

УДК 539.3

© 1990 г.

А. Г. ГОРШКОВ, А. А. ДЕРГАЧЕВ

**ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ  
С ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ**

В настоящее время все большее распространение получают армированные волокнами керамические композиционные материалы. Таким композиционным керамическим материалам свойственна высокая теплоустойчивость в сочетании с достаточно высокими удельными механическими характеристиками. Создание методик расчета поведения элементов конструкций из таких материалов для различных условий функционирования является важной и актуальной задачей. В публикуемой работе рассматривается поведение прямоугольной ортотропной пластины из керамического композиционного материала под действием потока энергии интенсивности  $I_s$ . В задаче учитывается плавление, испарение и зависимость механических и теплофизических характеристик материала от температуры. Изгиб пластины рассматривается в упругопластической постановке.

1. Уравнение теплопроводности для твердой ( $n$ ) и жидкой ( $f$ ) фазы имеет вид

$$\rho_{(n,f)} C_{V(n,f)} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{(n,f)} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (1.1)$$

где  $\rho$  — плотность,  $C_V$  — коэффициент удельной массовой теплоемкости при постоянном объеме,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $T$  — температура.

Постановка задачи предусматривает расчет испарения жидкой фазы. Учитывается только конвективное испарение. Расчет производится по идеализированной модели испарения с кнудсеновским слоем при наличии противодавления [1]. В непосредственной близости от поверхности (область 1) расположен кнудсеновский слой, толщина которого составляет несколько длин свободного пробега молекул. В этом слое одностороннее распределение Больцмана для атомов, покидающих поверхность, находящихся при температуре  $T_s$  и давлении  $p_s$ , преобразуется в сферически симметричное распределение, которое характеризуется температурой  $T_1$  и давлением  $p_1$ . В области 2 параметры паров однородны и характеризуются величинами давления и температуры  $p_2$  и  $T_2$ . Область 3 представляет зону распространяющейся в воздухе ударной волны, а область 4 — зону невозмущенного воздуха. Если воздух покоится, то соотношения Ренкина — Гюгонио определяют скорость за ударной волной следующим образом:

$$u_3 = a_4 \left( \frac{p_3}{p_4} - 1 \right) / \left[ \gamma_4 \left( 1 + \frac{\gamma_4 + 1}{2\gamma_4} \left( \frac{p_3}{p_4} - 1 \right) \right)^{1/2} \right] \quad (1.2)$$

$$a_4 = (\gamma_4 R_0 T_4)^{1/2}, \quad R_4 = R_0 / \mu_4$$

где  $\gamma_4$  — показатель адиабаты,  $R_0$  — универсальная газовая постоянная,  $\mu_4$  — молярная масса воздуха.

На поверхности контактного разрыва  $u_2 = u_3$  и  $p_2 = p_3$ . Условия на скачке в кнудсеновском слое имеют вид

$$\frac{T_2}{T_s} = \left[ \left( 1 + \pi \left( \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1} \frac{m}{2} \right)^2 \right)^{1/2} - \pi^{1/2} \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1} \frac{m}{2} \right]^2$$

$$\rho_2 / \rho_s = (T_s / T_2)^{1/2} \left[ (m^2 + 1/2) e^{m^2} \operatorname{erfc}(m) - m / \pi^{1/2} \right] +$$

$$+ T_s / T_2 \left[ 1 - \pi^{1/2} m e^{m^2} \operatorname{erfc}(m) \right], \quad m = u_2 / (2R_2 T_2)^{1/2} \quad (1.3)$$

где  $\rho_s$  — плотность насыщенного пара при температуре  $T_s$  и давлении  $p_s$ ,  $\text{erfc}(m)$  — дополнительный интеграл вероятности.

Определим число Маха за контактным разрывом как  $M_2 = u_2 / (\gamma_2 R_2 T_2)^{1/2}$ . Отношение давлений  $p_3/p_4$  имеет вид

$$\frac{p_3}{p_4} = 1 + \gamma_4 M_2 \frac{a_2}{a_4} \left[ \frac{\gamma_4 + 1}{4} M_2 \frac{a_2}{a_4} + \left( 1 + \left( \frac{\gamma_4 + 1}{4} M_2 \frac{a_2}{a_4} \right)^2 \right)^{1/2} \right] \quad (1.4)$$

Кроме того, выполняются условия:  
для дозвуковой скорости истечения паров

$$p_3 = p_2, \quad \frac{p_3}{p_4} = \frac{p_2}{p_4} \frac{p_2}{p_s}, \quad \frac{p_2}{p_s} = \frac{\rho_2}{\rho_s} \frac{T_2}{T_s} \quad (1.5)$$

для сверхзвукового истечения ( $a_i$  — скорость звука):

$$p_3 = p_2, \quad \frac{p_3}{p_4} = \frac{(p_1/p_2)(p_2/p_4)}{p_1/p_4} \quad (1.6)$$

$$\frac{a_2}{a_4} = \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_4} \frac{\mu_4}{\mu_2} \frac{T_s}{T_4} \frac{T_1}{T_s} \right)^{1/2} \frac{a_2}{a_1}$$

Система замыкается уравнением Клаузиуса — Клапейрона

$$\frac{p_3}{p_4} = \exp \left[ \frac{\mu_2 L_v}{R_0 T_{v4}} \left( 1 - \frac{T_{v4}}{T_s} \right) \right] \quad (1.7)$$

где  $L_v$  — удельная теплота парообразования,  $T_{v4}$  — значение  $T_s$ , соответствующее давлению пара  $p_4$ .

Условие на границе пластины с окружающим воздухом

$$\lambda_{(n,f)} \partial T_{(n,f)} / \partial z = -\alpha I_s + L_v \rho_{(n,f)} v_s + \varepsilon \sigma T_{(n,f)}^4 \quad (1.8)$$

где  $\varepsilon$  — излучательная способность,  $\sigma$  — постоянная Стефана,  $\alpha$  — коэффициент поглощения излучения,  $L_v$  — удельная теплота парообразования,  $v_s$  — скорость перемещения границы конденсированной и газообразной фазы.

Условия на границе твердой и жидкой фазы

$$-\lambda_f (\partial T / \partial z) |_{z=z_0} = Q_0 \rho_n \partial z_0 / \partial t - \lambda_n (\partial T / \partial z) |_{z=z_0} \quad (1.9)$$

$$T_n |_{z=z_0} = T_f |_{z=z_0} = T^*$$

где  $Q_0$  — удельная теплота плавления,  $T^*$  — температура плавления. Необлучаемая поверхность пластины принята теплоизолированной.

Перемещения описываются динамическим уравнением изгиба для прямоугольной ортотропной пластины [2, 3]

$$J_{11}^{**} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2[J_{12}^{**} + 2J_{66}^{**}] \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + J_{22}^{**} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 S_{11}^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_{22}^*}{\partial y^2} =$$

$$= -J_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p_s - \frac{\partial^2 M_x^0}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_y^0}{\partial y^2}, \quad J_0 = \rho h_1$$

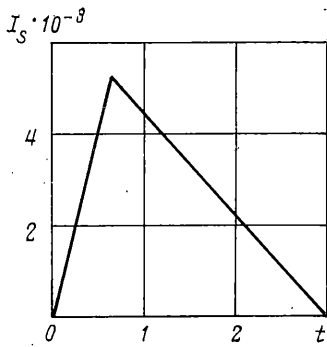
$$J_{ij}^{**} = \int_0^h (z-c)^2 B_{ij} dz, \quad S_{ij}^* = \int_0^h (z-c) \beta_{ij} (T - T_0) dz$$

где  $h$  — текущая толщина твердой фазы,  $h_1$  — текущая толщина твердой и жидкой фазы,  $M_x^0$ ,  $M_y^0$ ,  $M_{xy}^0$  — поправки на неупругость работы материала. Уравнение дополняется граничными условиями. Составляющие деформаций определяются выражениями

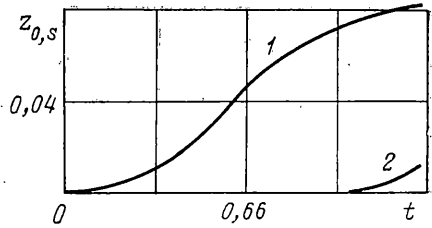
$$\varepsilon_x = -(z-c) \partial^2 w / \partial x^2 - \alpha_x (T - T_0)$$

$$\varepsilon_y = -(z-c) \partial^2 w / \partial y^2 - \alpha_y (T - T_0) \quad (1.11)$$

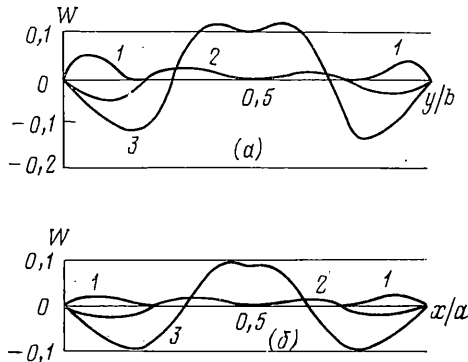
$$\gamma_{xy} = -(z-c) \partial^2 w / \partial x \partial y$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Напряжения в рассматриваемой точке представляются в виде разностей  $\sigma_x = \sigma_x^1 - \sigma_x^0$ ,  $\sigma_y = \sigma_y^1 - \sigma_y^0$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{xy}^1 - \tau_{xy}^0$ , где  $\sigma_x^1$ ,  $\sigma_y^1$ ,  $\tau_{xy}^1$  — напряжения распределенные по сечению по упругому закону;  $\sigma_x^0$ ,  $\sigma_y^0$ ,  $\tau_{xy}^0$  — поправки на неупругость работы материала. Напряжения, распределенные по сечению по упругому закону, определяются из выражений

$$\sigma_x^1 = B_{11}[\varepsilon_x + \nu_{21}\varepsilon_y], \sigma_y^1 = B_{22}[\varepsilon_y + \nu_{12}\varepsilon_x], \tau_{xy}^1 = B_{66}\gamma_{xy} \quad (1.12)$$

Пластичность учитывается по модели Губера — Мизеса. За инвариантную меру, характеризующую степень изменения формы, может быть принята энергия формоизменения. Для ортотропной пластины выражение, определяющее энергию формоизменения, запишем в виде

$$W_{\Phi} = \frac{1}{2}[a_{11}\sigma_x^2 + a_{22}\sigma_y^2 + 2a_{12}\sigma_x\sigma_y + a_{66}\tau_{xy}^2 - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y)[\sigma_x(a_{11} + a_{12} + a_{13}) + \sigma_y(a_{12} + a_{22} + a_{23})]] \quad (1.13)$$

Эквивалентные напряжения  $\sigma_x^*$ ,  $\sigma_y^*$ ,  $\tau_{xy}^*$  могут быть определены следующим образом:

$$\sigma_x^* = [2W_{\Phi}/(a_{11} - \frac{1}{3}(a_{11} + a_{12} + a_{13}))]^{1/2}, \sigma_y^* = [2W_{\Phi}/(a_{22} - \frac{1}{3}(a_{12} + a_{22} + a_{23}))]^{1/2}, \tau_{xy}^* = (2W_{\Phi}/a_{66})^{1/2} \quad (1.14)$$

Представим экспериментальные зависимости между напряжениями и деформациями в виде полиномов

$$\sigma_{x,y}^{\check{}} = A_{x,y}(T)\varepsilon_{x,y}^{\check{}} + B_{x,y}(T)(\varepsilon_{x,y}^{\check{}})^3, \quad \tau_{xy}^{\check{}} = A_{xy}(T)\gamma_{xy}^{\check{}} + B_{xy}(T)(\tau_{xy}^{\check{}})^3 \quad (1.15)$$

Определим поправки напряжений на неупругое деформирование. Вычислим эквивалентные напряжения  $\sigma_x^{1*}$ ,  $\sigma_y^{1*}$ ,  $\tau_{xy}^{1*}$  через напряжения, определяемые по упругому закону  $\sigma_x^1$ ,  $\sigma_y^1$ ,  $\tau_{xy}^1$  и эквивалентные напряжения  $\sigma_x^*$ ,  $\sigma_y^*$ ,  $\tau_{xy}^*$  через напряжения  $\sigma_x = \sigma_x^1 - \sigma_x^0$ ,  $\sigma_y = \sigma_y^1 - \sigma_y^0$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{xy}^1 - \tau_{xy}^0$ , где  $\sigma_x^0$ ,  $\sigma_y^0$ ,  $\tau_{xy}^0$  — поправки на неупругость работы материала на

предыдущем временном шаге. Вычислим компоненты деформаций  $\varepsilon_x = \sigma_x^{1*}/E_1$ ,  $\varepsilon_y = \sigma_y^{1*}/E_2$ ,  $\gamma_{xy} = \tau_{xy}^{1*}/G_{12}$ . Воспользовавшись зависимостями (1.15), найдем значения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ . Если  $\sigma_x^* > \sigma_x$ , то  $\sigma_x^{\circ}$  определяем по формуле  $\sigma_x^{\circ} = \sigma_x^{\circ'} + (\sigma_x|_{t+\Delta t} - \sigma_x|_t)$ . Если  $\sigma_x^* < \sigma_x$ , то  $\sigma_x^{\circ}$  оставляем без изменений. Аналогичную процедуру проделываем с остальными компонентами напряжений.

2. Для рассматриваемой задачи поперечного изгиба пластины характерно возникновение зон пластичности в приповерхностных зонах и распространение их к срединной поверхности. Условием разрушения пластины является достижение величины интенсивности напряжений предела текучести в окрестности нейтрального слоя.

Условием нарушения сплошности жидкой фазы является превышение скорости ее движения над скоростью движения пластины в рассматриваемой точке.

Полученные уравнения динамической теплопроводности и уравнение динамической термоупругости ортотропной прямоугольной пластины решаются методом конечных разностей с интегрированием параметров по толщине в узлах сетки.

В качестве численного примера рассмотрено воздействие на прямоугольную пластину из керамического материала, армированного кварцевыми нитями, импульса излучения с длиной волны  $\lambda = 0,69$  мкм и пиковой интенсивностью  $I_s = 5 \cdot 10^8$  Вт/м<sup>2</sup>. Коэффициент поглощения излучения  $\alpha = 0,7$ . Форма импульса представлена на фиг. 1 ( $I_s$  дается в Вт/м<sup>2</sup>,  $t$  — в мс). Вся поверхность пластины облучается равномерно. Пластина ортотропная ( $E_1/E_2 = 2$ ), шарнирно закреплена по контуру. Размеры  $a \times b = 320 \times 320$  мм, толщина  $h = 2$  мм.

Положение границ твердой и жидкой фазы  $z_0$  (кривая 1), жидкой и газообразной фазы  $z_s$  (кривая 2) приводится на фиг. 2 ( $z$  — в мм,  $t$  — в мс).

Разрушение происходит в момент  $t = 0,625$  мс, в зонах прилежащих к краю пластины. Проведенные исследования показали, что для рассматриваемого случая энергии, потребная для разрушения единицы площади, составляет 0,15 МДж/м<sup>2</sup>; аналогичная величина, вычисленная по тепловой модели разрушения, составляет 60 МДж/м<sup>2</sup>. Таким образом, переход к механической форме снижает энергозатраты на разрушение в 400 раз.

На фиг. 3а, б показаны прогибы пластины  $W = w/h$  в сечениях  $x = a/2$  и  $y = b/2$  (кривые 1, 2, 3 соответственно  $t = 0,325; 0,525; 0,625$  мс).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Найт Ч. Дж. Теоретическое моделирование быстрого поверхностного испарения при наличии противодавления // Ракетн. техника и космонавтика. 1979. Т. 17. № 5. С. 81—94.
2. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М.: Наука, 1984. 368 с.
3. Стрельбицкая А. И., Колгадин В. А., Магошко С. И. Изгиб прямоугольных пластин за пределом упругости. Киев: Наук. думка, 1971. 244 с.

Москва

Поступила в редакцию  
20.IV.1990