равенствам (9) и (10). Приравнявая в них коэффициенты при одинаковых степенях переменной τ , получим следующие четыре системы бесконечных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных a_k , b_k , A_k и B_k :

$$\Pi_1(n) + \Pi_3(n) - \Pi_4(n) m \varepsilon_1' + \Pi_5(n+1) + m \Pi_5(n-N+1) \varepsilon_2' + \Pi_6(n) \varepsilon_1' + \Pi_8(n) = E_1 \quad (11)$$

$$\Pi_2(n) - \Pi_4(n-1) \varepsilon_3' - \Pi_4(n+1) m \varepsilon_4' + \Pi_6(n-1) + \Pi_6(n+N-1) m + \Pi_7(n) + \Pi_8(n) = E_2 \quad (12)$$

$$V_1(n) + V_3(n) - V_5(n+1) + V_8(n+1) + V_{11}(n) + V_7(n+1) = E_3 \quad (13)$$

$$V_2(n) - V_4(n-1) \varepsilon_5' - V_5(0) \varepsilon_6' - V_6(n-1) \varepsilon_5' + V_8(n-1) \varepsilon_6' + V_9(n-1) \varepsilon_5' + \\ + V_{10}(n) + V_{12}(n) = E_4 \quad (14)$$

$$\varepsilon_1' = \begin{cases} 0, & n \geq N-1 \\ 1, & n < N-1 \end{cases}, \quad \varepsilon_2' = \begin{cases} 0, & n < N \\ 1, & n \geq N \end{cases}, \quad \varepsilon_3' = \begin{cases} 0, & n < 3 \\ 1, & n \geq 3 \end{cases}$$

$$\varepsilon_4' = \begin{cases} 0, & n \leq N-2 \\ 1, & n > N-2 \end{cases}, \quad \varepsilon_5' = \begin{cases} 0, & n < 2 \\ 1, & n \geq 2 \end{cases}, \quad \varepsilon_6' = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ 1, & n = 1 \end{cases}$$

Постоянная C_1 определяется формулой [4, 9]:

$$C_1 = \operatorname{Re} \int_{L_1'} [\chi \overline{\varphi(\tau)} \omega'(\tau) + \overline{\omega(\tau)} \varphi'(\tau)] d\tau / \operatorname{Re} \int_{L_1'} [i \overline{\omega(\tau)} \omega'(\tau)] d\tau, \quad z = \omega(\tau)$$

где z — отображающая функция, определяемая формулой (8); E_1 и E_2 — выражения при отрицательной и положительной степенях τ , содержащиеся в $f_{12}^{(0)} + if_{22}^{(0)}$ (т. е. в правой части равенства (9)), E_3 и E_4 — выражения при отрицательной и положительной степенях τ , содержащиеся в $f_{11}^{(0)} + if_{21}^{(0)}$ (т. е. в правой части равенства (10)).

Для заданных профилей и относительных размеров при различных видах нагрузки из систем (11) – (14) уравнений удерживается несколько первых, из них определяются неизвестные коэффициенты a_k, b_k, A_k, B_k . Число этих уравнений фиксируется в зависимости от параметра, характеризующего близость контуров L_1 и L_2 и от требуемой точности расчета.

После определения этих коэффициентов, согласно (5), определяются регулярные функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ и тем самым и функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Далее определяем функцию прогиба пластинки w по формуле

$$w = \text{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)], \quad \chi(z) = \int_{L_j} \psi(z) dz + C \quad (15)$$

Постоянная C определяется из условия крепления края пластинки.

Как известно при изгибе пластинок для получения напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины дефекта (разреза) целесообразно перейти к локальной системе координат (ρ, θ) с началом в вершине трещины. Компоненты тензора напряжений σ_r, σ_θ и $\tau_{r\theta}$ в полярной системе координат выражаются через комплексные потенциалы $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ следующими формулами [1, 4, 2, 6]:

$$\begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= -24D(1+\nu)uh^{-3}[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} &= 24D(1-\nu)uh^{-3}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi(z)]e^{i\theta} \\ \tau_{rz} - i\tau_{\theta z} &= -24D(1/4h^3 - u^2)e^{i\theta}\varphi''(z)/h^3 \\ & \quad -1/2h \leq u \leq 1/2h \end{aligned} \quad (16)$$

Если в рассматриваемой пластинке имеются симметричные разрезы, то здесь рассматривается распределение напряжений в малой окрестности правой вершины трещины, т. е. в области, для которой справедливо $z = l + z_1, z_1 \ll l$:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{K_1}{2(3+\nu)(2r)^{1/2}} \frac{u}{h} (3+5\nu) \cos \frac{\theta}{2} - (7+\nu) \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_\theta &= \frac{K_1}{2(3+\nu)(2r)^{1/2}} \frac{u}{h} (5+3\nu) \cos \frac{\theta}{2} + (7+\nu) \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{K_1}{2(3+\nu)(2r)^{1/2}} \frac{u}{h} (\nu-1) \sin \frac{\theta}{2} + (7+\nu) \sin \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь K_1 – коэффициент интенсивности напряжений. Согласно [1, 3, 4] формула для определения K_1 имеет следующий вид:

$$K_1 = - (12D/h^2) (3+\nu) \varphi'(\xi_0)^{1/2} / \omega''(\xi_0)^{1/2} \quad (18)$$

Таким образом, для того чтобы вычислить величины K_1 и, следовательно, найти полное распределение напряжений в окрестности угловых точек разреза, необходимо знать комплексный потенциал $\varphi(\xi_0)$ только в этой точке, т. е. в точке $\xi = \xi_0$ (ξ_0 – точка единичной окружности в плоскости ξ , соответствующей вершинам угловых точек дефекта).

Для рассматриваемой задачи формула (18) имеет вид

$$\begin{aligned} K_1 &= - \frac{12D}{h^2} (3+\nu) \left[ka_k + k \sum_{n=k}^* \beta_n \left(\frac{r}{A}\right)^n \varepsilon_{n-k} \right. \\ & \quad \left. - k \sum_{n=k-2E[(k-1)/2]}^* \beta_n \left(\frac{r}{A}\right)^n \varepsilon_{n+k} \right] \left(r \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \varepsilon_{n-1} \right)^{1/2} \quad (k=1, 3, 5 \dots; n=2, 3, 4 \dots) \end{aligned} \quad (19)$$

Примеры. 1. Чистый изгиб многоугольной пластины с круглым отверстием и двумя разрезами. Рассмотрим изгиб пластинки, когда по краям приложены постоянно изгибающие моменты M_1 и M_2 . Можно заметить, что при этом получим

$$A_1' = 0, B_1' = 0, p(s) = 0; f_{1j}^{(0)} + if_{2j}^{(0)} = M_1 t / D(1-\nu) \text{ на } L_1; f_{1j}^{(0)} + if_{2j}^{(0)} = M_2 t / D(1-\nu) \text{ на } L_2.$$

Подставляя вместо t его значение (отображающие функции (7) и (8)), получим

$$f_{11}^{(0)} + if_{21}^{(0)} = \frac{M_1}{D(1-\nu)} r \tau \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \tau^{-n} \text{ на } L_1 \quad (20)$$

$$f_{12}^{(0)} + if_{22}^{(0)} = \frac{M_1}{D(1-\nu)} A \left(\tau + \frac{m}{\tau^{N-1}} \right) \text{ на } L_2 \quad (21)$$

Тогда величины $E_1 \div E_4$, входящие в (11) – (14), будут иметь значения

$$E_1 = \frac{M_2 A m}{D(1-\nu)} \varepsilon_7', \quad E_2 = \frac{M_2 A}{D(1-\nu)} \varepsilon_6'$$

$$E_3 = \frac{M_1 r}{D(1-\nu)} \varepsilon_{n-1}, \quad E_4 = \frac{M r \varepsilon_0}{D(1-\nu)} \varepsilon_6'$$

$$\varepsilon_7' = 0 \text{ при } n \neq N-1, \quad \varepsilon_7' = 1 \text{ при } n = N-1 \quad (22)$$

В частности, когда $m=0$, $A=R$, $l=e-r=0$, т. е. $e=r$, получим задачу чистого изгиба круглой пластинки с центральным круглым отверстием. В этом случае система уравнений (11) – (14) упрощается и приведет к виду

$$\frac{1}{R} (1+\kappa) b_1 + \frac{r}{R} A_1 = \frac{M_2}{D(1-\nu)},$$

$$\frac{1}{R} (1+\kappa) b_1 + \frac{1}{r} A_1 = \frac{M_1}{D(1-\nu)} \quad (23)$$

Решая их совместно, получим значения b_1 и A_1 и в итоге функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Прогиб пластинки будет определяться формулой

$$w = \operatorname{Re} \left\{ \bar{z} \frac{M_2 R^3 - M_1 r^2 R}{R(1+\kappa)D(1-\nu)} + r \ln z \frac{M_1 - M_2}{D(1-\nu)} \frac{r R^2}{R^2 - r^2} + C \right\} \quad (24)$$

Если край пластины свободно оперт по всему наружному контуру, тогда $w=0$ (на этом контуре прогиб равен нулю). Из этого условия определяется постоянная $C = -R b_1 - r A_1 \ln R$.

Таким образом прогиб пластинки будет (учитывая $z = \rho e^{i\theta}$, $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$):

$$w = \frac{M_2 \cdot R^2 - M_1 r^2}{2D(1+\nu)} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - r^2} + \ln \frac{\rho}{R} \frac{M_1 - M_2}{D(1-\nu)} \frac{r^2 R^2}{R^2 - r^2}$$

Если $M_2=0$:

$$w = -\frac{M_1 r^2}{2D(1+\nu)} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - r^2} + \ln \frac{\rho}{R} \frac{M_1}{D(1-\nu)} \frac{r^2 R^2}{R^2 - r^2} \quad (25)$$

Эта формула полностью совпадает с результатами [8], полученными другим способом.

2. Изгиб многоугольной пластины при равномерном распределении усилий по контуру отверстий. Пусть теперь многоугольная пластинка с центральным круглым отверстием и двумя прямолинейными разрезами подвержена равномерно распределенным по всему внутреннему контуру L_1 усилиями интенсивности p .

Тогда формула (2) для определения $f_{1j} + f_{2j}$ примет следующий вид

$$f_{1j}^{(0)} + i f_{2j}^{(0)} = \frac{P t}{2\pi D(1-\nu)} - \frac{P t}{8\pi D} [1 + \kappa \ln t + \ln \bar{t}] + i C_1 t + C_2 \text{ на } L_j \quad (26)$$

Подставляя в (26) отображающие функции (7) и (8), получим

$$f_{12}^{(0)} + i f_{22}^{(0)} = \frac{P}{2\pi D(1-\nu)} A \left(\tau + \frac{m}{\tau^{N-1}} \right) - \frac{P A}{8\pi D} \left(\tau + \frac{m}{\tau^{N-1}} \right) \left\{ 1 + \kappa \ln \left[A \left(\tau + \frac{m}{\tau^{N-1}} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \ln [A (\tau^{-1} + m \tau^{N-1})] \right\} + i C_1 A \left(\tau + \frac{m}{\tau^{N-1}} \right) + C_2 \text{ на } L_2 \quad (27)$$

$$f_{11}^{(0)} + i f_{21}^{(0)} = \frac{P r \tau}{2\pi D(1-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \tau^{-n} - \frac{P r \tau}{8\pi D} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \tau^{-n} \times$$

$$\times \left[1 + \kappa \ln \left(r \tau \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \tau^{-n} + \ln \left(r \tau^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \tau^n \right) \right) + i C_1 r \tau \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \tau^{-n} + C_2 \text{ на } L_1 \right] \quad (28)$$

Тогда величины $E_1 \div E_4$, входящие в систему уравнений (11) – (14), будут

$$E_1 = \frac{P A m \varepsilon_7'}{2\pi D(1-\nu)} - \frac{P A}{8\pi D} \left[\varepsilon_7' + \kappa (-1)^{n+1} \frac{m^n}{n} \varepsilon_8' + (1+\kappa) \ln A \varepsilon_7' + \right.$$

$$+ m\kappa(-1)^{n+1} \frac{m^n}{n} \varepsilon_9' \quad (29)$$

$$E_2 = \frac{PA\varepsilon_6'}{2\pi D(1-\nu)} - \frac{PA}{8\pi D} \left\{ [1 + (1+\kappa)\ln A] \varepsilon_6' + \right. \\ \left. + \kappa(-1)^{n+1} \frac{m^n}{n} \varepsilon_{10}' + m(-1)^{n+1} \frac{m^n}{n} \varepsilon_{11}' \right\}$$

$$\varepsilon_8' = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \neq N-1, 2N-1, \dots, nN-1 \\ 1 & \text{при } \nu = N-1, 2N-1, \dots, nN-1 \end{cases}$$

$$\varepsilon_9' = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \neq 2N-1, 3N-1, \dots, (n+1)N-1 \\ 1 & \text{при } \nu = 2N-1, 3N-1, \dots, (n+1)N-1 \end{cases}$$

$$\varepsilon_{10}' = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \neq N+1, 2N+1, \dots, nN+1 \\ 1 & \text{при } \nu = N+1, 2N+1, \dots, nN+1 \end{cases}$$

$$\varepsilon_{11}' = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \neq 1, N+1, \dots, (n-1)N-1 \\ 1 & \text{при } \nu = 1, N+1, \dots, (n-1)N-1 \end{cases}$$

$$E_3 = \frac{Pr}{2\pi D(1-\nu)} \varepsilon_{n+1} - \frac{Pr}{8\pi D} \varepsilon_{n+1} (1 + \kappa \ln r + \ln r + \kappa \ln \varepsilon_n + \ln \varepsilon_n)$$

$$E_4 = \frac{Pr\varepsilon_0}{2\pi D(1-\nu)} - \frac{P}{8\pi D} r\varepsilon_0 (1 + \kappa(1+\kappa) \ln r + \ln \varepsilon_n + \kappa \ln \varepsilon_n)$$

$$P = 2\pi r p_0 + 4l p_0$$

Здесь P — главный вектор нагрузок, приложенных к границе L_1 .

Подставляя в систему уравнений (11) — (14) и в выражения (27) и (28) $m=0$, $A=R$, $l=e-r=0$, $e=r$ рассматриваемая многоугольная пластинка переходит в круглую с центральным круговым отверстием.

Решая для этого случая систему уравнений (11) — (14), находим

$$A_1 = \frac{rR^2}{R^2-r^2} \left[-\frac{P}{8\pi D} (1+\kappa) (\ln r - \ln R) \right] \quad (30)$$

$$b_1 = -\frac{PR}{8\pi D} \left(\frac{1}{1+\kappa} + \ln R \right) - \frac{r^2 R}{(R^2-r^2)(1+\kappa)} \frac{P}{2\pi D(1-\nu)} + \\ + \frac{r^2 R}{R^2-r^2} \frac{P}{8\pi D} (\ln r - \ln R) + \frac{PR}{2\pi D(1-\nu)(1+\kappa)} \quad (31)$$

Таким образом прогиб w пластинки будет определяться согласно (15) следующей формулой (учитывая $z = \rho e^{i\theta}$, $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$):

$$w = \frac{P\rho^2}{8\pi D} \left[\ln \frac{\rho}{R} - 1 \right] + \frac{P\rho^2}{16\pi D} \left[\frac{2r^2}{R^2-r^2} \ln \frac{r}{R} - \frac{1-\nu}{1+\nu} \right] + \\ + \ln \frac{\rho}{R} \frac{P}{4\pi D} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{r^2 R^2}{R^2-r^2} \ln \frac{r}{R} + \frac{PR^2}{8\pi D} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{1-\nu}{1+\nu} - \frac{r^2}{R^2-r^2} \ln \frac{r}{R} \right] \quad (32)$$

Эта формула также полностью совпадает с известной формулой [8], выведенной иным способом.

3. Эллиптическая пластинка, ослабленная центральной круглой полостью и двумя разрезами. Если в полученных системах линейных алгебраических уравнений принять $q=2$, $e_1=e_2=e$, получим задачу изгиба эллиптической пластинки, ослабленной центральной круглой полостью и двумя прямолинейными разрезами, симметрично расположенными вдоль оси абсцисс.

Пластинка загружена равномерно распределенному по внешнему контуру изгибающему моменту интенсивности M_2 , а внутренний контур L_1 , свободен от нагрузки.

Числовой расчет был произведен для следующих соотношений полуоси эллипса и длины разреза (в четырех вариантах e/r): $a/b=1,5$; $m=0,2$; $r/a=0,2$; $e/r=1,1$; $1,5$; $2,0$; $3,0$. Из каждой системы были удержаны первые пять (всего получается совокупность 20 уравнений) уравнений для определения коэффициентов разложения функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Зная функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, находятся все искомые величины: прогиб (w), напряжение и коэффициент интенсивности напряжений (КИН). Для КИН получены следующие значения (вычисленные согласно (19)) соответственно для

указанных вариантов в долях $6M_2 l^{3/2}/h^2$, где $l=e-r$ — длина разреза, $K=1,733; 1,53; 1,3; 1,22$.

Значения КИН в конечных точках разреза при отношениях $a/b=1,5; r/a=0,1; e/r=1,4; 1,5$ почти совпадают с результатами [1], вычисленными для бесконечной пластинки с отверстием и двумя разрезами. Без заметного ущерба конечную пластинку, для которой $a/r \geq 10, e/r \leq 2,0$, можно принять за бесконечную.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бережницкий Л. Т., Деляевский М. В., Панасюк В. В.* Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. Киев: Наук. думка, 1979. 400 с.
2. *Вайнберг Д. В.* Концентрация напряжений в пластинах около отверстий и выкружек. Киев: Техника, 1969. 220 с.
3. *Каминский А. А.* Исследование поля напряжений возле малых радиальных трещин, выходящих на контур отверстия // Прикл. механика. 1971. Т. 7. № 12. С. 112–115.
4. *Космодамианский А. С., Иванов Г. М.* Изгиб тонких многосвязных плит. Донецк: Изд-во Донецк. ун-та, 1973. 264 с.
5. *Кулиев С. А.* Кручение квадратного бруса с центральной круглой полостью и двумя разрезами // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 4. С. 77–82.
6. *Мухомелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
7. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1982. 487 с.
8. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.
9. *Угодчиков А. Г., Длугач М. И., Степанов А. Е.* Решение краевых задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах. М.: Высш. шк., 1970. 528 с.
10. *Шерман Д. И.* Об одном методе решения некоторых задач теории упругости для двусвязных областей // Докл. АН СССР. 1947. Т. 55. № 8. С. 701–704.

Баку

Поступила в редакцию
19.IX.1988

УДК 539.3

© 1990 г.

В. И. ДАНИЛЕНКО, С. И. РОГАЧКО

ЧИСЛЕННО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РОВНЫХ ЛЕДЯНЫХ ПОЛЕЙ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОПОРОЙ

Представлены методика исследований и результаты экспериментов по прорезанию ровных ледяных полей цилиндрической опорой в полунатурных условиях. Экспериментальные данные анализируются с учетом результатов численного моделирования разрушения ледяного покрова, полученных методом конечных элементов. Предлагается простой критерий перехода от раздробления льда перед цилиндрической опорой к разрушению льда в результате возникновения и развития радиальных трещин нормального отрыва.

1. Введение. В настоящее время актуальным является вопрос о добыче углеводородов на шельфе замерзающих морей. В этой связи в проектных организациях ведутся разработки ледостойких нефтегазопромысловых гидротехнических сооружений, способных противостоять воздействию различных факторов окружающей среды, и в первую очередь — воздействию ледяных образований, что должно обеспечить безаварийную работу морских промыслов.

Одним из основных расчетных случаев при проектировании таких сооружений является воздействие ровных ледяных полей с размерами в плане, значительно превышающими поперечные размеры опорных частей сооружения. Согласно рекомендациям действующих норм [1], наибольшие нагрузки на сооружение при этом будут иметь место при прорезании ледовых полей опорной частью сооружения. Простейшей формой опорной части при равновероятном направлении дрейфа ледовых полей является цилиндр.

Совершенствование рекомендуемых нормативными документами [1] способов расчета ледовых нагрузок на ледостойкие сооружения требует дополнительных исследований закономерностей разрушения ледяного покрова при взаимодействиях с цилиндрическими преградами. Целесообразным при этом представляется использование самых разнообразных методов — как экспериментальных, так и численно-аналитических.