

Л. Н. ЯСНИЦКИЙ

КОМПОЗИЦИЯ РАСЧЕТНОЙ ОБЛАСТИ
 В МЕТОДЕ ФИКТИВНЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ

В работе [1] предложен эффективный численно-аналитический метод решения граничных задач теории упругости для тел сложной геометрической формы. Решенные задачи в перемещениях для заданного тела D ищется в виде разложения

$$U_i^{(N)} = \sum_{n=1}^N c_n U_{in}(p), \quad p \in D \quad (i=1, 2, 3) \quad (1)$$

относящегося к некоторой фиктивной канонической области V , содержащей D . Для области V такое разложение получается методом разделения переменных Фурье, поэтому базисные координатные функции $U_{in}(p)$, а следовательно и сумма $U_i^{(N)}$, удовлетворяют в V , а значит и в D , уравнениям Ламе. С помощью (1) и закона Гука строятся аналогичные разложения для компонент тензора напряжений и вектора сил на поверхности тела D :

$$\sigma_{ij}^{(N)} = \sum_{n=1}^N c_n \sigma_{ijn}(p), \quad P_i^{(N)} = \sum_{n=1}^N c_n P_{in}(p) \quad (2)$$

Постоянные коэффициенты c_n находятся из условия минимума суммарной квадратичной невязки удовлетворения граничных условий задачи: $\partial \Phi / \partial c_l = 0, l=1, 2, \dots, N$, где

$$\Phi = \sum_{i=1}^3 \left[k_1 \int_S (U_i^* - U_i^{(N)})^2 dS + k_2 \int_L (P_i^* - P_i^{(N)})^2 dL \right] \quad (3)$$

Здесь S и L — участки поверхности тела D , на которых заданы соответственно перемещения U_i^* и поверхностные нагрузки P_i^* ; k_1 и k_2 — весовые множители: если $k_1=1$, то из соображений совпадения размерностей слагаемых в сумме (3) и одинаковых требований к погрешности удовлетворения всех граничных условий задачи, удобно задать $k_2=H^2/E^2$, где H — характерный размер тела D , E — модуль Юнга.

Несмотря на простоту изложенного алгоритма, применение метода [1] имеет серьезные трудности, связанные с выбором формы канонической области V для того или иного заданного тела D с теми или иными условиями на его поверхности. Критерий, которым следует руководствоваться при выборе фиктивных канонических областей, проще всего получить, используя известные положения теории гармонических функций, а затем обобщить этот критерий на функции, удовлетворяющие уравнениям теории упругости. Например, можно воспользоваться теоремой И. Н. Векуа [2], которая формулируется следующим образом.

Теорема 1. Пусть в конечной односвязной области D , ограниченной поверхностью Ляпунова S , задана гармоническая функция $U(p)$, непрерывная на S . Тогда в конечной области V , содержащей D , можно построить гармоническую функцию $F(p)$ такую, что для всех $p \in D$:

$$|F(p) - U(p)| < \varepsilon \quad (4)$$

где ε — любое положительное число.

Предположим, что область V каноническая. Тогда для функции $F(p)$ в области V методом разделения переменных Фурье можно построить некоторое разложение по гармоническим функциям:

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n F_n(p) \quad (5)$$

Коэффициенты c_n в этом разложении зависят от ε и для них могут быть три возможных случая поведения, которые проанализируем в отдельности.

1. Если существует такая последовательность $\varepsilon_k \rightarrow 0$, что для всех n последовательности $c_n(\varepsilon_k)$ имеют при $k \rightarrow \infty$ конечные пределы c_n , то эти пределы в силу неравенства (4) являются коэффициентами ряда, в который раскладывается функция $U(p)$. Так как это разложение сходится и сумма ряда гармонична, то из этого следует гармоническая продолжимость $U(p)$ в области V .

2. Если последовательности $c_n(\varepsilon_k)$ для всех n и $k \rightarrow \infty$ ограничены, то надо иметь в виду, что из всякой ограниченной последовательности всегда можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, и значит из множества $k \rightarrow \infty$ можно извлечь такие номера, для которых подпоследовательность $c_l(\varepsilon_k)$ сходится. Из выделенного мно-

жества, в свою очередь, можно извлечь подмножество номеров k , для которых сходится подпоследовательность $c_2(\varepsilon_k)$ и так далее. Таким образом, если в разложении (5) коэффициенты $c_n(\varepsilon)$ не стремятся к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$ ни для какого n , то $U(p)$ может быть гармонически продолжена в V .

3. Если $U(p)$ не может быть гармонически продолжена в V , то, по крайней мере для некоторых n $c_n(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, так как в противном случае, на основании рассуждений в предыдущих двух пунктах, функция $U(p)$ становится гармонически продолжимой в V . Отсюда следуют два вывода:

а). Поскольку $c_n(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то для таких n сколь угодно малому изменению ε соответствуют большие изменения $c_n(\varepsilon)$ и задача нахождения коэффициентов разложения (5) является некорректной по Адамару.

б). Поскольку в практических вычислениях абсолютная величина коэффициентов $c_n(\varepsilon)$ не может быть сколь угодно большой, то значение погрешности ε ограничено снизу некоторым положительным числом ε_0 , т. е. решение граничной задачи с погрешностью меньшей ε_0 в принципе не может быть достигнуто.

Полученный вывод можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 2.¹ При решении уравнения Лапласа методом фиктивных канонических областей отыскание произвольных постоянных базисного разложения является корректной по Адамару задачей в том и только в том случае, если искомое решение может быть продолжено, как решение того же уравнения, в какую-либо область V , включающую заданное тело D , для которой имеет место используемое разложение.

Очевидно, теорема 2 справедлива и для уравнений теории упругости. Такое обобщение справедливо благодаря тому, что общее решение уравнений Ламе линейно выражается через гармонические функции и их производные, а при дифференцировании рядов гармонических функций область сходимости не меняется.

Условием теоремы 2 можно пользоваться как критерием выбора фиктивных канонических областей при практическом решении краевых задач. Эти области надо выбирать так, чтобы искомое решение задачи удовлетворяло уравнениям Ламе не только внутри заданного тела D , но и во всем пространстве, занимаемом фиктивной канонической областью V . Причем, поскольку разложение для V , получаемое методом разделения переменных, обычно применимо не для одной, а для целого семейства подобных канонических областей, и по условию теоремы 2 требуется продолжимость в какую-либо одну область этого семейства, то под V можно понимать область наименьшего объема (площади), содержащую тело D .

Нарушение условия продолжимости обычно бывает вызвано тем, что искомое для D решение при продолжении его за пределы заданного тела в некоторых точках пространства, расположенных вблизи тела D , обращается в бесконечность, имеет разрывы, изломы, или другого рода особенности. Наличие таких особенностей зависит как от конфигурации области D , так и от условий на ее границе. В практике прочностных расчетов часто встречаются задачи, когда особенности искомого решения расположены так (см. например фиг. 3а), что подобрать какую-либо каноническую область, которая бы содержала D и не содержала особые точки искомого решения, бывает трудно, а иногда и невозможно.

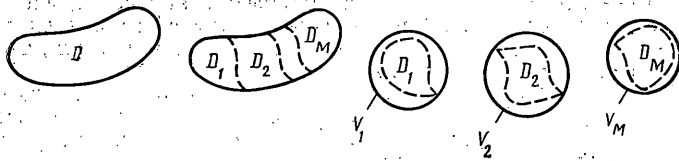
В работах [4, 5] предложен прием, расширяющий возможности рассматриваемого метода решения граничных задач. Этот прием заключается в том, что в качестве базисного разложения используется сумма разложений, относящихся к K каноническим областям V_1, V_2, \dots, V_k . В этом случае формулировка и доказательство теоремы 2 останутся без изменений, если под V понимать область пересечения канонических областей V_1, V_2, \dots, V_k , т. е. $V = V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_k$, причем $V \supset D$. Ясно, что в таком виде условие теоремы выполнить проще и класс задач, решаемых методом фиктивных канонических областей, несколько расширяется. Однако нетрудно убедиться, что и этот прием имеет ограниченные возможности применения.

Новые возможности открываются, если воспользоваться приемом композиции расчетной области [6]. Разбиение расчетной области на части и конструирование решения исходной задачи на основе решений вспомогательных задач для составных частей области — весьма распространенный в механике деформируемого тела прием, имеющий физические, или алгоритмические предпосылки. Совместно с методом фиктивных канонических областей этот прием можно применить следующим образом.

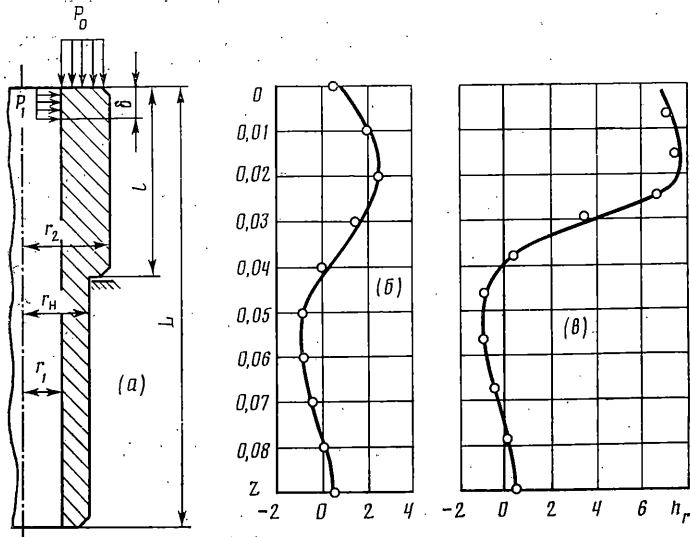
Заданное тело D заменяется конструкцией из M элементов-подобластей D_1, D_2, \dots, D_M , на границах которых задаются условия совместности деформаций и равновесия сил. Для каждого m -го элемента подбирается каноническая область V_m , включающая D_m , как условно показано на фиг. 1. Разбиение на элементы и выбор фиктивных канонических областей для каждого элемента осуществляется так, чтобы выполнялось условие продолжимости теоремы 2. Искомое решение задачи для D представляется совокупностью разложений, относящихся каждое к своей канонической области:

$$U_{im}^{(N)} = \sum_{n=1}^N c_{nm} U_{inm}(p_m), \quad p_m \in D_m \quad (i=1, 2, 3; m=1, 2, \dots, M) \quad (6)$$

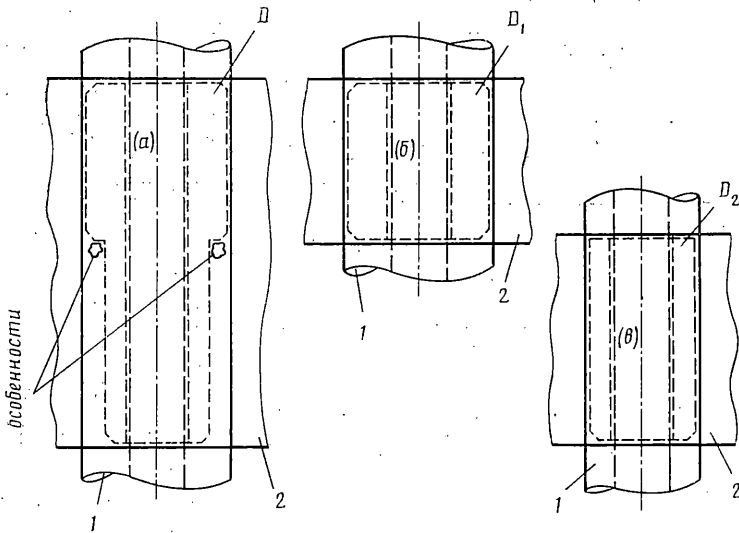
¹ Теорема 2 сформулирована автором, а ее доказательство, приведенное здесь, выполнено С. Я. Гусманом [3]. Аналогичная теорема, доказанная для плоского случая методами теории функций комплексного переменного, имеется в [1].



Фиг. 1



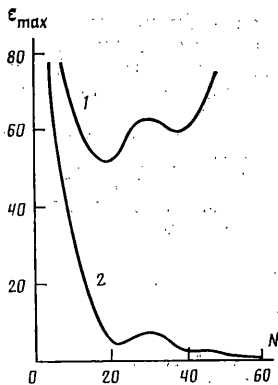
Фиг. 2



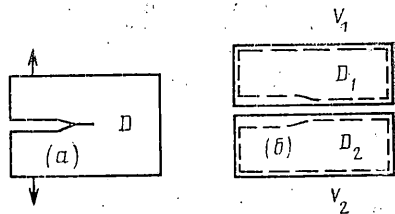
Фиг. 3

Постоянные c_{nm} находятся из условия минимума функционала, представляющего собой суммарную квадратичную невязку удовлетворения всех граничных условий на поверхности тела D и условий контакта между его частями D_m . Например, если подобласти D_m односвязны и расположены последовательно, как на фиг. 1, то минимизируемый функционал имеет вид:

$$\Phi = \sum_{i=1}^3 \left\{ \sum_{m=1}^M \left[k_1 \int_{S_m} (U_{im}^* - U_{im}^{(N)})^2 dS_m + k_2 \int_{L_m} (P_{im}^* - P_{im}^{(N)})^2 dL_m \right] + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{M-1} \left[k_1 \int_{\gamma_m} (U_{im}^{(N)} - U_{im+1}^{(N)})^2 d\gamma_m + k_2 \int_{\gamma_m} (P_{im}^{(N)} - P_{im+1}^{(N)})^2 d\gamma_m \right] \right\} \quad (7)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

где S_m и L_m — части границы элемента D_m , совпадающие с поверхностью тела D , γ_m — поверхность контакта m -го и $(m+1)$ -го элементов.

Изложенный алгоритм был реализован в пакете вычислительных программ, которые использовались для тестовых испытаний метода и решения ряда практических задач. В качестве примера приведем некоторые данные расчета деформированного состояния прецизионных элементов топливной аппаратуры дизельных двигателей.

Как показал опыт ремонта и эксплуатации дизелей [9], до 30% случаев выхода из строя топливной аппаратуры приходится на износ и зависание плунжерных пар. Деформационные изменения во втулке плунжерной пары возникают при ее сборке под воздействием монтажного давления P_0 и нагружении втулки давлением сжимаемого топлива P_1 в процессе эксплуатации. На фиг. 2, а втулка имеет размеры: $r_1=8,5$ мм, $r_n=14$ мм, $r_2=19$ мм, $L=97$ мм, $l=42$ мм, $\delta=6,5$ мм. Материал втулки имеет модуль Юнга $E=19,6 \cdot 10^{10}$ Па и коэффициент Пуассона $\nu=0,25$.

Расчет втулки плунжерной пары можно вести в предположении, что она является телом вращения, подверженным осесимметричной нагрузке. Применение метода фиктивных канонических областей проводилось в двух вариантах — без использования и с использованием приема композиции заданного тела. В первом варианте в качестве фиктивной выбиралась область пересечения бесконечного полого цилиндра 1 и горизонтального упругого слоя 2 (см. фиг. 3, а). Разложения типа (1) и (2), относящиеся к указанным каноническим областям при их осесимметричном нагружении, легко получаются методом разделения переменных Фурье и имеются в [7, 8]. Однако вычисления показали, что метод фиктивных канонических областей в таком варианте не позволяет получить решение задачи с приемлемой степенью точности. Как видно из графика на фиг. 4, кривая 1, изображающая зависимость максимальной погрешности удовлетворения граничных условий ϵ_{\max} от количества удержанных слагаемых базисных разложений N , загибается вверх при увеличении N , что свидетельствует об отсутствии сходимости метода. Указанное явление можно объяснить нарушением условия продолжимости теоремы 2. Как нетрудно предположить, искомое решение задачи имеет особенности в местах, указанных на фиг. 3, а, которые не дают возможности продлжить это решение во всем пространстве, занимаемом областью пересечения канонических тел.

Условие продолжимости можно выполнить, если воспользоваться алгоритмом композиции, предлагаемым в настоящей статье. Схема композиции расчетной области D из подобластей D_1 и D_2 показана на фиг. 3, б, в. Здесь особенности искомого решения оказались за пределами областей пересечения канонических тел. Поэтому максимальная погрешность удовлетворения граничных условий (и условий сопряжения подобластей) ϵ_{\max} убывает с ростом N , как изображает кривая 2 на фиг. 4. Таким образом, применение приема композиции расчетной области позволило выполнить критерий продолжимости и создать экономичную программу, приводящую к весьма точному аналитическому решению граничной задачи.

Результаты расчета втулки плунжерной пары представлены в виде распределения радиальных перемещений h_r внутренней поверхности втулки, возникающих от действия монтажного усилия $P_0=80$ мПа (фиг. 2, б) и суммарного действия монтажного усилия и давления сжимаемого топлива $P_1=60$ мПа (фиг. 2, в). Расчетные данные хорошо согласуются с результатами тензометрических измерений [9], показанных на том же рисунке в виде отдельных точек². Как видно из рисунка, математическая модель позволяет весьма точно воспроизводить не только положительные, но и опасные отрицательные перемещения поверхности (направленные к оси втулки), которые приводят к зависаниям плунжера, преждевременному износу и потере работоспособности плунжерной пары.

В заключение отметим следующее:

Использование приема композиции расчетной области позволяет решать задачи, которые, вследствие неблагоприятного расположения особенностей искомого реше-

² Эксперименты выполнил И. П. Клименко.

ний, не допускают непосредственного применения метода фиктивных канонических областей. К задачам подобного класса относится расчет напряженно-деформированного состояния элементов конструкций, имеющих трещины и технологические вырезы. Пример схемы композиции области и выбора фиктивных канонических областей для тела, имеющего вырез и трещину, приведен на фиг. 5.

При увеличении числа используемых подобластей M и уменьшении количества удержанных слагаемых N в разложениях (6) применяемый подход, по существу, превращается в одну из модификаций метода конечных элементов. Однако, указанное превращение приводит к нежелательному увеличению объема вводимой в ЭВМ информации и к общему снижению эффективности расчетных программ, поскольку численному анализу подвергается не только граница тела D , но и множество его внутренних точек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ясницкий Л. Н. Об одном способе решения задач теории гармонических функций и линейной теории упругости // Прочностные и гидравлические характеристики машин и конструкций. Пермь: Изд-во Перм. политехн. ин-та, 1973. С. 78–83.
2. Векуа И. Н. О полноте системы гармонических полиномов в пространстве // Докл. АН СССР, 1953. Т. 90. № 4. С. 495–498.
3. Гусман С. Я., Ясницкий Л. Н. О критерии выбора базовых функций в методе фиктивных канонических областей // Геометрическое моделирование и начертательная геометрия: Тез. докл. Урал. научно-техн. конф. Пермь: Изд. Урал. отд. АН СССР, 1988. С. 46–48.
4. Ясницкий Л. Н. Суперпозиция базисных решений в методах типа Треффца // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 95–101.
5. Ясницкий Л. Н. К расчету напряженного состояния эллипсоидальной оболочки постоянной и переменной толщины на основе решений теории упругости для сферических областей // Прикл. механика. 1989. Т. 25. № 6. С. 111–114.
6. Зайков Г. А. О решении краевых задач теории упругости методом композиции // Численное решение задач теории упругости и пластичности. Материалы 10 Всесоюз. конф. Новосибирск: Изд-е Ин-та теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1988. С. 84–89.
7. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехтеориздат, 1955. 491 с.
8. Байда Э. Н. Некоторые пространственные задачи теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 231 с.
9. Лышевский А. С., Клименко И. П., Ваглин Б. Г. Монтажные деформации втулки топливовпрыскивающего насоса дизеля // Изв. СКНЦ ВШ. Техн. науки. 1981. № 4. С. 43–45.

Пермь

Поступила в редакцию
25.V.1989