

УДК 533.6.013.42

© 1990 г.

А. Н. ГУЗЬ, А. П. ЖУК

О ДВИЖЕНИИ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛЕ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Исследован характер движения в вязкой жидкости двух параллельных круговых цилиндров, расположенных один за другим в направлении распространения плоской акустической волны. Движение цилиндров в значительной мере определяется силами взаимодействия, которые появляются в результате обусловленного интерференцией волн взаимного нарушения полей обтекания цилиндров. В работе рассмотрены взаимодействия, мерой которых являются постоянные силы. Эти силы можно отфильтровать из гидродинамических сил, действующих на цилиндры, с помощью осреднения по времени. В связи с этим напряжения в жидкости, используемые для определения гидродинамических сил, необходимо вычислять из нелинейных соотношений с точностью до величин, квадратичных по переменным волнового поля. Будем рассматривать звуковые волны умеренной интенсивности в слабо вязкой жидкости, пренебрегая тепловыми эффектами и влиянием акустических течений. В этом случае для решения задачи можно воспользоваться методом, основанным на строгом решении задачи дифракции акустической волны на свободных частицах [1]. Характерной особенностью разработанного подхода, отличающей его от известных в литературе методов исследования, является возможность исследовать поведение частиц независимо от отношений длины падающей волны к размерам частиц и к расстояниям между ними. В соответствии с методом поле тензора напряжений в жидкости представляется через потенциалы первичной и вторичных волн с точностью до величин, имеющих порядок числа Маха. При этом потенциалы вторичных волн определяются из решения задачи дифракции, сформулированной на основе линеаризованной теории сжимаемой вязкой жидкости.

1. Постановка задачи. Пусть параллельные круговые цилиндры радиусов a_m ($m=1, 2$) расположены в неограниченной вязкой жидкости на расстоянии l . За основную систему координат выберем прямоугольную декартову систему $Oxyz$ (фиг. 1), в которой акустическую волну зададим соотношением

$$\Phi_i = A \exp[i(\alpha x - \omega t)] \quad (1.1)$$

где A — амплитуда, α — комплексное волновое число, ω — круговая частота. Среднюю силу воздействия волнового поля на поверхность m -го цилиндра ($m=1, 2$) вычислим, осреднив по времени величину гидродинамической силы

$$F^m = \int_S \hat{\sigma} \cdot N \, dS \quad (1.2)$$

При этом, в соответствии с принятым подходом [1], тензор напряжений $\hat{\sigma}$ в жидкости определяется соотношением

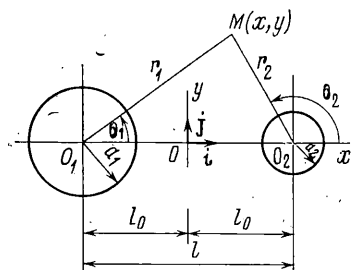
$$\hat{\sigma} = (-p + \lambda' \nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{E} + 2\mu' \mathbf{e} \quad (1.3)$$

а акустическое давление p , поле скоростей \mathbf{v} и тензор скоростей деформации \mathbf{e} следующими выражениями:

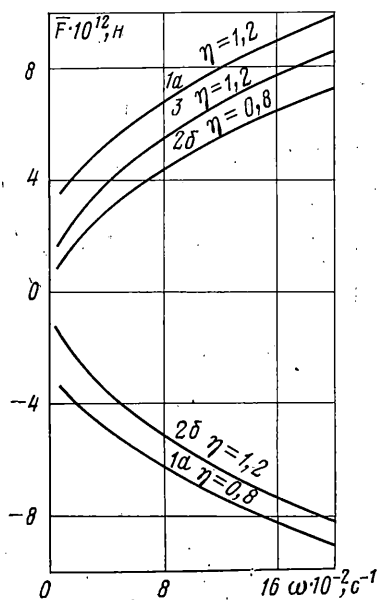
$$p = \rho_0 \left(\frac{\lambda' + 2\mu'}{\rho_0} \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi + \frac{\rho_0}{2a_0^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \rho_0 (\nabla \Phi)^2 - \frac{\lambda' + 2\mu'}{a_0^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Delta \Phi \quad (1.4)$$

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi + \nabla \times \mathbf{k} \Psi_1 \quad (1.5)$$

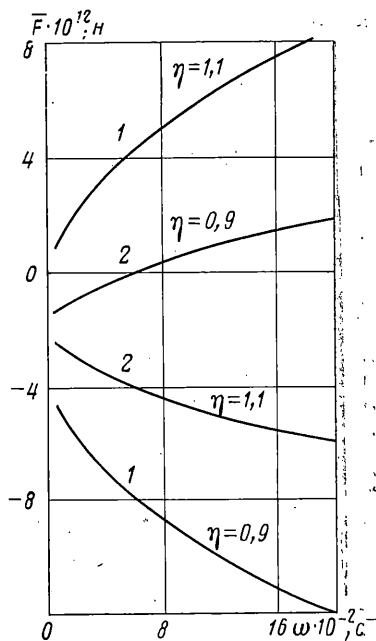
$$2\mathbf{e} = \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \quad (1.6)$$



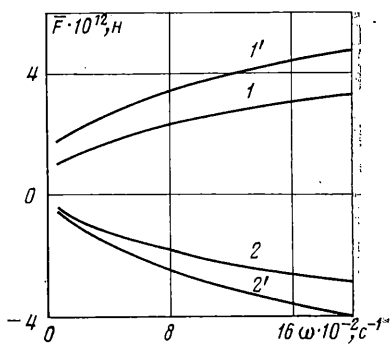
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

В соотношениях (1.2)–(1.6) обозначено: N – вектор единичной нормали к поверхности S , μ' и $\lambda' = -2/3\mu'$ – динамический и второй коэффициенты вязкости, ρ_0 и a_0 – плотность и скорость звука в невозмущенном состоянии, E^{\wedge} – единичный тензор, Φ и Ψ_1 – потенциалы суммарного волнового поля

$$\Phi = \Phi_i + \Phi_d^1 + \Phi_d^2, \quad \Psi_1 = \Psi_d^1 + \Psi_d^2 \quad (1.7)$$

Входящие в выражения (1.7) потенциалы Φ_d^m , Ψ_d^m отраженных от цилиндров волн являются решениями уравнений

$$\left[\left(1 + \frac{\lambda' + 2\mu'}{\rho_0 a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Phi_d^m = 0 \quad (1.8)$$

$$(\mu' \Delta - \rho_0 \partial / \partial t) \Psi_d^{(m)} = 0 \quad (1.9)$$

и удовлетворяют условиям излучения на бесконечности. Поле скоростей (1.5) должно удовлетворять граничным условиям на поверхности m -го цилиндра

$$\mathbf{v} = \mathbf{U}^m \quad (1.10)$$

При этом скорость \mathbf{U}^m поступательного перемещения m -го цилиндра

определяется из уравнения

$$M^m U^{m*} = P^m \quad (1.11)$$

где M^m — масса единицы длины цилиндра, P^m — вычисляемая по формуле (1.2) гидродинамическая сила, действующая на единицу длины цилиндра. При вычислении P^m достаточно в (1.4) сохранить только первое слагаемое.

2. Определение поля скоростей. Фактически определение поля скоростей (1.5) сводится к задаче о нахождении потенциалов Φ и Ψ , т. е. к решению задачи дифракции плоской волны (1.1) на двух свободных цилиндрах. В математической постановке задача дифракции сводится к интегрированию уравнений (1.8) и (1.9) в трехсвязной области с условиями (1.10) на поверхностях цилиндров. Для ее решения воспользуемся методом разделения переменных в цилиндрических системах координат [2, 3]. Свяжем с каждым цилиндром локальную цилиндрическую систему координат $O_m r_m \theta_m z_m$ ($m=1, 2$). В каждой из локальных систем координат потенциал первичного волнового поля (1.1) представим в виде ряда по цилиндрическим волновым функциям

$$\Phi_i^m = \sum_{n=0}^{\infty} A \exp[(-1)^n i \alpha l / 2] e_n i^n J_n(\alpha r_m) \cos n \theta_m \quad (m=1, 2) \quad (2.1)$$

где $e_n=2$ ($n \geq 1$), $e_0=1$. Решение задачи дифракции (выражения для потенциалов отраженных волн) также представим в виде рядов

$$\Phi_d^m = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^m H_n^{(1)}(\alpha r_m) \cos n \theta_m \quad (m=1, 2) \quad (2.2)$$

$$\Psi_d^m = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^m H_n^{(1)}(\beta r_m) \sin n \theta_m \quad (m=1, 2) \quad (2.3)$$

в которых коэффициенты разложений A_n^m и B_n^m ($m=1, 2$) определяются из граничных условий (1.10) на поверхности каждого цилиндра. Для этого потенциалы отраженных волн $\Phi_d = \Phi_d^1 + \Phi_d^2$ и $\Psi_d = \Psi_d^1 + \Psi_d^2$ необходимо записать в каждой из локальных систем координат. Используя теорему сложения [2, 3] для цилиндрических волновых функций, получаем

$$\Phi_d = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n^m H_n^{(1)}(\alpha r_m) + e_n S_n^m J_n(\alpha r_m)] \cos n \theta_m \quad (m=1, 2) \quad (2.4)$$

$$\Psi_d = \sum_{n=0}^{\infty} [B_n^m H_n^{(1)}(\beta r_m) + e_n Q_n^m J_n(\beta r_m)] \sin n \theta_m \quad (m=1, 2) \quad (2.5)$$

$$S_n^1 = {}^{1/2} \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \beta_{2kn} A_h^2, \quad S_n^2 = {}^{1/2} \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{2kn} A_h^1$$

$$Q_n^1 = {}^{1/2} \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \beta_{1kn} B_h^2, \quad Q_n^2 = {}^{1/2} \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{1kn} B_h^1$$

$$\alpha_{1kn} = H_{k-n}^{(1)}(\beta l) - (-1)^n H_{k+n}^{(1)}(\beta l), \quad \alpha_{2kn} = H_{k-n}^{(1)}(\alpha l) + (-1)^n H_{k+n}^{(1)}(\alpha l)$$

$$\beta_{1kn} = (-1)^n H_{k-n}^{(1)}(\beta l) - H_{k+n}^{(1)}(\beta l), \quad \beta_{2kn} = (-1)^n H_{k-n}^{(1)}(\alpha l) + H_{k+n}^{(1)}(\alpha l)$$

Проектируя (1.5) на оси m -й локальной системы координат и принимая во внимание (1.7), (2.1), (2.4) и (2.5), получаем

$$v_{r_m} = \frac{1}{r_m} \sum_{n=0}^{\infty} [c_{1n}^m A + c_{2n}^m A_n^m + c_{3n}^m S_n^m + c_{4n}^m B_n^m + c_{5n}^m Q_n^m] \cos n\theta_m \quad (2.6)$$

$$v_{\theta_m} = \frac{1}{r_m} \sum_{n=0}^{\infty} [d_{1n}^m A + d_{2n}^m A_n^m + d_{3n}^m S_n^m + d_{4n}^m B_n^m + d_{5n}^m Q_n^m] \sin n\theta_m \quad (2.7)$$

$$c_{1n}^m = \exp[(-1)^m i\alpha l/2] e_n i^n [nJ_n(\alpha r_m) + \alpha r_m J_{n+1}(\alpha r_m)]$$

$$c_{2n}^m = nH_n^{(1)}(\alpha r_m) - \alpha r_m H_{n+1}^{(1)}(\alpha r_m), \quad c_{3n}^m = e_n [nJ_n(\alpha r_m) - \alpha r_m J_{n+1}(\alpha r_m)]$$

$$c_{4n}^m = nH_n^{(1)}(\beta r_m), \quad c_{5n}^m = n e_n J_n(\beta r_m)$$

$$d_{1n}^m = -\exp[(-1)^m i\alpha l/2] e_n i^n n J_n(\alpha r_m)$$

$$d_{2n}^m = -nH_n^{(1)}(\alpha r_m), \quad d_{3n}^m = -n e_n J_n(\alpha r_m)$$

$$d_{4n}^m = -nH_n^{(1)}(\beta r_m) + \beta r_m H_{n+1}^{(1)}(\beta r_m), \quad d_{5n}^m = -e_n [nJ_n(\beta r_m) - \beta r_m J_{n+1}(\beta r_m)]$$

Проектируя (1.3) на оси m -ой локальной системы координат и принимая во внимание (1.4)–(1.7), (2.1), (2.4) и (2.5), получаем

$$\sigma_{r_m} = 2\mu' r^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} [a_{1n}^m A + a_{2n}^m A_n^m + a_{3n}^m S_n^m + a_{4n}^m B_n^m + a_{5n}^m Q_n^m] \sin n\theta_m \quad (2.8)$$

$$\sigma_{r_m \theta_m} = 2\mu' r_m^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} [b_{1n}^m A + b_{2n}^m A_n^m + b_{3n}^m S_n^m + b_{4n}^m B_n^m + b_{5n}^m Q_n^m] \sin n\theta_m$$

$$a_{1n}^m = \exp[(-1)^m i\alpha l/2] e_n i^n [(n^2 - n^{-1}/2\beta^2 r_m^2) J_n(\alpha r_m) + \alpha r_m J_{n+1}(\alpha r_m)] \quad (2.9)$$

$$a_{2n}^m = (n^2 - n^{-1}/2\beta^2 r_m^2) H_n^{(1)}(\alpha r_m) + \alpha r_m H_{n+1}^{(1)}(\alpha r_m)$$

$$a_{3n}^m = e_n [(n^2 - n^{-1}/2\beta^2 r_m^2) J_n(\alpha r_m) - \alpha r_m J_{n+1}(\alpha r_m)]$$

$$a_{4n}^m = (n^2 - n) H_n^{(1)}(\beta r_m) - n\beta r_m H_{n+1}^{(1)}(\beta r_m)$$

$$a_{5n}^m = (n^2 - n) J_n^{(1)}(\beta r_m) - n\beta r_m J_{n+1}(\beta r_m)$$

$$b_{1n}^m = \exp[(-1)^m i\alpha l/2] e_n i^n [(n - n^2) J_n(\alpha r_m) + n\alpha r_m J_{n+1}(\alpha r_m)]$$

$$b_{2n}^m = (n - n^2) H_n^{(1)}(\alpha r_m) + n\alpha r_m H_{n+1}^{(1)}(\alpha r_m)$$

$$b_{3n}^m = e_n [(n - n^2) J_n(\alpha r_m) + n\alpha r_m J_{n+1}(\alpha r_m)]$$

$$b_{4n}^m = (n - n^2 + 1/2\beta^2 r_m^2) H_n^{(1)}(\beta r_m) - \beta r_m H_{n+1}^{(1)}(\beta r_m)$$

$$b_{5n}^m = e_n [(n - n^2 + 1/2\beta^2 r_m^2) J_n(\beta r_m) - \beta r_m J_{n+1}(\beta r_m)]$$

Вследствие симметрии волнового поля относительно плоскости Ozx перемещения цилиндров в их колебательных движениях происходят вдоль оси Ox . Учитывая это, после интегрирования (1.11), получаем при $r_m = a_m$:

$$U_x^m = -\eta a_m^{-1} [A d_{11}^m + A_1^m d_{21}^m + S_1^m d_{31}^m - B_1^m c_{41}^m - Q_1^m c_{51}^m] \quad (2.10)$$

где η — отношение плотности ρ_0 жидкости к плотности ρ материалов ци-

линдров. В выражениях (2.1)–(2.10) опущен множитель $\exp(-i\omega t)$. Из граничных условий (1.10), принимая во внимание (2.6), (2.7) и (2.10), получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, позволяющую вычислить коэффициенты A_n^m и B_n^m ($m=1, 2$) в разложениях (2.2) и (2.3):

$$\begin{cases} A_n^m + \alpha_n^m S_n^m + \beta_n^m B_n^m + \gamma_n^m Q_n^m = e_n^m \alpha_n^m \\ \delta_n^m A_n^m + \varepsilon_n^m S_n^m + B_n^m + \eta_n^m Q_n^m = e_n^m \varepsilon_n^m \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\alpha_1^m = e_1 \frac{(1-\eta) J_1(\alpha a_m) - \alpha a_m J_2(\alpha a_m)}{(1-\eta) H_1^{(1)}(\alpha a_m) - \alpha a_m H_2^{(1)}(\alpha a_m)}$$

$$\alpha_n^m = e_n \frac{n J_n(\alpha a_m) - \alpha a_m J_{n+1}(\alpha a_m)}{n H_n^{(1)}(\alpha a_m) - \alpha a_m H_{n+1}^{(1)}(\alpha a_m)} \quad (n \neq 1)$$

$$\beta_1^m = \frac{(1-\eta) H_1^{(1)}(\beta a_m)}{(1-\eta) H_1^{(1)}(\alpha a_m) - \alpha a_m H_2^{(1)}(\alpha a_m)}$$

$$\beta_n^m = \frac{n H_n^{(1)}(\alpha a_m)}{n H_n^{(1)}(\alpha a_m) - \alpha a_m H_{n+1}^{(1)}(\alpha a_m)} \quad (n \neq 1)$$

$$\gamma_1^m = \frac{e_1 (1-\eta) J_1(\beta a_m)}{(1-\eta) H_1^{(1)}(\alpha a_m) - \alpha a_m H_2^{(1)}(\alpha a_m)}$$

$$\gamma_n^m = \frac{e_n n J_n(\beta a_m)}{n H_n^{(1)}(\alpha a_m) - \alpha a_m H_{n+1}^{(1)}(\alpha a_m)} \quad (n \neq 1)$$

$$e_n^m = -A_i^n \exp[(-1)^m i \alpha l / 2], \quad \delta_1^m = \frac{(1-\eta) H_1^{(1)}(\alpha a_m)}{(1-\eta) H_1^{(1)}(\beta a_m) - \beta a_m H_2^{(1)}(\beta a_m)}$$

$$\delta_n^m = \frac{n H_n^{(1)}(\alpha a_m)}{n H_n^{(1)}(\beta a_m) - \beta a_m H_{n+1}^{(1)}(\beta a_m)} \quad (n \neq 1)$$

$$\varepsilon_1^m = \frac{e_1 (1-\eta) J_1(\alpha a_m)}{(1-\eta) H_1^{(1)}(\beta a_m) - \beta a_m H_2^{(1)}(\beta a_m)}$$

$$\varepsilon_n^m = \frac{e_n n J_n(\alpha a_m)}{n H_n^{(1)}(\beta a_m) - \beta a_m H_{n+1}^{(1)}(\beta a_m)} \quad (n \neq 1)$$

$$\eta_1^m = e_1 \frac{(1-\eta) J_1(\beta a_m) - \beta a_m J_2(\beta a_m)}{(1-\eta) H_1^{(1)}(\beta a_m) - \beta a_m H_2^{(1)}(\beta a_m)}$$

$$\eta_n^m = e_n \frac{n J_n(\beta a_m) - \beta a_m J_{n+1}(\beta a_m)}{n H_n^{(1)}(\beta a_m) - \beta a_m H_{n+1}^{(1)}(\beta a_m)} \quad (n \neq 1)$$

Можно показать, что система уравнений (2.14) удовлетворяет всем условиям, которые позволяют для ее решения воспользоваться методом редукции. Определение потенциалов поля скоростей формально заканчивается приближенным вычислением коэффициентов A_n^m и B_n^m ($m=1, 2$) из усеченной ($n=0, 1, \dots, N$) системы уравнений (2.14). Заданная степень точности обеспечивается путем сравнения результатов для последовательно возрастающего числа уравнений.

3. Определение средних сил. Найденное при решении задачи дифракции поле скоростей жидкости позволяет, как это следует из (1.3)–(1.7), определить гидродинамическую силу (1.2) и, осреднив ее по времени, получить среднюю силу, действующую на соответствующий цилиндр. Заметим, что в (1.2) необходимо использовать действительные части компонент тензора напряжений (1.3). Из соотношений (1.4)–(1.6) следует,

что для этого в выражениях для потенциалов Φ , Ψ_1 и их производных необходимо отделить мнимые части. Можно показать, что достаточно найти $\text{Re } \Phi$, $\text{Re } \Psi_1$ при $r_m = a_m$ и $\text{Re } U_x^m$ через которые легко выражаются $\text{Re } \partial\Phi/\partial t$, $\text{Re } \nabla\Phi$ и $\text{Re } \Delta\Phi$ при $r_m = a_m$. Например,

$$\nabla\Phi|_{r_m=a_m} = \frac{\partial\Phi}{\partial r_m} \Big|_{r_m=a_m} \mathbf{e}_{r_m} + \frac{1}{a_m} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta_m} \Big|_{r_m=a_m} \mathbf{e}_{\theta_m} \quad (3.1)$$

но из граничных условий на поверхности m -го цилиндра для $\partial\Phi/\partial r_m$ получаем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r_m} \Big|_{r_m=a_m} = U_x^m \cos\theta_m - \frac{1}{a_m} \frac{\partial\Psi_1}{\partial\theta_m} \Big|_{r_m=a_m} \quad (3.2)$$

Таким образом $\text{Re } \nabla\Phi$ определено при $r_m = a_m$, так как $\text{Re } \partial\Phi/\partial\theta_m$ и $\text{Re } \partial\Psi_1/\partial\theta_m$ легко вычисляются из $\text{Re } \Phi$ и $\text{Re } \Psi_1$. При вычислении средней силы необходимо учитывать изменение положения колеблющегося цилиндра, так как его учет приводит к появлению в (1.4) слагаемых, имеющих такой же порядок, как второе и третье слагаемые. Это обстоятельство налагает условие на вычисление в (1.4) производной по времени $\partial\Phi/\partial t$, которую необходимо принять равной

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{d\Phi}{dt} - U_x^m \cos\theta_m \frac{\partial\Phi}{\partial r_m} + \frac{U_x^m}{r_m} \sin\theta_m \frac{\partial\Phi}{\partial\theta_m} \quad (3.3)$$

где $d\Phi/dt$ — полная производная по времени. Видно, что (3.3) необходимо учитывать только при определении вклада в среднюю силу первого слагаемого выражения (1.4). Заметим, что при осреднении по времени производная $d\Phi/dt$ обращается в нуль. Укажем также, что решение задачи производится с помощью комбинации численных и аналитических методов. На основе такого подхода решены аналогичные задачи для двух сфер и двух цилиндров в идеальной жидкости [4, 5].

4. Взаимодействие цилиндров в акустическом поле. Исследуем характер движения вдоль оси Ox под действием средних сил двух параллельных круговых цилиндров, помещенных в пропанол ($\rho_0 = 785,4$ кг/м³, $a_0 = 1247$ м/с). Для этого вычислим и осредним по времени выражение

$$F^m = \int_S \mathbf{i} \cdot \hat{\sigma} \cdot \mathbf{e}_{r_m} dS \quad (m = 1, 2) \quad (4.1)$$

где S — боковая поверхность части цилиндра, равной его радиусу. Плотность потока энергии в первичной волне при $x=0$ примем равной $175,5$ Вт/м², что соответствует умеренной мощности излучателя. Результаты расчетов на ЭВМ приведены на фиг. 2–4.

На фиг. 2 для $\mu' = 0,0046$ кг/м·с приведены результаты расчетов средних сил, возникающих в двух системах цилиндров: а) $a_1 = 0,001$ м, $a_2 = 1,5a_1$, $l = 10a_1$; б) $a_1 = 1,5a_2$, $a_2 = 0,001$ м, $l = 10a_2$. Кривые 1 и 2 характеризуют зависимость средней силы, действующей на цилиндр, от частоты, плавучести и положения цилиндра в системе. Кривая 3 относится к уединенному цилиндру радиусом $a = 0,001$ м. Анализ поведения кривых показывает, что средняя сила увеличивается с ростом частоты. При положительной плавучести цилиндров ($\eta = 1,2$) воздействие первого цилиндра системы на второй (отклонение кривой 2, б от кривой 3) более существенно, чем воздействие второго на первый (отклонение кривой 1, а от кривой 3). Первый цилиндр притягивает второй. При отрицательной плавучести цилиндров ($\eta = 0,8$) более существенно влияние второго цилиндра на первый (отклонения кривых 1, а и 2, б от кривой 3). Второй цилиндр отталкивает первый. В зависимости от плавучести цилиндра средняя сила, действующая на него, изменяется как по величине, так и по направлению. Эти выводы подтверждаются результатами, приведенными на фиг. 3 для системы цилиндров б) при $\eta = 1,1$ и $\eta = 0,9$. Положение цилиндра в системе указано цифрой у кривой.

На фиг. 4 приведены результаты расчетов средних сил для случая $a_1 = a_2 = 0,001$ м, $l = 10a_1$ и $\eta = 1,1$. Цифра у кривой указывает положение цилиндра. Штрих у цифры соответствует $\mu' = 0,0046$ кг/м·с (пропанол при $t^\circ = 30^\circ$ С). Цифры без штриха — $\mu' = 0,00239$ кг/м·с (пропанол при $t^\circ = 20^\circ$ С). Анализ поведения кривых показывает, что под действием средних сил цилиндры сближаются в своем относительном движении. При этом вязкость существенно влияет на величину сил взаимодействия. В более вязкой жидкости акустической волной создается большая по величине средняя сила.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гузь А. Н., Жук А. П.* О гидродинамических силах, действующих в акустическом поле в вязкой жидкости // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 1. С. 32–35.
2. *Гузь А. Н., Головчан В. Т.* Дифракция упругих волн в многосвязных телах. Киев: Наук. думка, 1972. 254 с.
3. *Иванов Е. А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 583 с.
4. *Жук А. П.* Взаимодействие двух сферических тел в идеальной жидкости при прохождении акустической волны // Докл. АН УССР. Сер. А. 1989. № 5. С. 30–33.
5. *Жук А. П.* Взаимодействие двух параллельных круговых цилиндров в идеальной жидкости при прохождении акустической волны // Докл. АН УССР. Сер. А. 1989. № 8. С. 28–32.

Киев

Поступила в редакцию
19.III.1990