МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1990

УДК 539.3

Б. Е. ПОБЕДРЯ

НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТОНКОСТЕНОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПЛОСКОСТИ

Несмотря на бурное развитие вычислительной механики, модели тонкостенных конструкций (оболочки, пластинки, стержни) продолжают играть важную роль в современной механике деформируемого твердого тела. В последнее время возросло внимание к теоретическим вопросам, связанным с обоснованием принятых в теории оболочек гипотез, с объяснением некоторых присущих этой теории парадоксов, с расширением области применимости теории на среды со сложной реологией, существенной геометрической нелинейностью, на композиты и т. п. [1–7]. Вводимые в рассмотрение теории становятся все более сложными, причем это связано не только с анализом физической стороны вопроса, но и с чисто геометрическими трудностями описания деформации поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве R^3.

В настоящей работе предпринята попытка рассмотрения геометрических образований меньшей размерности: плоских кривых в двумерном евклидовом пространстве R^2. Такое рассмотрение представляется не только академическим. Оно может быть непосредственно отнесено к исследованию замкнутых и незамкнутых цилиндрических оболочек, ширина которых много больше остальных размеров, а также плоского деформирования криволинейных стержней.

При гипотетическом построении теории оболочек сначала решается задача координации, т. е. выбора базовых поверхностей (чаще всего за базовую принимается срединная поверхность оболочки). Затем исследуется деформирование этих базовых поверхностей, а все кинематические характеристики не принадлежащих им точек определяются из принимаемых кинематических гипотез. Затем строятся уравнения равновесия (или движения) для некоторых осредненных статических характеристик (тензоры усилий и моментов, векторы перерезывающих сил) и, исходя из определяющих соотношений среды, находятся операторы, связывающие между собой кинематические и статические характеристики оболочки. После этого выводятся так называемые разрешающие уравнения и определяются граничные условия. Структура получаемых таким образом разрешающих уравнений зависит как от выбора координации, так и от характера принятых гипотез.

Заметим, что иногда выгодно для оболочек довольно сложной геометрии в качестве базовой поверхности выбирать поверхности достаточно простой структуры (плоскость, сферу, цилиндр и т. д.) [4, 8].

1. Пусть базовая кривая Γ_0 задана параметрически

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(\alpha) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор в евклидовом пространстве R^2. В качестве параметра кривой может быть выбрана длина ее дуги s: $ds=g^{1/2}d\alpha$, $g=\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}$, $\mathbf{e}=d\mathbf{r}/d\alpha$. Тогда для единичного вектора касательной к выбранной кривой $\boldsymbol{\tau}=d\mathbf{r}/ds=\mathbf{e}/g^{1/2}$ и для ортогонального к нему единичного вектора нормали к кривой Γ_0 справедливы формулы Френе [9]: $d\boldsymbol{\tau}/ds=k\mathbf{n}$, $d\mathbf{n}/ds=-k\boldsymbol{\tau}$, где k — кривизна кривой $k=d\boldsymbol{\tau}/ds\cdot\mathbf{n}=-d\mathbf{n}/ds\cdot\boldsymbol{\tau}$.

Таким образом, наряду с векторами ортонормированного репера R^2, в котором определен радиус-вектор $\mathbf{r}$, может быть использован подвижный репер $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$.

Пусть теперь базовая кривая (1.1) продеформирована. Это означает, что каждой ее точке A, описывающейся радиусом-вектором $\mathbf{r}$ недеформированного состояния поставлена в соответствие точка в деформированном состоянии с радиусом-вектором $\mathbf{r}'$. Обычно говорят, что точка A получила перемещение $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}+\mathbf{u} \tag{1.2}$$

Вектор перемещения можно разложить по векторам подвижного репера

$$\mathbf{u}=u\boldsymbol{\tau}+w\mathbf{n} \tag{1.3}$$

Дифференцируя (1.3) по длине дуги s, получим

$$d\mathbf{u}/ds=\mu\boldsymbol{\tau}-\psi\mathbf{n}$$

$$\mu\equiv du/ds-kw, \quad \psi=-(dw/ds+ku) \tag{1.4}$$

Квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками кривой Γ_0 в деформированном состоянии определяется следующим образом

$$ds'^2=d\mathbf{r}'\cdot d\mathbf{r}'=g'd\alpha^2, \qquad g'\equiv\mathbf{e}'\cdot\mathbf{e}' \tag{1.5}$$

$$\mathbf{e}'=d\mathbf{r}'/d\alpha=d\mathbf{r}/d\alpha+d\mathbf{u}/d\alpha=g^{1/2}(\boldsymbol{\tau}+\mu\boldsymbol{\tau}-\psi\mathbf{n}) \tag{1.6}$$

Из (1.5) и (1.6) следует, что

$$g'=g[(1+\mu)^2+\psi^2] \tag{1.7}$$

Определим деформацию ε базовой кривой Γ_0 как полуразность величины g' и g:

$$\varepsilon={}^1/_2(g'-g)=g[\mu+{}^1/_2(\mu^2+\psi^2)] \tag{1.8}$$

2. Очевидно, что в деформированном состоянии для базовой кривой Γ_0 уравнения Френе имеют вид

$$d\boldsymbol{\tau}'/ds'=k'\mathbf{n}', \qquad d\mathbf{n}'/ds'=-k'\boldsymbol{\tau}' \tag{2.1}$$

где k' — кривизна кривой в деформированном состоянии $k'=d\boldsymbol{\tau}'/ds'\cdot\mathbf{n}'=-d\mathbf{n}'/ds'\cdot\boldsymbol{\tau}'$. Вектор $\boldsymbol{\tau}'$, касательный к кривой Γ_0 в этом состоянии, определяется следующим образом

$$\boldsymbol{\tau}'=d\mathbf{r}'/ds'=d\mathbf{r}'/d\alpha d\alpha/ds'=\mathbf{e}'/g' \tag{2.2}$$

Сравнивая (2.2) с (1.6), получаем

$$\boldsymbol{\tau}'=(g/g')^{1/2}[(1+\mu)\boldsymbol{\tau}-\psi\mathbf{n}] \tag{2.3}$$

Вектор нормали $\mathbf{n}'$ ортогонален к вектору $\boldsymbol{\tau}'$ и выражается следующим образом

$$\mathbf{n}'=(g/g')^{1/2}[(1+\mu)\mathbf{n}+\psi\boldsymbol{\tau}] \tag{2.4}$$

Введем теперь кинематические величины ρ и φ на основе величин μ и ψ (1.4):

$$\rho=[(1+\mu)^2+\psi^2]^{1/2}, \qquad \varphi=\operatorname{arctg}(\psi/(1+\mu)) \tag{2.5}$$

Тогда формулы (2.3) и (2.4) запишутся соответственно в виде

$$\boldsymbol{\tau}'=\boldsymbol{\tau}\cos\varphi-\mathbf{n}\sin\varphi, \qquad \mathbf{n}'=\boldsymbol{\tau}\sin\varphi+\mathbf{n}\cos\varphi \tag{2.6}$$

Из (1.7) и (2.2) следует, что

$$\rho=(g'/g)^{1/2}, \qquad k'=(k-d\varphi/ds)/\rho \tag{2.7}$$

3. Выберем в качестве координации одну базовую кривую. Тогда радиус-вектор любой точки оболочки в недеформированном состоянии может быть записан в виде

$$\mathbf{R}=\mathbf{r}+H(\alpha)\mathbf{n} \tag{3.1}$$

где $H(\alpha)$ — функция, выражающая некоторую линию Γ, нормально связанную с базовой Γ_0 (каждой точке A на базовой линии Γ_0 с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ соответствует только одна точка B на линии Γ, лежащая на нормали $\mathbf{n}$ к базовой линии Γ_0 в точке A [10]).

На линии Γ в точке B определим вектор $\mathbf{T}$ и величину G:

$$\mathbf{T}\equiv d\mathbf{R}/ds=(1-kH)\boldsymbol{\tau}+(dH/ds)\mathbf{n} \tag{3.2}$$

$$G\equiv\frac{d\mathbf{R}}{d\alpha}\cdot\frac{d\mathbf{R}}{d\alpha}=\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}\left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2=g\left[(1-kH)^2+\left(\frac{dH}{ds}\right)^2\right] \tag{3.3}$$

Если базовая линия является срединной, то можно положить в (3.1) $H(\alpha)=\text{const}\equiv z$. Очевидно, что такая координация может быть введена, если для всех k и z ($|z|\leqslant h(\alpha)/2$) выполняется условие $|kz|<1$.

Введение координации для двух базовых линий подробно рассмотрено ранее [1].

Здесь мы рассмотрим только случай координации с введением срединной линии. В этом случае из (3.2) и (3.3) имеем соответственно

$$\mathbf{T}=(1-kz)\mathbf{n}, \qquad G^{1/2}=(1-kz)g^{1/2}$$

4. Любая точка B с радиусом-вектором $\mathbf{R}$ рассматриваемого тонкостенного элемента в недеформированном состоянии будет описываться в деформированном состоянии радиусом-вектором $\mathbf{R}'$:

$$\mathbf{R}'=\mathbf{R}'(s, z) \tag{4.1}$$

Аналогично соответствующая A, лежащая на срединной линии Γ_0, в деформированном состоянии согласно (1.2) и (4.1) будет описываться радиусом-вектором $\mathbf{r}'$: $\mathbf{r}'=\mathbf{R}'(s, 0)$.

Как было уже отмечено выше, в теории тонкостенных конструкций конкретное выражение (4.1) формулируется в виде кинематических гипотез. В силу «тонкостенности» выражение (4.1) может быть представлено разложением по степени z:

$$\mathbf{R}'=\mathbf{r}'+\partial\mathbf{R}/\partial z(s, 0)z+{}^1/_2\partial^2\mathbf{R}/\partial z^2(s, 0)z^2+\ldots \tag{4.2}$$

Назовем кинематическую гипотезу линейной, если в представлении (4.2) сохраняются только члены не выше первой степени z, т. е.

$$\mathbf{R}'=\mathbf{r}'+\mathbf{c}z \tag{4.3}$$

где $\mathbf{c}$ — некоторый «кинематический» вектор

$$\mathbf{c}=c_1\boldsymbol{\tau}+c_2\mathbf{n} \tag{4.4}$$

Поэтому для вектора перемещения $\mathbf{u}'$ в точке B имеем

$$\mathbf{u}'=\mathbf{R}'-\mathbf{R}=\mathbf{u}+z(\mathbf{c}-\mathbf{n}) \tag{4.5}$$

Так, в случае принятия гипотезы Тимошенко [1], имеем $\mathbf{c}=\mathbf{n}+\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\gamma}=\gamma\boldsymbol{\tau}$, где γ — подлежащая определению кинематическая характеристика. Таким образом из (4.4) и (4.5) имеем $c_1=\gamma$, $c_2=1$; $\mathbf{u}'=(u+z\gamma)\boldsymbol{\tau}+w\mathbf{n}$, т. е. $\mathbf{u}'$ линеен по кинематическим характеристикам u, w, γ.

В случае же принятия гипотезы Кирхгофа — Лява [11] в виде $\mathbf{c}=\mathbf{n}'$, получим согласно (2.6):

$$c_1=\sin\varphi, \qquad c_2=\cos\varphi$$

$$\mathbf{u}'=(u+z\sin\varphi)\boldsymbol{\tau}+[w+z(\cos\varphi-1)]\mathbf{n} \tag{4.6}$$

т. е. вектор $\mathbf{u}'$ уже не является линейным по кинематической характеристике φ. Если рассматривается геометрически линейный случай, то $\sin\varphi\approx\varphi\approx\approx\psi$, $\cos\varphi\approx1$ и из (4.6) имеем

$$\mathbf{u}'=(u+z\psi)\boldsymbol{\tau}+w\mathbf{n} \tag{4.7}$$

Поэтому гипотезу Кирхгофа — Лява можно сформулировать (назовем ее линейной гипотезой Кирхгофа — Лява) в виде $\mathbf{c}=\mathbf{n}+\psi\boldsymbol{\tau}$ ($c_1=\psi$, $c_2=1$) следствием чего будет (4.7).

5. Вычислим теперь кинематические характеристики точки B в деформированном состоянии. По аналогии с (3.2) и (3.3) имеем из (4.3):

$$\mathbf{T}'\equiv d\mathbf{R}'/ds'=\boldsymbol{\tau}'+zd\mathbf{c}/ds' \tag{5.1}$$

$$G'=d\mathbf{R}'/d\alpha\cdot d\mathbf{R}'/d\alpha=\mathbf{T}'\cdot\mathbf{T}'(ds'/d\alpha)^2 \tag{5.2}$$

---

[1] *Никабадзе М. У.* Моделирование нелинейного деформирования упругих оболочек: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: М., МГУ, 1990.

Представим теперь производную кинематического вектора **c** (4.3) в виде

$$\frac{d\mathbf{c}}{ds'}=\frac{d\mathbf{c}}{ds}\frac{ds}{ds'}=\left(\frac{g}{g'}\right)^{1/2}(\nu\boldsymbol{\tau}-\beta\mathbf{n})$$

$$\nu\equiv\frac{d\mathbf{c}}{ds}\cdot\boldsymbol{\tau}=\frac{dc_1}{ds}-kc_2;\qquad -\beta\equiv\frac{d\mathbf{c}}{ds}\cdot\mathbf{n}=kc_1+\frac{dc_2}{ds}\tag{5.3}$$

Тогда из (5.1) имеем

$$\mathbf{T}'=\boldsymbol{\tau}'+(g/g')^{1/2}z(\nu\boldsymbol{\tau}-\beta\mathbf{n})=\boldsymbol{\tau}\cos\varphi-$$
$$-\mathbf{n}\sin\varphi+z/\rho(\nu\boldsymbol{\tau}-\beta\mathbf{n})\tag{5.4}$$

Поэтому согласно (5.2):

$$G'=g'\left[1+z^2+\frac{\nu^2+\beta^2}{\rho^2}+2z\left(\frac{\nu}{\rho}\cos\varphi+\frac{\beta}{\rho}\sin\varphi\right)\right]$$

По аналогии с (1.8) естественно определить деформацию ε' в точке B:

$$\varepsilon'={}^1/_2(G'-G)={}^1/_2g[(\rho\cos\varphi+\nu z)^2+$$
$$+(\rho\sin\varphi+\beta z)^2-(1-kz)^2]$$

или, учитывая (1.8), (2.5):

$$\varepsilon'=\varepsilon+\varkappa z+\lambda z^2\tag{5.5}$$

$$\varkappa\equiv g[(1+\mu)\nu+\psi\beta+k],\qquad \lambda\equiv{}^1/_2g(\nu^2+\beta^2-k^2)\tag{5.6}$$

Для гипотезы Кирхгофа — Лява в (5.6) нужно положить

$$\nu=(d\varphi/ds-k)\cos\varphi,\qquad \beta=(d\varphi/ds-k)\sin\varphi\tag{5.7}$$

для гипотезы Тимошенко $\nu=d\gamma/ds-k$, $\beta=-k\gamma$, а для линейной гипотезы Кирхгофа — Лява $\nu=d\psi/ds-k$, $\beta=-k\psi$.

Для учета сдвига и так называемого обжатия рассмотрим в недеформированном состоянии величины

$$G_n\equiv\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial z}\cdot\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial z}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1,\qquad G_\tau=\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\alpha}\cdot\mathbf{n}=0$$

а в деформированном состоянии

$$G_n'\equiv\frac{\partial\mathbf{R}'}{\partial z}\cdot\frac{\partial\mathbf{R}'}{\partial z}=\mathbf{c}\cdot\mathbf{c},\qquad G_\tau'=\frac{\partial\mathbf{R}'}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\mathbf{R}'}{\partial z}=\mathbf{T}'\cdot\mathbf{c}\tag{5.8}$$

Естественно определить деформацию обжатия и сдвига соответственно

$$\varepsilon_n'\equiv{}^1/_2(G_n'-G_n),\qquad \varepsilon_\tau'\equiv{}^1/_2(G_\tau'-G_\tau)\tag{5.9}$$

Тогда в согласии с (5.8), (5.4) и (2.7) имеем из (5.9):

$$\varepsilon_n'={}^1/_2(c_1^2+c_2^2-1)\tag{5.10}$$

$$\varepsilon_\tau'={}^1/_2g^{1/2}[c_1\rho\cos\varphi-c_2\rho\sin\varphi+z(c_1\nu-c_2\beta)]\tag{5.11}$$

Из (5.10) и (5.11) видно, что для гипотезы Кирхгофа — Лява $\varepsilon_n'=0$, ε.

6. Предположим, что выполняется статическая гипотеза тонкостенных конструкций, заключающаяся в том, что нормальные напряжения на площадках, эквидистантных срединной, пренебрежимо малы по сравнению с остальными напряжениями. В нашем случае эта гипотеза означает, что напряженное состояние в каждой точке характеризуется только двумя напряжениями: нормальным σ_n и касательным σ_τ на площадках, ортогональных к базовой линии.

В деформированном состоянии рассмотрим вектор усилий **P**:

$$\mathbf{P}=N\boldsymbol{\tau}'+Q\mathbf{n}'\tag{6.1}$$

и изгибающий момент M, причем определим

$$N\equiv\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma_n\,dz,\qquad Q\equiv\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma_\tau\,dz,\qquad M\equiv\int\limits_{-h/2}^{h/2}z\sigma_n\,dz \tag{6.2}$$

Тогда уравнения равновесия можно записать в виде [11]:

$$d\mathbf{P}/ds'+\mathbf{p}=0 \tag{6.3}$$

$$dM/ds'-Q+m=0 \tag{6.4}$$

где $\mathbf{p}$ — вектор заданных распределенных усилий, отнесенных к срединной линии $\mathbf{p}=p_1\boldsymbol{\tau}'+p_2\mathbf{n}'$, а m — распределенный заданный момент.

Уравнения (6.3) в скалярной форме, учитывая (6.1) и (2.1), можно записать

$$dN/ds'-k'Q+p_1=0,\qquad dQ/ds'+k'N+p_2=0 \tag{6.5}$$

Уравнения (6.5) можно отнести и к недеформированному состоянию, если учесть формулы (2.6):

$$\begin{gathered}\frac{1}{\rho}\left[\frac{dN}{ds}-\left(k-\frac{d\varphi}{ds}\right)Q\right]+p_1=0\\ \frac{1}{\rho}\left[\frac{dQ}{ds}+\left(k-\frac{d\varphi}{ds}\right)N\right]+p_2=0\end{gathered} \tag{6.6}$$

Точно также из (6.4) следует

$$\rho^{-1}dM/ds-Q+m=0 \tag{6.7}$$

Число граничных условий для уравнений (6.6), (6.7) зависит от выбора координации и кинематических гипотез. Оно легко устанавливается из анализа линейной задачи, которая является статически определимой.

Заметим, что для гипотез Кирхгофа — Лява и для гипотезы Тимошенко их будет по три на каждом конце линии Γ_0.

Например, для случая жесткого защемления при $s=s_0$:

$$u=0,\ w=0,\ dw/ds=0 \tag{6.8}$$

7. Для замыкания системы уравнений (6.6), (6.7) необходимо рассмотреть определяющие соотношения. Пусть, например, они заданы в виде функции F:

$$\sigma_n=F(\varepsilon') \tag{7.1}$$

Тогда связь между статическими N, M и кинематическими ε, $\varkappa$, λ характеристиками устанавливается интегрированием по z в соотношениях (6.2) с учетом выражения (5.5).

Если величина h достаточно мала так, что $|\varkappa z+\lambda z^2|<1$ и функция (7.1) — гладкая (достаточное число раз дифференцируемая), то разлагая (7.1) в ряд Тейлора

$$\sigma_n=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}F^{(m)}(\varepsilon)\,(\varkappa z+\lambda z^2)^m \tag{7.2}$$

получим

$$N=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=[m/2]}^{m}\frac{F^{(m)}\lambda^{2k-m}\varkappa^{2(m-k)}h^{2k+1}}{(2k-m)!\,(2m-2k)!\,(2k+1)2^{2k}} \tag{7.3}$$

$$M=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k={}^1\!/\!_2(m-1)}^{m-1}\frac{F^{(m)}\lambda^{2k-1-m}\varkappa^{2(m-k)-1}h^{2k+3}}{(2k-m+1)!\,(2m-2k-1)!\,(2k+3)2^{2(k+1)}} \tag{7.4}$$

где квадратные скобки означают целую часть (антье) от заключенного в них выражения.

Если в (7.2) — (7.4) сохранить только члены с $m=0$ и $m=1$, что соответствует определяющим соотношениям (7.1) в виде

$$\sigma_n=E\varepsilon', \ E=\text{const} \tag{7.5}$$

то получим $N=E(h\varepsilon+h^3\lambda/12)$, $M=Eh^3\varkappa/12$.

Подставляя теперь (7.3) и (7.4) в (6.6), в котором Q должно быть заменено по формуле (6.7) и учитывая кинематические соотношения (5.6), (5.3), (1.8), (1.4), получим два уравнения относительно компонент u и w вектора перемещения.

8. Рассмотрим в качестве примера тонкую пластинку бесконечной ширины $-s_0\leqslant x\leqslant s_0$ $(x\equiv s)$, которая прогибается в направлении y равномерно распределенной следующей нагрузкой p_0. Будем считать, что материал пластинки описывается определяющим соотношением (7.5) и выполняются гипотезы Кирхгофа — Лява, т. е. справедливы соотношения (5.7). Тогда из (1.8) и (5.6) имеем $\varepsilon=(\rho^2-1)/2$, $\varkappa=k-k'\rho^2$, $\lambda=(\rho^2k'^2-k^2)/2$. Будем считать все линейные размеры отнесенными к толщине h, а p_0 — к величине E.

Уравнения равновесия (6.6), (6.7) при $k=0$ имеют вид

$$dN/ds+\varphi^{\cdot}dM/ds=0, \ d^2M/ds^2-\varphi^{\cdot}N+p_0\rho=0 \tag{8.1}$$

где $\varphi^{\cdot}\equiv d\varphi/ds$. Из (7.6) имеем

$$N=\frac{Eh}{2}\left(\rho^2-1+\frac{h^2}{12}\varphi^{\cdot 2}\right), \qquad M=\frac{Eh^3}{12}\rho\varphi^{\cdot} \tag{8.2}$$

Система двух уравнений, полученных после подстановки (8.2) в (8.1) относительно двух неизвестных ρ, φ, имеет частное решение $\rho=\text{const}$, $\varphi^{\cdot}=$ $=\text{const}$. Удовлетворяя части условий защемления (6.8), а именно: при $|s|=s_0$: $u=0$, $w=0$, получаем решение для положения точек, лежащих до деформации на прямой $y=0$ $(-s_0\leqslant x\leqslant s_0)$, в параметрическом виде

$$x=\frac{s_0}{\sin as_0}\sin as, \qquad y=\frac{s_0}{\sin as_0}(\cos as-\cos as_0) \tag{8.3}$$

где величина a определяется через нагрузку p_0 из уравнения

$$(6-a^2)\sin as_0+12p_0s_0\sin as_0=12a^2s_0^2 \tag{8.4}$$

Третьим условием, которому удовлетворяет найденное решение, может быть, например, $Q=0$. Из анализа уравнения (8.4) следует, что при $p_0=0$ величина a равна нулю, а затем растет с ростом p_0, стремясь к π/s_0 при $p_0\to\infty$.

Уравнения (8.3) описывают на плоскости x, y при каждом значении a дугу окружности радиуса $R\equiv s_0/\sin as_0$ с центром в точке $(0, A\equiv -s_0\operatorname{ctg} s_0)$. При $p_0=0$ уравнения (8.3) описывают отрезок прямой $y=0$, $-s_0\leqslant x\leqslant s_0$ $(R=$ $=\infty$, $A=-\infty)$. Затем с ростом p_0 радиус R уменьшается, а A — увеличивается, достигая значений $R=s_0$, $A=0$ при $a=\pi/2s_0$ $(p_0=[12s_0^2(\pi^2-1)+\pi^2]/$ $/48s_0^2)$, когда кривая (8.3) описывает полуокружность. При дальнейшем увеличении нагрузки p_0 радиус R и A увеличиваются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И. И.* Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука, 1989. 373 с.
2. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
3. *Васильев В. В.* Некоторые проблемы теории оболочек, связанные с особенностями современных конструкционных материалов // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 178—188.
4. *Векуа И. Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 286 с.
5. *Григолюк Э. И., Куликов Г. М.* Многослойные армированные оболочки. М.: Машиностроение, 1988. 287 с.

6. *Зубов Л. М.* Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Ростов н/Д.: Изд-во Рост. ун-та, 1982. 143 с.
7. *Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А.* Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1977. 144 с.
8. *Муштари Х. М., Галимов К. З.* Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигиздат, 1957. 432 с.
9. *Фиников С. П.* Дифференциальная геометрия. М.: Изд-во МГУ, 1961. 158 с.
10. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. М.– Л.: Гостехиздат, ОГИЗ. Ч. 1. 1947. 512 с.; Ч. 2. 1948. 407 с.
11. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.: Гостехиздат, ОНТИ. 1935. 674 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.IX.1990